SHOUT
SHARE
IT

S. 1142 A.

MEMORIE
DI
MATEMATICA
E FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
TOMO II. PARTE I.

SEMPER
EADEM

VERONA
PER DIONIGI RAMANZINI
MDCCLXXXIV.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

E L O G I O

DI GIUSEPPE TORELLI

Scritto

Dal Sig. Cavaliere PINDEMONTE.

SE felice veramente è quel letterato, a cui uno ſtudio coſtante delle ſcienze aſtratte non eſtinſe il guſto per l' arti le più gentili, che le pagine d' Omero ha così ſpeſſo tra mano come quelle di Newton, e del quale torna proprio ugualmente e lo ſcuoprire la natura d' una curva, e il produrre l' incanto amabile della poeſia, noi diremo che fu felice il Torelli, di cui ſcriviamo l' Elogio, e che poſſedette tutto quel bene, cui lice in terra aſpirare, e neceſſario anch' eſſo a coſtituire il carattere d' una vita celebre e rara, quale venir ſuole dalla ſavia antichità per modello rappreſentata. Perciocchè nè mancò a lui la virtù, nè l' oſſervanza della religion ſua, nè la cara ſalute, parte anch' eſſa eſſenzialiſſima della umana felicità; ed ebbe, in giuſta equazione de' ſuoi deſiderj, que' due che molto fra gli eſterni beni riſplendono, le belle ricchezze, e la fama, ch' è certo ancora più bella. Una tal vita ben meritava di venir poſta ſulle carte, ed anche di venir poſta ſu quelle, che dalla *Società Italiana* ſon pubblicate. Egli era membro di queſta: quindi, appunto perchè non fu a tempo di affaticarſi per eſſa, crede aver più ragione la *Società* di lagrimarne la perdita, e lo fa pubblicamente, amando di premiare anche le ottime volontà de' ſuoi membri, e ſtimando di onorar nel Torelli ſe ſteſſa. Quantunque poi s'occupi ſolamente delle ſcienze gravi, gode ſe alcuno ſi diſtinſe ancora nelle lettere belle, e vuole che per queſte eziandio venga qui celebrato, e perchè non ſi defraudi alcuno della debita lode, e perchè non rifiuta la compiacenza di far vedere, che poſſiede ne' ſuoi quelle ricchezze ancora, di cui ella non uſa.

Giuſeppe Torelli nacque in Verona li 3. Novembre dell' anno 1721. Luca fu il padre, negoziante di fortuna mediocre, e la madre Angela Albertini Veneziana, donna di più che mediocre indole, e colta oltre l' uſanza del ſeſſo a que' tempi: a lei confeſſava il Torelli di dover tutto, rimaſto privo del padre in tenera età; eſſa gli diede l' educazion prima; e fatto adulto nel Collegio il poſe qui retto allora da' PP. Somaſchi, poſcia in caſa de' dotti fratelli Ballerini, e finalmente, ſapendo con amor coraggioſo e vero privarſene, all' Univerſità di Padova lo mandò. Terminati appena ſuoi ſtudj, parve ſubito ciò ch' eſſer dovea, e ch' io qui dichiaro: dico che moſtrò ſubito un certo ſenſo dell' ottimo in ogni coſa, un' anima armonica e veramente geometrica, ma nel tempo ſteſſo di finiſſima e dilicatiſſima temperatura; onde l' amor del bello non meno che il biſogno del vero, ed il fior del guſto e la ſquiſitezza del tatto non men che il ſapore della proporzione e del retto; ciò in fine che mi piace comprendere nelle ſole parole *ſenſo dell' ottimo in ogni coſa* a lui naturale, e colla buona diſciplina perfezionato: dal quale condotto venne per la difficile carriera delle lettere, e per la più difficile della vita, di cui parlerò dopo, ma breviſſimamente, perchè non trattaſi qui che dell' uom letterato. Diſſi che queſto ſenſo di perfezione moſtrò ſin d' allora, perchè gli uomini primarj di Padova a quel tempo, i Morgagni, i Pontedera, i Poleni, i Dandini, i Volpi, ed i Facciolati non ſolamente ammiravano in lui un giovinetto che molto di sè promettea, ma eziandio accarezzavano un conſigliero ſagace, cui potevano negli affari delle lettere interrogare. Del che fa prova ſaper che il Morgagni leggeva a lui nella ſtanza quelle orazioni che poi dovea dalla cattedra recitare; come fa teſtimonio dell' altro veder che il Dandini compiacqueſi d' indirizzargli per via d' epiſtole una ſua opera, chiamandolo pieno di erudizione e di dottrina in una età che gli altri ſi diſpongono ad eſſerlo, e per cui vedeſi che la buona coltura non gli fu men primaticcia del buon giudizio.

Ripatriato, pare che ſolo delle belle lettere ornaſſe quegli anni primi, ma non già come s' uſa oggidì; perocchè eſercitavaſi nel latino ſermone, coltivava il greco, amoreggiava l' ebraico, avvicendando il ſevero e l' amenità, e nutrendo i fiori del guſto colla ſoſtanza del buon ſapere. Frutto primiero di queſti ſtudj fu la verſione latina, non però mai pubblicata, di quell' aureo libretto greco di morale, più utile e grande che trattati molti non ſono di tale ſcienza, e libretto d' ogni età, d' ogni ſeſſo, d' ogni nazione e d' ogni ſecolo, *gli apologhi di Eſopo*; i quali veſtire della più caſta latinità, e fregiar volle di note opportune e di prefazione erudita, formandone un elegantiſſimo volumetto, non men che riguardo al coſtume, profittevole ai giovani riſpetto alla lingua, la quale, non men che quello ſecondo i Teologi, vaſſi ora più ſempre ſecondo i Grammatici corrompendo. E del tempo medeſimo, e non meno ſaporiti e ben proſperati ſono altri frutti di gentile letteratura, di cui toſto ragiono, Tra' greci ſcrittori a sè particolarmente lo traſſe Luciano, dalla converſazione del quale partì egli dopo averne non pur guſtati, ma in ſangue convertiti que' penſamenti, e fatto una eleganza ſua propria di quelle grazioſità. Teſtimonio ne ſono tre Dialoghi ed una Eſercitazione accademica. Ha queſta per titolo *Sogno di Giacomo Pindemonte*; e ſi tratta di perſuadere il coltivamento delle lettere ad un giovinetto inclinato più a quello delle armi, ſingendoſi che due donne vegga in dormendo, la Milizia, e la Letteratura, ambedue deſideroſe di poſſederlo, ed i ſuoi comodi e beni vantando ciaſcuna: il tutto non che preparato alla maniera de' Greci, ma di ſapore, greco veramente, condito. I Dialoghi poi, latini pur eſſi, e ſtampati ſenza nome in Colonia, due portano in fronte *Del principale incomodo della gola e del ſuo rimedio*, l'altro è ſulla dottrina in generale del *Probabiliſmo*, dottrina che allor più che mai facea perdere il tempo ai Teologi dell' Italia. Ciaſcun ſa quanto torni opportuno lo ſtile del dialogo, ove piaccia veſtir di ridicolo le coſe più gravi, o che tali ſon riputate: ma quanto anche non è malagevole il conſeguirne la ſemplice ed inſieme varia andatura, i motti improvviſi e nulla meno naturali, e quella piccante, e nobile a un tempo ed ingenua giocondità che tutto dee rallegrarlo? o io m'inganno, o queſti Dialoghi non ſono nel genere loro meno eccellenti delle celebri Lettere Provinciali: pratica ſomma di que' corteſi e condiſcendenti Caſiſti, saviezza, temperanza e diſinvoltura nel farne uſo, le grazie innocenti a tempo, a tempo le grazie pungenti, facile teſſitura e variata, gemme di lingua le più luſtranti, e il garbo per ogni dove e la urbanità. Diede anche pruova del ſuo profitto nella ebraica lingua con una Diſſertazione latina indiritta ſotto forma di lettera al Marcheſe Maffei, e contenente parecchie comparazioni tra l' ebraico libro dell' Eſodo, e la greca interpretazion dei Settanta. S' oppoſe a queſta operetta il P. Carmeli reputato Profeſſore a quel tempo in Padova di lingue orientali, ſoſtenendo eſſer coſa pericoloſa ed audace e quaſi ſacrilega il por mano ſenza neceſſità ed autorità nell' ebraico teſto dietro le riprovate traccie di Riccardo Simone, del Clerc, e di Lodovico Capello: ma condannando l'aſſunto, l'ingegno per altro del giovine Critico commendò. Comunque ſia riguardo al primo, ci contenteremo di dire quanto al ſecondo, che ſolo ancora in que' pochi paſſi diede a divedere abbaſtanza, quanto ſarebbe nella ſacra filologia proceduto, ove continuato aveſſe a darci opera, e quando mancati non gli foſſero i libri neceſſarj, maſſime quelli de' Proteſtanti, de' quali i paeſi cattolici, e maſſime l'Italia, per non dir che il vero, ſcarſeggia. E qui mi piace notare che queſti lavori ſon piccioli, è vero, di mole; ma la finitezza e perfezion loro, come fa onor grande all' Autore, così la mia cura giuſtifica in ricordarli.

Benchè però coltivaſſe in quegli anni le più dolci arti ſingolarmente e la filologia, tanto è però lungi che traſcuraſſe le ſcienze e le arti più gravi, che ſappiamo anzi che addottorato a Padova in legge, ſebben non l'abbia mai profeſſata, molto vi applicò nondimeno in quella ſua giovinezza, e appare da lettere ſcritte a lui, che due Diſſertazioni, indarno poi ricercate tra le ſue carte, ſteſo egli aveſſe ſu propoſiti importanti aſſai di giuriſprudenza. Ma nè queſta con tutte le altre ſcienze che dette ſon metafiſiche, nè la fiſica ſteſſa che ſpeſſo, tolta univerſalmente, o ci laſcia anch' ella nelle tenebre, o le dirada per laſciarci poi, com' è de' lampi notturni, in anche maggiore oſcurità, potea contentare uno ſpirito di contentatura in tutte le coſe difficiliſſima, la qual non naſce che da quel ſenſo di perfezione ſopraindicato, e dal quale venía propriamente coſtretto a non ſi appagare che di quel vero ſol degno del nome, come non ſi acquetava nella poeſia ed oratoria che a quel puro bello e perfetto, che può dirſi il vero delle buone arti. Quindi abbracciar dovea di neceſſità le matematiche, e quelle ſingolarmente che diconſi pure, le quali poi ſempre aggiogò colle belle lettere giudicate per lui non men vere appunto di quelle nell' eſſer loro, perchè ſicure di conſeguire in mano di chi trattarle ſappia il lor fine, o con dilettar l' intelletto, o con iſvolgere la volontà. E però egli era ſolito lodar particolarmente queſti due ſtudj, e raccomandarne il coltivamento; e per quella opinione, che anch' ei tenea, foſſe quaſi un perder l' opera e il tempo in parecchj altri, e per un diletto naturale di vedere in conſiderazione ed in pregio ciò che ſi pregia e conſidera, diletto che torna in lode, perchè ſol cade in coloro che di oſcurare non temono all' altrui luce: molto più che conceſſo è a pochi nodrire ſotto un medeſimo tetto, e congiunti d' amicizia due ſtudj non tanto forſe nemici di lor natura, quanto creduti tali perchè rare volte, e quindi con maggior vanto di chi gli uniſce, inſieme convengono.

Per la medeſima ragione poi, che tra le ſcienze avea ſcelto le matematiche, eleſſe tra queſte l' antica geometria, e fece poi ſempre le delizie ſue di quel metodo, che per la diligenza a guidarci di paſſo in paſſo, e per quel lume che ſparge ſu la via tutta, dovea ſingolarmente allettarlo; e come l' anima ſua non era meno gentile che geometrica, è il veder facile quanto in ciò pure amar doveſſe gli antichi, di cui fu ſempre grandiſſimo oſſervatore, e nelle dimoſtrazioni de' quali la preciſione ed il rigore vanno a maraviglia del pari colla ſemplicità ed eleganza. Rivolſe l' animo da principio anch' egli a quel metodo che per altri pregi riſplende e tanto tiene ora, veduti ch' egli ebbe quegli elementi di geometria, che moſtrare ſi ſogliono nelle ſcuole; ma poi mutò di conſiglio. Perchè avvenutoſi in Vicenza con dotto Matematico che lo avviſò di volgere addietro per rifar meglio la ſtrada che corſa avea, e forſe anche ricordatoſi di Newton, che ritornò ſui Geometri antichi da lui troppo toſto per l' amor dell' Algebra abbandonati, preſe a ſtudiare di nuovo Euclide, ma in Euclide medeſimo, ſecondo il detto dello ſteſſo Newton; e queſto ſece cogli altri tutti e ſingolarmente con Archimede, di cui tanto invaghì, che gli tenne poi ſempre la più irreprenſibile fedeltà. E quanto a Euclide, come riſo avea prima di sè, così degli altri era ſolito ridere che ſui moderni libri lo ſtudiano, e di quegli Autori che preteſero riordinarlo, rompendo quella catena mirabile di propoſizioni che paſſano neceſſariamente dall' una nell' altra, e che formando un ordine, di cui non può darſi il più nobile, formano inſieme la delizia degli amatori del rigor geometrico; rigore, che ſolo può vincere uno ſpirito riſoluto di non ſi dare che all' evidenza. Ma queſto è il vezzo comune ora di agevolare la ſcienza debilitandola; al che non poco contribuiſce quella nazione, per altro illuſtre e grandiſſima, e non mai lodata abbaſtanza che fa di aſſicurarſi in tal modo la da lei affettata univerſale monarchia nelle lettere, e che inſegna ad abbandonare le lingue antiche per far parlare alle ſcienze la propria ſolo: mentre la ſua rivale aſpira tuttavia ad una gloria negli ſtudj men rilucente, ma più ferma e più dai ſavj ammirata; e le antiche lingue coltiva, ed ancora conſerva il guſto della ſevera geometria.

Primo ſaggio di queſti ſtudj nel noſtro Torelli fu l' ingegnoſo trovato d' una macchina idraulica, ſpiegata molto ſemplicemente ed elegantemente con Lettera latina al Marcheſe Poleni indiritta; e trattaſi d' una ruota girante ſotto acqua, ed utile in queſto che non riſtarebbe, come le altre, ſempre che i fiumi o per le pioggie autunnali, o per la neve ingroſſano di primavera. E' noto che per due cagioni ſtarebbe; o mancando la forza impulſiva, o la ſteſſa forza ugualmente in ogni ſua parte operando. Queſt' ultimo accade nella ruota ſotto acqua; perchè quantunque ſia vero che le acque correnti non muovano e ſopra e ſotto d' un corſo eguale, pur non è quella diverſità che baſti a rivolgerla. Per far dunque che la forza delle acque non così operi nella ſuperior parte della ruota come nella inferiore, ſpezzò i raggi di quella in due parti, ond'è che gl' inferiori compongon ſempre una retta, due rette i ſuperiori fatti per una ſpecie di contrazione più brevi; e però volgendo la ruota, ciaſcun raggio cade pel proprio peſo, e torna dall' una parte intero di rotto, e rotto d' intero dall' altra, ciaſcuno raggio allungandoſi o contraendoſi con perpetuo ed equabile avvicendamento.

Dopo queſta Lettera pubblicò egli un tratto geometrico in lingua italiana col titolo *Scala de' meriti a capo d' anno*; imitando con queſto il Leibnizio, di cui pure lo ſcioglimento d' un bel problema a mercatura pertinente negli Atti abbiamo di Lipſia. *Merito* ſi chiama preſſo i mercatanti quel frutto, che da un capitale ci viene prodotto in un dato tempo; e *merito a capo d' anno* quello che ſebben prodotto equabilmente per tutto l' anno, pur ſolo in fine dell' anno ſteſſo dimandaſi intero. Ma ſuppongaſi, dice l' Autore, che ſe ne dimandi fra l' anno ſenza l' altrui pregiudizio una qualche parte: qual ſarà ella? Ora per iſciogliere queſto problema baſta conſiderare che il dimandarſi per patto intero un tal merito ſolamente in fine dell' anno non altro importa, ſe non che nel giro d' un anno nulla oltre lo ſteſſo può ricavarſi: ond' è manifeſto che in altro modo dee concepirſi prodotto, dimandandoſi in fine dell' anno, ed in altro modo, dimandandoſene fra l' anno una parte. Nel primo caſo dee concepirſi prodotto dal ſolo capitale, nel ſecondo e dal capitale e da quella parte, qualunque ſiaſi, che fra l' anno ſe ne dimanda. Queſta parte adunque, che nel tempo traſcorſo ſi vuol ſupporre eſſere ſtata dal capitale prodotta, dee eſſer tale che unita a quella tale altra, cui può produrre pur colla ſteſſa legge nel tempo, che riman da traſcorrere, il predetto capitale, della ſteſſa accreſciuto, adegui preciſamente l' intero merito. Le quali parti, o ſia meriti parziali volendo generalmente determinare, ricorre l' Autore ad una curva, le cui dimenſioni e proprietadi a dimoſtrar tolſe, e che appunto è la ſcala ſopraindicata. Il problema è da tenerſi in pregio non lieve e per l' uſo che nella vita civile ſe ne può trarre grandiſſimo, e perchè ſciolto con quella nitidezza e perſpicuità tutte proprie del noſtro Geometra.

Ma benchè l' Autor noſtro coltivaſſe ſtudioſamente ed acremente ſoſteneſſe la ſinteſi degli antichi, meritò per altro aſſai bene della moderna analiſi; e ciò, tentando di traſportare il rigore e la certezza dell' antica geometria nella più ſublime e più utile parte di quel metodo: dico nel calcolo infiniteſimale. La idea, che delle infiniteſime quantità reca il Wolfio ne' ſuoi Elementi, rappreſentandole quali quantità incomparabili alle più grandi, a quel modo che un granello d' arena incomparabil ſi dice riſpetto a un monte, come non può certamente alcuno ingegno matematico, per indulgente ch' ei ſia, tranquillare, così agitare dovea ſommamente colui che alla ſana indole dello ingegno aggiungea la rigida educazione dell' antica geometria. Cominciò pertanto a meditare, giuſta il penſamento proprio, ſulle quantità infiniteſime. Le conſiderò egli quali differenze che a poco a poco giungono ad annichilarſi, e nell' atto dell' annichilamento fanno che certe relazioni tra d' altre ſuſſiſtenti linee a verificare ſi vengano; e conſiderò inſieme che avendo gli Analiſti diſtinto due calcoli, l' uno per le quantità poſitive, per le negative l' altro, eſſere ci dovea un calcolo ancora pel Niente poſto all' une e all' altre di mezzo. Dietro codeſte tracce avviſò non altro eſſere il calcolo degl' infiniteſimi, che il calcolo del Niente tra le poſitive e le negative quantità collocato, ſebbene con altri riguardi, e di ſotto ad altra ſembianza da' primi Autori ſuoi inſtituito. Ma un annientamento traente ſeco la verità di relazioni che prima non erano, non è già un nulla che meriti d' eſſer confuſo col nulla metafiſico ed aſſoluto; il perchè trovoſſi egli neceſſitato a caratterizzarlo col titolo di Nulla geometrico, e queſto titolo a porre in fronte d' una ſua opera latina, diviſa in due libri, nel primo de' quali ſe ne riſchiara la natura, nell' altro l' applicazione ſe ne dimoſtra. In quello, come queſto Niente ſi formi, come a varj ordini ſalga, come ſopra eſſo adoperare ſi debba vien ragionato, e la ſottigliezza dell' ingegno particolarmente riſplendevi; come pompeggia la induſtria nel libro ſecondo, ove contienſi l' applicazione, ed ove d' ogni ſpecie di problemi geometrici ſoliti ad eſſere ſciolti dal calcolo infiniteſimale ſi recano eſempj, in cui ſciolgonſi felicemente colla nuova teoria del Nulla geometrico. Or chi crederebbe che un' opera lavorata con tanto raffinamento di arte, ed a sì utile fine condotta, come quella che i fondamenti dimoſtra d'una parte tanto importante dell' analiſi, qual è il calcolo differenziale, chi crederebbe che accolta non foſſe con applauſo, con gratitudine, con diletto? Eppure non fu così: il titolo di Niente geometrico diſguſtò molti; ma quanto a torto, rendeſi chiaro abbaſtanza dalla nozione di queſto Niente poc'anzi eſpoſta. Era dovere pertanto non ſi arreſtare alla nuova iſcrizione del tempio, ma entrare, ma eſaminare il tutto e le parti, che avrebbono e giuſtificato loro quella iſcrizione, e data inſieme baſtevole idea della ſagacità e del ſapere dell' architetto. Lo ſteſſo intervenne al celebre Autore *dello Spirito delle leggi*; il qual titolo rivolto ſubitamente in iſcherzo dalla non ſeria nazione fece che la più parte, ſcrivono i Signori Maupertuis e d' Alembert, non ſi curaſſe a principio del libro ſteſſo, lodatiſſimo poi, cioè letto che fu da que' giudici, che la voce del pubblico indirizzarono: e non dubito che letto da giudici buoni il noſtro libro, poſta la debita proporzione tra opera ed opera, non ne riportaſſe gli applauſi grandi, e avuto il peſo de' voti, non ne otteneſſe il numero ancora.

Vide pertanto l' Autore che quella opera o ſtata non era ben letta, o inteſa non bene; e però a vie più far chiara la ſolidità e utilità della ſua teoria dettò nuovo libro anch' eſſo latino, e col titolo di *Coſe Geometriche* pubblicollo: nel quale tre problemi propone e ſcioglie prima ſinteticamente coi principj della greca geometria, poi analiticamente colla dottrina ſua del Nulla geometrico. E veramente le prime riſoluzioni moſtrano il ſommo vigore di raziocinio, che dall' eſercizio della ſinteſi avea ritratto, onde ſoſtenere le più compoſte e laborioſe dimoſtrazioni delle verità più difficili ed avviluppate; come le riſoluzioni ſeconde manifeſtano ciò in che l' analiſi vince la ſinteſi, cioè la ſpeditezza di giungere a meta, per nulla dire ora della fecondità, e ciò in che dalla ſinteſi è vinta, cioè la luce, che illumina e indora tutto il cammino. Buon Critico appare ancora, inſerendo tra quelle dimoſtrazioni ciò che ſulla quadratrice di Dinoſtrato nelle collezioni ſi riferiſce di Pappo, e ſervendoſi ei primo del manoſcritto codice Vaticano per lui emendato accortamente e tradotto, male ſoddisfacendoſi della verſione del Commandino. Finalmente elegantiſſimo Scrittore veder ſi fa; e in vero due libri di acuta e profonda matematica, annunziati ciaſcuno da prefazione e da lettera dedicatoria piene l' una e l' altra di tutte le grazie e le veneri del penſare e dello ſcrivere, parmi coſa rara veramente ed attiſſima ad umiliarne e lo Scrittore ſuperficiale, ed il rozzo Matematico; ma nel tempo ſteſſo è coſa però da aſpettarſi in colui che reca dalla natura il ſenſo vero dell' ottimo: perchè chi al bello s' educa ſolo, giungerà ſolo a quello dell' arte che particolarmente coltiva; ma chi propriamente al bello è nato anche coſa non vede o tocca che toſto non ve lo ſcuopra od inſonda, o perchè generale è la diſpoſizione, o perchè il primo coglie tale o tale beltà, il ſecondo coglie ſempre ſotto varie modificazioni la beltà ſteſſa.

Conoſcitore dunque ſicuro del vero bello, così nelle arti più dolci come nelle più auſtere, caldiſſimo amante di quello per conſeguenza, non potea a meno di non anche eſſere artefice in queſta ora, ed ora in quella officina; e però mi ſi permetta, che ſiccom' egli paſſava da lavoro a lavoro aſſai facilmente, benchè diverſo, così faccia io pure parlando di lui, e torni alle belle lettere dalle matematiche, che poi di nuovo riprenderò. L' amor per la madre lo conduſſe all' amore per la più bella delle figliuole; dico, che amando la lingua latina, amò anche la italiana moltiſſimo, e ſcriſſe in queſta con eguale purità, e con leggiadria non comune: ma pure, ragguagliando gli ſcritti, vedeſi che la madre gli era più familiare e che ſeco egli uſava liberamente, ove la converſazione colla figlia era più alquanto ſtudiata, ed elegante sì bene, ma d'una men facile alquanto e men diſinvolta eleganza. Quattro Lettere abbiamo ſteſe in tal lingua; la prima che uſcì delle quali s' intitola: *della denominazione del corrente anno volgarmente detto* 1760; ed è una di quelle ſcritture che prodotte vengono da quelle conteſe, le quali ſe diſcompagnate non ſono dalla urbanità, fanno il ſaporito ed il vivo della civil compagnia. La quiſtion veramente era manifeſta per sè, e non pare che biſogno ci foſſe d' uno ſcritto per terminarla: perchè quale Aſtronomo ne' ſuoi calcoli andar non fa, per grazia d' eſempio, gli ſcorſi meſi di gennajo, febbrajo ecc. per l'anno 1785? ma come io penſo che quella converſazione compoſta non foſſe di Aſtronomi, e nè manco di gente, che delle uſanze loro ſapeſſe, correndo gran differenza tra un ritrovo di Caffè, e quel di una Specola; così fu neceſſario il dettar quella Lettera, e fu bello con erudizione pari alla gentilezza il dettarla, rilevando l'errore di Beda, cui malamente, in cambio di Dionigi Eſiguo, noi ſeguitiamo. Una conſimile origine ebbe quell' altra ſua al celebre Autore delle lettere Virgiliane, condita veramente di forti ſali e di molto brio illuminata; ma che qui baſta citare, ſiccome quella, ove non trattaſi propriamente d'affar letterario, ma di perſonali e civili coſe, che non ſono importanti, ſe non quanto ſon nuove e calde le circoſtanze, onde nacquero, raffreddate le quali, quelle pure raffreddano. Maggiore conſiderazione ſi meritano quelle altre due che verſano ſopra Dante, dell'onor del quale non era il noſtro Torelli men tenero di quello che foſſe della beltà ſua innamorato. Gran cura pertanto ei ci poſe dietro, e quantità di paſſi ne interpretò nuovamente, con animo di comporne una novella edizione, di cui gli parea, e non a torto, che faceſſe Dante richieſta: e veramente i due paſſi del Purgatorio, che in una ſpiegò di codeſte Lettere, fan ſoſpirare agli amatori del gran Poeta l'abito intero, ond'eſſer dovea per mano del Torelli veſtito. Ad un vero amante poi non ſoffre l' animo che gli ſi oltraggi la coſa amata, anche ove incompetente ſembri e da meno chi oltraggia. Uno ſcrittore, com'è il Sig. di Voltaire, che ſpeſſo non ſai ſe dica per dire o per iſcherzare, che mira più al paſſatempo che all' iſtruzione, e che o traſcura o diſſimula la verità, non meritava certamente una riſpoſta ſeria e adeguata, allorchè parla giuſta quello ſtile del noſtro Dante: laſciando ch'ei pure non avea quell'eſercizio di lingua italiana, che per giudicar gli baſtaſſe dell'italiana poeſia. Malgrado ciò, non diede il cuore al noſtro Torelli di comportare una ingiuria, non autorevole è vero, ma però lanciata da bocca di autorità grande, e meritamente, nelle coſe del Guſto, e però quella nell' altra ſua lettera ribattè; la quale gioverà ſempre, ſe non foſſe per altro, a moſtrare vie più, qual conto ſi voglia far de' Franceſi nella bella noſtra letteratura, utile avvertenza in un tempo che molti ſtudiano eziandio quella ne' franceſi libri, e non s'accorgono che parecchj di quegli ſpiriti, ed anche di que' precetti ſon buoni per loro, che a noi o non ſervono punto, o pregiudicano, chiaro eſſendo che le ſcienze ſi rimangon le ſteſſe in ogni nazione, ma che le lettere, diverſamente parlando, ſi muovono ancora e ſi atteggiano diverſamente.

Ma il noſtro Torelli al giudizio accompagnò l' attitudine, e ſe fu Critico eccellente, fu anche eccellente Poeta: molto eſercitoſſi poi nel tradurre, a che portato era naturalmente e dall' amor ſuo per gli antichi, e dalla voglia di giovare ai moderni, moſtrando loro i ritratti di quelle beltà, che sì crudelmente e non meno a torto abbandonano. E ſolea dire tanto eſſer lunge che tal meſtiero s' abbia a tener per ſervile, che anzi vi ſi occuparono ſpeſſo gl' ingegni ſovrani, e ſempre gran conto da' più ſavj ne venne fatto; e nominati alcuni Latini ed Italiani, ricordava eziandio que' due lumi del Parnaſo ingleſe Drayden, e Pope, al primo de' quali non fece men torto la men che buona verſion dell' Eneide, oſcurata poi affatto dal lume di quella di Trap, che onor faceſſero le Favole ſue e le ſue Odi, ed al ſecondo la verſion dell' Iliade, cui niuno tentò levare di ſeggio, non fu men di gloria che il poema ſulla Critica, e quello ſull' Uomo. Voltò il noſtro Traduttore i due primi libri dell' Eneide, il Pſeudolo di Plauto con alcuni Idilj di Teocrito e di Moſco, il Poemetto ſulle nozze di Peleo e Teti, ed il ſecondo Epitalamio di Catullo, ed altre minori coſe; e così aveſſe ripulita come compita avea la traduzione di Teocrito, che però non vuolſi mettere a luce, meno per quello che è, onde onore ne avrebbero molti, che per quello che non ha potuto eſſere, non dovendo del Torelli uſcir coſa non fatta a pennello, e da eſſo medeſimo licenziata. Traduſſe ancora per ſoddisfare a ragguardevole perſonaggio della Inghilterra quella bella Elegia di Tommaſo Gray ſcritta ſopra un cimitero campeſtre, e degna veramente di eſſer tenuta qual coſa antica:

al

al qual propoſito non ſaprei non rilevare una novella teſtimonianza dell' amor ſuo verſo il bello neceſſariamente originato da quel ſuo ſenſo in conoſcerlo ed in ſentirlo. Perciocchè non fu contento veder molto innanzi nella franzeſe e nella ingleſe letteratura; ma leggendo un tratto nelle traduzioni l'incomparabile Romanzo del Don Chiſciotte, parvegli che quegli ſpiriti, quel ſale, quella forza, e diciam pure quella ſpecie di bello perdeſſe troppo in terra non ſua trapiantato, e pigliandone ſdegno, non potè temperarſi dall' applicar ſubito alla lingua ſpagnuola; e non prima ſi tranquillò, che guſtata non ebbe nell'originale la ſaporitiſſima opera del Cervantes, dal quale paſsò ai poeti di quella nazione, e di Garcilaſſo della Vega ſingolarmente invaghì. Non è gran coſa il ſapere più lingue; ma il ſaperle, non per una certa curioſità, non per far poſcia dell' erudito, ma per un deſiderio, e voglio dir anche biſogno di conoſcere le varie ſembianze che dalle varie lingue e nazioni il Bello ſempre uno nella ſua eſſenza ritragge, è indizio certo d' un' anima nata fatta per eſſo, ed alla più interna conoſcenza di lui naturalmente e da inſuperabile impeto traportata. Ma venendo alle traduzioni, il noſtro Torelli avviſava eſſere la traduzione un ritratto che non vuolſi apprezzare, ſe non quanto rappreſenta l' originale; e però non ſolamente i concetti, ma dover ritenerſi, quanto altri può e permette eleganza, le forme ancora, dalle quali dipende il togliere o aggiungere, l'inſiorare o sfiorare, il metter luce nell' ombra, che non pare minor peccato che il metter ombra nella luce; e va diſcorrendo. Se così debbaſi, o altrimenti, cioè con maggior libertà adoperare, è quiſtion grande, e che probabilmente non ſarà mai diffinita, perchè non vedrem mai traduzione probabilmente, che o nell' un modo camminando o nell' altro affatto aggiunga ſuo teſto, e quindi ſervir ci poſſa di modello. Sembra però che dir ſi poteſſe così: gli uomini di guſto ſottile in pittura prepongono le buone impreſſioni in rame non ſolo alle carte fatte coll' arte , *Che alluminare è chiamata in Pariſi* , come dice Dante , e molto più alle ſtampe colorate del le Blond, tentativo ancor molto dalla ſua perfezione lontano ; ma eziandio alle copie ſolite de' pittori le preferiſcono , veduto che abbiano o non veduto l' originale : perchè dall' una parte queſte copie mandano troppo altro colorito che quello che io cerco, e dall' altra le ſemplici ſtampe dan meglio il diſegno , e l' occhio in nulla ci offendono . Ora i concetti non ſono il diſegno , e le forme il colorito d' una poeſia? il qual colorito, anche ove nelle verſioni molto inerenti non altro più rimaneſſe che un chiaroſcuro, ſembra però che queſto preferir debbaſi alle falſe e bugiarde tinte d'una traduzione , che trasforma e ſviſa con quelle i concetti ancora, e l'indole ſempre meno e il carattere dell'autor ſuo rappreſenta . Ma comunque ſia e di queſto confronto , e della ſtrada dal noſtro Volgarizzatore tenuta, noi ci contenteremo di dire ch' ei fece di ottimi paſſi nella via, qualunque la ſiaſi , da lui ſcelta; il che baſtando alla lode ſua , baſterà , credo, per la ragione medeſima al mio diſcorſo.

Non era però egli di coloro , che fan traduzioni , perchè non bene creando verſeggiano, e che per queſto nè ben pure il più delle volte traducono: ma quando a quando anche di per sè camminava , e de' ſonetti particolarmente ſi compiacea, cioè d'un componimento, ove il più timido arbitrio non ſi concede, ove non ſi perdona una macchia , un neo, e colpa non cade che grave non ſia e irremiſſibile. Purgatezza adunque di lingua , atteggiar tutto con grazia o muovere con robuſtezza, melodia accomodata, e quella ſua compagna men conoſciuta , benchè indiviſibile , l' armonia ; ed in oltre la diligenza, il non temere le caſſature, l' amor della lima: coſe tutte che non mancavano al noſtro Poeta, e che però gli aprivano queſto campo de' Sonettiſti, quanto più anguſto tanto più difficile a farvi dentro ſua pruova. Dal che ſi vede com' egli era in punto di ottener quello che ſembra il più arduo in poeſia, cioè di piacere ſenza dir nulla; non ch' egli, dotto com'era, non ſapeſſe arricchir di coſe i ſuoi verſi, e fatto aſſai volte non l' abbia; e così non dico che generalmente non ſien da eſtimarſi ſopra tutto que' componimenti che alla lucentezza de' fiori la ſoſtanza contemperano delle frutta; ma ſi dirà però ſempre eſſer uno de' maggiori sforzi dell' arte l' adeſcar l' animo ſenza occupar l' intelletto, coſa fuor di confronto più difficile, che queſto il far ſenza quello, perchè un penſamento acuto o profondo può cader in mente d' ogni uom bennato, ma uſcir non può ben veſtito e canoro che dalla bocca del vero poeta. Di fatti l' eſporre, diceva il Torelli, ſolamente in verſi ed in rima sì facili a farſi ed a trovarſi in lingua italiana quello che ogni colta perſona parlando eſpone al biſogno nell' umano convitto, o anche quello che nella illuſtrata età noſtra ciaſcun può trarre dal grembo della filoſofia, non è egli un comperarſi a troppo buon prezzo il diploma di cittadinanza in Parnaſo? e per queſto veggiamo in Italia così deſolante inondamento di poeſie, cioè dopo che a traſcurar cominciosſi il vezzo della eſpreſſione, ed il fiore dell' armonia. Quindi la corruzione, ſeguitava il Torelli, d' un' arte così difficile e ad un tempo così confidenzialmente trattata, quindi i falſi giudizj, e la lode ed il biaſimo ugualmente male rivolto; e di vero non maraviglia: che per poco che altri tenga uno ſpirito gentile e chiaro comprende toſto la forza d' un penſamento; ma quanto pochi non ſono, anche tra poeti ſteſſi, coloro che intendano la vera poeſia e quelle infinite e minute, nè però meno importanti, differenze rilevino di ſtile e di numero, primo coſtitutivo dell' arte, quali non giunge ad annoverarle tutte il filoſofo, e che tanto volentieri ſi fan ſentire dal cuore, quanto mal ſoffrono venir diſputate dall' intelletto? Perſuaſo pertanto il noſtro Poeta, che rariſſimi anche tra gli artiſti giudicar poſſano di queſt' arte, della quale al contrario non che gli artiſti, ma ciaſcuno vuol dar giudizio, di pochi lettori, come dee fare con Orazio ogni ſavio, ſi contentava: ed io credo che mancandogli talora i ſuoi giudici, ei s' immaginaſſe dover preſentarſi al tribunale di Dante, o del Caſa, e quindi faceſſe ogni che, onde partirne aſſoluto; diſſi Dante ed il Caſa, perchè di queſti compiacevaſi il più, ammirando nel ſecondo ſingolarmente la bellezza del numero e pel rompimento de' verſi e per altri riſpetti sì grave e forte e variato; e nel primo, oltre queſte coſe, la proprietà, e il ſugo e nervo del dire, e quella celerità ed evidenza maraviglioſa in rappreſentare e dipingere.

E qui mi piace di aggiunger quello, che già dalle coſe riferite può comodamente conghietturarſi, e che finiſce per avventura di bene caratterizzarlo: dico che in quelle facoltà ancora, ove erudita non fu la mano, erudito però ſempre fu l' occhio; intanto che d' ogni liberale arte e meccanica dilicatiſſimamente ſentiva ed aſſai maeſtrevolmente diſputava. Certo non era pittore tra noſtri, che degli ſtranieri, non avendo viaggiato, aver non potea gran notizia, di cui egli non ſapeſſe rilevar ſubito il guſto e l'anima; e non ſolamente nella ſcultura ed architettura, ma in qualſiſia ſuppellettile e arneſe domeſtico ſubalternato al diſegno, era così ſottile e difficile, che non potea comportare una forma men ch' elegante, ed una eſecuzione men che preciſa: e particolarmente, com' uom letterato, delle volgari impreſſioni in rame, e di ciò tutto che l'arte tipografica diſonora, grazioſamente ſdegnavaſi. La quale ſcontentezza e difficoltà anche nelle picciole coſe, tanto è lunge che picciola ſia in ſe medeſima, che anzi conſiderazion grande ſi merita, e ſempre meglio dimoſtra quel ſenſo in ogni coſa di perfezione, che a formar viene di lui col più vero carattere l' elogio ancora più bello. E perchè non foſſe più coſa, ch' ei non aveſſe, ſe non guſtata, aſſaggiata almeno o lambita, volle ſapere alquanto di muſica, imitando per queſto pure i ſuoi cari antichi, ed il Galilei che gli era caro quanto gli antichi, i quali a tutte le diſcipline (che le coltivavano tutte) univan pur queſta: e però non contento egli di aver l' orecchio muſico e l' anima, che tale in lui di neceſſità eſſer dovea, volle averne anche l' intelletto, e come vago ch' egli era d' ogni bell' arte, ed eziandio come matematico, tra gli ſtudj del quale può riporſi la muſica, e ſotto il quale aſpetto io ritorno ancora per poco a conſiderarlo.

E' noto non eſſerci nella fiſica teorema più fecondo di quello della compoſizione di due moti, ſecondo i lati d' un parallelogrammo, in un ſol moto, giuſta la diagonale di eſſo: nella meccanica particolarmente l' incontriam ſempre, e l' aſtronomia ſteſſa certo è che ad alcun altro più non appoggia. Inſtrutti di queſto gli uomini prima dalla eſperienza, *fonte*, come ſcriſſe il Poeta filoſofo, *ai rivi di noſtre arti*, ed applicata che fu poi la fiſica alla matematica, cercoſſi d' ornarlo anch' eſſo di geometrica dimoſtrazione: ma in un vero altronde ſicuro dilicati più che tanto non furono i Matematici, e paghi ſi tennero di quelle dimoſtrazioni, che d' eſſere così dette non meritavano. Ma non così l' Autor noſtro, che non era di tanta condiſcendenza. Il perchè amico ſempre fedele ch' ei fu degli antichi, ad eſſi ricorſe, ſperando riceverne quella riſpoſta, di che i moderni inutilmente prima avea domandato. Ma la ſperanza gli andò fallita; nulla trovando da vantaggio che la propoſizione di Ariſtotele, e quella di Gemino, riferita da Proclo, ambedue troppo limitate, e quella in oltre del primo ſopra la baſe vizioſa d' un inconcludente raziocinio inalzata. Non rimanea dunque che tentar di per ſè nuova e rigoroſa dimoſtrazion geometrica; e veramente con aſſai favorevoli auſpicj tentolla in quella operetta latina ſul moto compoſto non ha molti anni pubblicata, potendo anche ſervir di pruova al felice riuſcimento l'eſſerſi nel penſare incontrato col celebre Ab. Friſi, che ſi era alla ſteſſa ricerca contemporaneamente rivolto. Le dimoſtrazioni dell'uno e dell'altro ſono in fondo le ſteſſe, ma i modi di ſtabilirne i principj, di combinarli, e di dedurne le conſeguenze diſtinguono i due ſapienti; e forſe rimane in dubbio, ſe quel teorema reſti più grato al trattamento ſpedito dell' Analiſta frettoloſo, o alle carezze più lunghe e quindi più luſinganti del ripoſato Geometra.

Queſto fu l' ultimo lavoro ſuo in geometria; ma prima avea già compoſto due opere tuttavia inedite, nell' una delle quali un ſuo Trattato contienſi di proſpettiva. Così non è vero, che nuovo ſia queſto campo dopo le fatiche degli s' Graveſande, dei Tailor, degli Zanotti ſuccedute a molte altre più o men fortunate ſecondo i tempi e gl'ingegni, che pare anzi niuno ora mai più deſiderarne i trattati; ſe non che nuovo può dirſi che fatto è il noſtro dalla nuova maniera, con cui è condotto, non avendo egli ſolamente ſvolto colla ſolita cura il ſolito filo ſintetico, ma impoſto eſſendoſi ancora di non ſervirſi che dei pochi ſemi gettati ſopra un tal campo da Euclide. Queſta opera verrà certo prodotta in luce, ma priva anderà di un grande ornamento, di cui l'Autor ſuo fregiata l'avrebbe, vivendo. Perciocchè avea egli fermo nell' animo di accompagnarvi un ragionamento, in cui ſtabilire anche meglio, e con perfetta evidenza, che la proſpettiva ottimamente dagli antichi fu conoſciuta; ſdegnato ei pure, com'era ben naturale, contra il maggior nimico agli antichi, e nimico ſuo proprio per conſeguenza, il Sig. Perrault, e non ben contento di quanto in loro favore l'Ab. Sallier e il Conte di Caylus, e poi il Conte Algarotti e il Sig. Dutens hanno ſu tal materia indicato. E certo che la diſſertazion critica ſtata non ſarebbe men bella della geometrica trattazione, potendoſi dire di lui, che fu eruditiſſimo tra i Matematici, e matematico, s' io così poſſo ſpiegarmi, tra i Critici. Così le diſcipline tutte s' uniſcono inſieme e s' ajutano, ma però ſolamente in capo di chi ſappia cambiarne le veci diverſe, e regolare gli uffizj di ciaſcheduna, e però tutte le conoſca bene, ed in oltre dotato ſia d' una ſicura e generale ſquiſitezza di ſenſo.

Ma queſta unione in lui e congiura amichevole di facoltadi meglio anche potè dimoſtrare coll' altra ſua opera, dico colla edizion di Archimede, che vedrà il giorno ella pure, e certo per non più abbandonarlo, e di cui forſe non ſarà diſcaro che intanto qui ſi premetta qualche notizia. Rivoltoſi dunque ad emendare l' intero teſto dell' autor ſuo, cominciò egli dal leggere e ponderare la edizione di Baſilea dell' anno 1544, la quale traſcritta per Tommaſo Venatore da un antico codice così fedelmente che intatta ſerbò la ſcrittura anche ove corrotta manifeſtamente appariva, può quindi tenerſi in conto di quello ſteſſo codice antico. Il perchè vedeſi ſe di mancamenti e di errori ridondár dee, e ſe meſtieri v' abbia d' ingegno, e d' opera critica. Ora tutti queſti ſupplì egli e correſſe parte coll' ajuto d' un codice della Biblioteca di S. Marco, e parte della traduzione fatta da Giovanni Cremoneſe per comando del Pontefice Niccolò V., la quale comechè barbara, pur da codice diverſo da quello ritratta, potea guidarlo, ove quello lo abbandonava. Abbandonato poi dall' uno e dall' altra, come gli accadeva ſpeſſiſſimo, ebbe ricorſo alla conghiettura o ſua propria, o de' valentuomini che il precedettero, quali ſono il Commandino, il Rivalto, il Barovvio, ed il Valliſio, a cui egli più debbe che a ciaſcun altro, maſſime nelle opere della *miſura del cerchio*, *e dell' arenario*, mettendo a piè di pagina i paſſi de' codici, onde ſia libero a tutti il giudizio di quelle conghietture. Emendato il teſto, e le opere ſecondo il tempo della loro naſcita riordinate, ne intrapreſe la verſione latina renduta neceſſaria dalla imperſezione di quelle del Cremoneſe e del Commandino, e compiuta con quella eſatta eleganza ch' era ſua propria, e tanto più bella, quanto a carpirſi difficile e per la materia, e per la lingua d' un popolo che negletto avea quella ſcienza. Nè qui riſtettero le ſue fatiche; ma poſe la ſteſſa cura eziandio intorno ad Eudocio d' Aſcalona, che ſcriſſe un comento ſopra i due libri della *Sfera e del Cilindro*, e d' altre opere d' Archimede, comento per altro utile più che neceſſario a chi prima letto abbia Euclide ed Apollonio, cioè fatto come ſi debbe al parer del Torelli e de' ſavj lo ſtudio della geometria; e però non ſupplì egli, ove manca il comento di Eudocio, come alcun forſe potrebbe deſiderare, e dimoſtrò ſolo alcuni teoremi che Archimede propone, e di cui perdute ſi ſono le dimoſtrazioni. E forſe gli coſtò più la reſtituzione di quello che non di queſto, perciocchè a quello veruna medica mano prima della ſua non s'era accoſtata. Finalmente ſi chiude il lavoro colle opere meccaniche, ſecondo che di ciaſcuna fanno menzione gli antichi ſcrittori. Precedelo poi una dottiſſima Prefazione, ove in un colla vita d' Archimede ſi dà contezza delle ſue macchine, delle quali intento, come narra Plutarco, alla ſola ſpeculazione, non degnò di laſciar memoria in iſcritto; ſi prova eſſere ſuoi i due libri delle *coſe portate ſul fluido*, benchè ſolo ne reſti, perduto il greco originale, un' antica verſion latina; ed al contrario ſi moſtra che male aſcriveſi a lui il libro dei *lemmi* conſervatoci in arabo, ma che nondimeno avrà luogo coi due ſopraddetti nella edizione. In oltre più coſe opportune vi ſono ſparſe, e belle ricerche vi ſi fanno ſpettanti ad erudizione, alla greca lingua, ed alla ſcienza matematica; come qual foſſe il metodo veramente, onde Archimede ſcoperſe quello che coll'ajuto del calcolo integrale trovaſi ora, e ſe mai fu colla brevità portato anche la oſcurità dagl'

indiviſibili

indiviſibili del Cavalieri, che usò di principj per avventura meno che lucidi; ſe ricevute foſſero dall' antica ſeverità le infiniteſime quantitadi, ciò che pur vorrebbono alcuni; ſe Archimede ammetteſſe, ciò che dicono altri, que' ſuſſidj per l' arte analitica, che i moderni Geometri ſi procacciarono; quanto nel paſſato ſecolo per nuovo ſi diede che ſtabilì Archimede ſono due mille e più anni, e quanto a lui debbeſi non men riguardo alla fiſica che alla geometria; e conchiude, che gli antichi s' ebbero gli ſteſſi metodi quaſi, che uſiamo noi, ſe non quanto ſopra di ſondamenti più ſodi e più ſicuri gli fabbricarono. La dotta Inghilterra, che ſola mantiene il guſto tuttora de' ſani ſtudj, ſembra diſpoſta a pubblicare queſta opera Veroneſe per inſinuazione de' Signori Strange, Stanhoupe, e Stormont commendabiliſſima: e dalla fiorente Univerſità di Oxford, onde già uſcirono l' Euclide di Davide Gregory, e l' Apollonio di Edmondo Allejo, l' Archimede anche di Giuſeppe Torelli ſperaſi che uſcirà, degno certamente della immortale compagnia, ed attiſſimo a far vedere che ſe l' Italia manca talora di buoni inſtituti, non mancano però mai gl' ingegni buoni all' Italia.

Ed ecco le opere tutte, così di varia letteratura come di ſcienza, laſciateci dal Torelli. Che molto egli abbia operato, maſſime ſe alla finitezza miriam de' lavori, che tanto più vale della lunghezza, non credo poter eſſere in dubbio ad alcuno: nondimeno mi convien dire che manco operò egli di ciò che avrebbe potuto, il che ſe nulla fa veramente all' utilità pubblica, fa però molto alla privata ſua gloria, e ſe non ſoddisfà il popolo che rozzo non giudica che dagli effetti, può nondimeno il Filoſofo che le cagioni ancora diſamina ſoddisfare. Or che ſi vuole ch' io dica? la rettitudine ſteſſa della ſua mente, la fina tempera ſteſſa dell' animo ſuo fece, convien crederlo, che più innanzi ancora non procedeſſe: tanto gli è vero che ſiam ſempre uomini, e che le doti eziandio più alte e divine prendono ſempre del baſſo e terreſtre che proprio è di queſta noſtra natura. Quel ſenſo dell' ottimo in ogni coſa più volte da noi ricordato gli facea toſto comprendere le difficoltà tutte che in ogni coſa s' incontrano; e quindi la perfezione all' occhio di lui era in aſſai più ſublime ed inacceſſibil luogo, che all' occhio degli altri, ripoſta. Conformato a tal modo, pigliava tra mano le opere ancora più celebri, e vedeva che quanto più rilevanti e più lunghe, tanto erano ancora più gremite di errori e più teſtificanti la umanità, quindi anche per ſe ſteſſo oltra ciò che d' altra parte gli ſi conveniva, temea, e però il veder più era cagione che oſaſſe meno; nè ſi commetteva mai alla fortuna, che pur eſſa ha gran parte nel mar letterario, e ſalva talora chi per troppo ardire all' incontro meritato s' avrebbe il naufragio. Aggiungaſi in oltre che la preſente anarchia nel regno delle lettere, corrotte per conſeguenza, cadere gli facea l' animo e quindi la penna; onde mi dicea ſpeſſo che applicava per erudire e dilettar ſe medeſimo, e curavaſi meno di farſi noto al comune de' letterati, cui ſapea non dover piacere i ſuoi parti, veggendo approvarſi da loro ciò ch' ei non potea che diſapprovare, e quindi la lode più ancor del biaſimo paventando. E però ſolamente o per regalare un amico, o per compiacere a qualcuno, o per altra civil convenienza e riguardo alcuna coſa tratto tratto mandava a ſtampa, che però non era che un ſaggio di quel che potea maggiore aſſai di quel che moſtrava, ma che ancor tale paleſa ai giudici buoni quel più che fatto avrebbe volendo, perciocchè l' occhio erudito vede il danzatore da un ſolo paſſo, e del muſico s' accorge in due note l' orecchio dotto. E tutto ciò intendaſi delle ſue proſe di bella letteratura e di filologia; nel che per vedere ſe potea più, baſta eziandio conſiderare il guſto ſuo nello ſcrivere, la ſua perizia delle lingue antiche e moderne, la ſicurezza della critica, e l' iſtancabilità nello ſtudio. Riguardo alla poeſia, ſentiva io ſteſſo di molti lagnarſi che facea poco, e ſolamente uſcía a quando a quando con qualche ſuo breve componimento: lagno ſingolare in vero e grazioſo! quaſi che l' Italia ſcarſeggiaſſe di tal merce, e che anzi non ſia neceſſaria nelle più dolci e fine coſe per appunto una certa economia e ſobrietà. Che ſe maggior numero di verſi avrebbero dal Torelli deſiderato per una particolare e maggior beltà che in quelli ſcorgevano; quale più bello elogio poſſo io mai fargli di queſto? di fatto dicaſi pure che un tal deſiderio è pruova ſempre di merito, perchè niuno domanda verſi ai Bavj ed ai Mevj, e queſti, per poco ch' e' facciano, il troppo ſempre ſaranno. E per verità ſe indubitato è, che ben fare, non il far molto, ſia la verace miſura dell' eccellenza, indubitatiſſimo è queſto poi nella poeſia: e ottimamente fu ſcritto da quel maeſtro, che un ſonetto ſenza mancanze val più che un lungo poema. Ma forſe quanto alle matematiche, di cui formò egli lo ſtudio ſuo più grave ed aſſiduo, diraſſi con più color di ragione che le ſue ſtampe non riſpoſero totalmente all' applicazione di lui ed all' altrui aſpettazione, che potea curar meno le minori coſe, e darſi maggiormente alle grandi, e che dopo le tante viſite e lunghe agli antichi dovea ſtarſi un po' più, che fatto non ha, co' moderni, ſuperbi eſſi pure di bei tentativi ed utiliſſimi ritrovamenti. Quanto al curar meno le minori coſe, egli credea veramente che in geometria così, come in poeſia, nulla ci foſſe di piccolo ed indifferente, e che poi ſi poteſſe attendere a quelle ſenza pregiudizio delle maggiori, onde anzi la maſſima lode così nel Letterato, come nel Miniſtro, o nel Capitano; e ciò credendo, a me pare che ben credeſſe. Riſpetto poi alle coſe grandi, io confeſſo che benchè pur queſte trattato egli abbia, potea però trattarle ancor più, potea maggiormente tentare, oſare, maneggiar più, ſenza danno della ſua ſinteſi, la ſola chiave, che abbiamo adeſſo, de' teſori novelli, l' analiſi algebraica, ciò tutto è vero; ma io lo ripeto, è il popolo groſſo ed ignaro che ſolamente giudica dagli effetti, perchè in ſe ſteſſo non mai conſidera l' uomo. Laſciamo a lui dunque il peſare le coſe e gli uomini ſecondo l' utile che alla civil compagnia ne deriva, abuſo più che mai grande oggidì, ed abuſo che porta oltraggio graviſſimo alla virtù, come non foſſe bella e riſplendente in sè medeſima, ma ſolo per que' raggi di utilità, che ſchizzano d' eſſolei. Io non dico che da ſtimar non ſia ſopra gli altri quel letterato compagnevole e pubblico, per così dirlo, e accademico, ch' s' argomenta con novelle prove di renderne più agiati e meno infelici; ma perchè ancora non loderemo l' uom ſolitario e privato e lontano da ogni accademia, che adorna ſe medeſimo di tutte le ſcienze, e queſte coltiva a quel modo che più gli aggrada, modo però che non eſige minore chiarezza, acume, e forza d' intendimento? e veramente dietro la falſa regola dell' utilità ciaſcun vede che ſarebbe più da pregiarſi il muratore che n' alza la caſa, che non il dipintore che de' ſuoi quadri ne l' orna, come da un gran Savio fu detto, e come di tante altre facoltà ed arti può dirſi. Ma laſciando anche queſto, io vi dico che un letterato, come fu il noſtro Torelli, è anche di gran giovamento al vero progreſſo delle ſcienze, ſebben non appaja così toſto la parte ch' ei v' ha; perciocchè nel tempo che altri le avanza, è non men neceſſario chi ſappia regolarne l' avanzamento, e con quel guſto che proprio è della ſcienza tenga in cammino quelle dottrine che nel lor corſo potrebbero traviare; ed io lodo quel filoſofo che quaſi vento forte e propizio la gran nave del ſapere ſpinge oltra, ma non loderete voi l' altro che al timone ſta della nave e il difficil corſo ne regge? ed io ſo bene che queſti non opera ſenza l' operare di quello, ma quegli la ſpingerebbe al precipizio e alla morte ſenza la guida e l' avvedimento dell' altro. In oltre fatto e diſpoſto com' era, non potea neceſſariamente altro da quello riuſcire. Perciocchè ciaſcun ſa che promovendo una ſcienza è neceſſario aſſai ſpeſſo di cominciar quello che non ſi può compiere, e di laſciare alcune coſe meno perfette ai poſteri che le perfezionino poi: ma il Torelli, che quanto diligente ed eſatto era, tanto, e a ragione, dell' eſattezza e diligenza altrui diffidava, non avea cuore di laſciar creſcere nell' altrui mano i proprj ſuoi parti, e però amava meglio di fabbricare un palagio ſolo ed ornarlo in ogni ſua parte e compirlo, che i fondamenti gittare d' una intera città, e poi al lavoro e alla diſcrezione de' poſteri abbandonarla. Ed in oltre ancora, non ſembra egli che preſtato abbia utilità e comodo grande ai matematici col preſentar loro purgato e netto, e meglio parlante una lingua notiſſima, il padre di que' trovati, in promovere i quali, come dice il Walliſio, gloriaſi più l' età noſtra, Archimede? Ma io già temo non venga ſoſpettato di me, quaſi m' affatichi troppo a cercare gli argomenti della lode in un tempo ch' ei non abbiſogna veramente di tale anſietà; e però dico ſolo e non più, che gli fa elogio eziandio la coſtanza ſua in non aver punto ceduto al tempo così nella grave come nella gentile letteratura, ſerbando una ſanità di guſto nel generale contagio maraviglioſa; la qual reſiſtenza contra il tempo, che i più forti anche ſtraſcina, non può derivare da altro che da quel ſuo naturale e colla buona diſciplina perfezionato ſenſo dell' ottimo, da quell' armonia e temperatura di animo bene educato ed ottimamente nodrito, in una parola dal vero guſto, che gli fu ſempre guida fedele nella difficil via delle lettere.

Quello che abbiam detto come letterato, dir poſſiamo anche come uomo ſolamente; perciocchè io crederò ſempre che un uomo nato ed allevato alla verità e alla bellezza abbia ad eſſere neceſſariamente virtuoſo, e che però quello che ben lo guida nel cammin delle lettere, deggia ben anche guidarlo in quel più difficile della vita, ciò che in poche righe a dir reſta. Nè vi faccia ombra il vedere, ſpeſſo pur troppo, alla filoſofia ed alle arti la turpitudine congiunta ed il vizio; perciocchè rariſſimo è quell' amor verace ed univerſale del bello di cui vi parlo, amore così ben veggente, che toſto coglie le relazioni tutte ed i vincoli del fiſico col morale, della ſcienza colla ſapienza, e così potente, che lega toſto con quella mirabile e direi più che aurea catena, da cui tanto impoſſibil coſa è ſcioglierſi poi, quanto è coſa rara venirne una volta annodati. E come era pari nell'anima del Torelli alla rettitudine e all' armonia, onde il vero guſto per le ſcienze gravi, la fina tempera e delicata, onde il ſapor vero per l' arti belle, così riguardo alla qualità prima fu ſempre nimiciſſimo d' ogni diſcordanza nella vita, e di quanto anche per poco turbaſſe l' ordine della civil compagnia, e riguardo alla ſeconda, fu dolce ed umano di affetti, ed ebbe quella gentilezza di cuore, che ſparſa ſulle opere della vita rende nell' uomo più amabile la virtù, come ſulle opere ſparſa dell' ingegno rende più amabile la ſcienza nel letterato. E veramente come la perfezion letteraria par riſultare dalla colleganza del bello ſpirito e del forte intelletto, delle lettere e della ſcienza; così può dirſi che la perfezion civile riſulti dalla colleganza de' gentili affetti e degli oneſti penſieri, della ſenſibilità e della virtù.

Fino da' ſuoi più verdi anni operò coſa che ben merita di eſſere ricordata, e che moſtra, che ſe premature furono le ſue lettere, furono ancor prematuri i coſtumi ſuoi. Perciocchè ſendo tuttora in Padova a ſtudio, compoſe inſieme e riunì due celebri uomini, il Facciolati ed il Volpi, d' ambo i quali amico era, e tra cui, come pericolo è dei correnti alla ſteſſa meta, diſſidio e nimiſtà vide ſorta; egli giovinetto due quaſi vecchj, egli ſcolare due cattedratici. Ed una lode di ſimil fatta, ma più bella, perchè in occaſione aſſai più difficile e dura, riportò egli molti anni dopo nella ſua patria, quando contribuì di tanto a ſopire quelle diſcordie che tra i Nobili di queſta città non aveano sì debile e tepida fiamma levato.

Quanto alle amicizie, due ſole, tra le molte ch' ei n'ebbe, io ricorderò: quella col dotto ed elegante Abate Sibiliati, amicizia di ben quaranta anni, e nondimeno coltivata ſempre, malgrado l'aſſenza, coi vivi traſporti del tempo primo; e quella coll' ornatiſſimo Cavaliere Marcheſe Ottavio di Canoſſa, amicizia ch' io qui ricordo, non perchè ei foſſe uno de' più ragguardevoli Signori d' Italia, ma perchè dopo il giorno della ſua morte nacque nel Torelli quella fiſica indiſpoſizione, che a poco a poco cambiata in morbo, lo traſſe finalmente al ſepolcro. Ed altro non aggiungo; che i cuor gentili m' intendono, e i rozzi io non curo. Di me non parlo; tanto più che non ſo veramente, s' egli mi foſſe o amico, o padre più toſto: queſto ſo bene che il padre mio vero mi raccomandò poco prima della ſua morte al Torelli, e però mi piace notare a debita lode dell' uno e dell' altro, che io certo non potea eſſere ad altre migliori e più paterne mani raccomandato. Laſcio parecchj altri amici ch' egli ebbe ed eſtimatori grandiſſimi in Italia e fuori, e maſſime tra gl' Ingleſi, nazione in ſingolar pregio e oſſervanza da lui avuta; e due nominerò ſolamente, anche per una certa analogia tra loro di carattere e ſtato, il Conte di Firmian, e Milord Stormont, ambidue miniſtri ad altre Corti prima, indi preſſo la propria, ed ambidue Mecenati veri delle arti, perchè diraſſi di loro che alla munificenza accoppiarono le cognizioni, ed a queſte il guſto, ſenza cui poco vagliono le cognizioni, e meno ancora la munificenza. Laſcio anche l' amor non comune che portò ſempre alla madre, e la bontà non ordinaria che ſempre tenne ai domeſtici: alle quali doti del gentile animo quelle a maraviglia unì dell' oneſto , antica ſeverità nel coſtume , modeſtia nel culto eſterno , e non minor temperanza nell' interno ſuo trattamento, fermezza ne' propoſiti buoni , giuſtizia nelle azioni la più ſcrupoloſa , filoſofia criſtiana in un detto ; la quale unione di tali doti ed alleanza a formar viene quella civil perfezione che abbiamo ſopra indicato .

Ma eziandio nella civile ſua vita, come l' uomo è ſempre lo ſteſſo, dobbiam condannare ciò che nella vita ſua letteraria ripreſo abbiamo; perciocchè ſiccome in queſta non operò tutto quello che avrebbe potuto, così lo ſteſſo fu in quella, ricuſati avendo tutti quegl' impieghi che ſpontaneamente in patria e fuori gli ſi appreſentarono . Il Conte Criſtiani Governatore allora di Milano deſiderava di averlo preſſo di sè, e Marcantonio Priuli patrizio Veneto lo voleva preſidente degli ſtudj in queſto Militare Collegio , che venne allora giuſta i conſigli del Torelli riordinato, ed a tal carico invitato l' avrebbe il Senato ſteſſo con aſſai largo ſtipendio , e col titolo di Colonnello , coſa di cui non può darſi ſotto a queſto cielo la più degna di eſſere vagheggiata. E da Padova ancora, per leggere in quella Univerſità , e da Mantova per eſſere Segretario di quell' Accademia, invito più volte e richiamo gli venne fatto. Ma ricusò egli ogni coſa: o foſſe in grazia di quella ſua fina e acuta prudenza, che ſi può chiamare il guſto delle opere della Morale, in grazia io dico di quella prudenza , per cui vedeſſe le difficoltà tutte , e temeſſe non poter quello che avrebbe potuto, come gl' incontrò nella letteratura, o foſſe che allo ſplendore dell' oro, e all' inganteſimo dell' ambizione ei preferiſſe i piaceri puri e coſtanti dell' ozio letterario, della vita privata, e della libertà . E veramente riguardo al primo e le perſone che lo invitavano, e più la deſterità ſua, in altro ſperimentata, promettea tutto anche per le coſe maggiori, come ſi diſſe di lui

nel

nel fatto delle lettere, e riguardo al ſecondo, ſe dall' una parte non volle più ancora impiegarſi a vantaggio degli uomini, ſeppe dall' altra però vincere l' amabilità delle ricchezze, e la tirannia della vanità, alla quale ſpeſſo, non men che a quelle, vien dato il nome di amore dell' util pubblico. Nondimeno noi condanniamo in queſto il noſtro Torelli, preferendo le virtù morali che ſtanno tra gli uomini a quelle che vivono nella ſolitudine, così veramente però che ſi conceda non eſſer queſte men belle in ſe ſteſſe, anzi più eſſerlo ancora, perchè ſolitarie conſervan meglio quella purezza, che alquanto imbruna tra gli uomini nel tempo ſteſſo, che a loro è di utilità: come per tale riſpetto il letterato pubblico abbiamo al privato antipoſto, benchè ſembrar poſſa più bella nel bello intelletto la ſcienza ſolitaria, ſiccome quella che lontana dai pregiudizj delle ſcuole e delle accademie, non ſoggetta alla moda ed alla corruzione del guſto, più aſſai facilmente pura ſi conſerva ed intatta.

Queſt' ozio erudito, queſta vita libera e chiuſa eran dunque le ſole delizie ſue; non così però che ſuggiſſe la converſazione, ma non parea dilettarſene, ſe non quanto con perſone uſava di ſtudio, e di coſe di ſtudio s' interteneva. Nè gli mancavano di bei motti, maſſime ove cadeva ſulle moderne coſe il diſcorſo, contro le quali parve procedere veramente alquanto più là che non ſi voleva, come procedette forſe anche troppo in favor delle antiche: benchè la ſteſſa conoſcenza ſua degli antichi tanto profonda vaglia non poco ad eſcuſarlo. Colui che Archimede intenderà bene, dice il gran Leibnizio, ſtimerà molto meno le ſcoperte de' moderni più rinomati: e chi ben conoſce, mi ſi permetta l' aggiungere, un Omero, un Tucidide, ed un Demoſtene; un Virgilio, un Salluſtio, ed un Tullio; un Longino ed un Quintiliano; un Dante ed un Machiavello; è forſe condannato, convien compatirlo, a non guſtar più che tanto i moderni ſcrittori ; e così vien meno ſorpreſo dalla moderna filoſofia chi ſa vederla e riconoſcerla in volto all' antica. Che poi un po' troppo a disfavore ſentiſſe degli oltramontani, e ſingolarmente de' Franceſi in fatto di bella letteratura, è men da ſtupirſene , mirando alla molta ſua conſuetudine e familiarità col Marcheſe Maffei; ſoſtenuto avendo queſt' uomo grandiſſimo , ma ſpeſſo dall' amore, per altro così laudevole, della ſua nazione ſignoreggiato troppo, che è meſtier noſtro la poeſia ed oratoria dai Greci e dagli antichi Italiani eſcluſivamente ereditato.

Ed eccomi giunto a quel termine colle parole, a cui giunto era colla vita il Torelli , che già mal diſpoſto da qualche tempo, e d' una ſalute fluttuante ed ambigua, fu in ſeguito preſo da morbo acuto e violento, onde fu tolto di vita li 18. Agoſto dell' anno 1781. ſugli anni 59. dell' età ſua . L' amico e parente ſuo Signor Alberto Albertini , uomo di ſapere e d' ingegno, bel monumento con buſto in marmo gli ha fatto inalzare nella Chieſa di S. Anaſtaſia , ove fu ſepolto ; queſt' Accademia Filarmonica , di cui era membro, tener gli fece pubblico Elogio e ſolenne; e queſto Capitolo , la cui Biblioteca laſciò erede de' libri ſuoi, di bella memoria egli pure volle onorarlo : e penſava di far lo ſteſſo il Comune di queſta città , alla quale mi do libertà di ricordare in queſte ultime righe ſcritte per lei , che nulla le proccurò mai tanta lode, come l' aver poſta al Marcheſe Maffei una ſtatua, e che il poſſedimento d' uomini grandi, de' quali è più copia laddove s' onorano , rende con uſura quell' oro , che la fabbricazione fa ſpargere d' un monumento .

ELOGIO

DI TOMMASO PERELLI

Scritto

Da Monſignor ANGELO FABRONI.

NEll' intraprendere l' elogio di Tommaſo Perelli Pubblico Profeſſor di Piſa abbiam creduto di render giuſtizia al merito d' un Filoſofo, le ceneri del quale non ſono ſtate riſpettate dall' invidia, che non contenta di ferire i vivi, ſi compiace egualmente, ſecondo che l' eſige il ſuo intereſſe, di lacerare i morti, o di caricarli di ſoverchie lodi. Il pubblico ci perdonerà queſto sfogo, che non può diſpiacere ſe non a quegl' ignoranti, che non conobbero il merito del Perelli, o a quei ſemidotti che ebbero intereſſe di deprimerlo. Nacque egli in Firenze nel 1704 da Bernardino Girolamo Perelli e da Settimia Cherici di Bibbiena. Il padre di lui, nato in Premalcore piccolo caſtello della Romagna, venne in Firenze per eſercitarvi la profeſſion d' Avvocato, e aveva sì gran reputazione d' uomo dotto ed oneſto, che il Gran

Duca Coſimo III. l' avea deſtinato a ſuccedere all' Auditore Fiſcale Girolamo Venuti carico d' anni e di fatiche. Ma una gangrena in un piede lo tolſe di vita prima di occupare una sì onorifica ed importante carica. Il giovane Tommaſo fece i ſuoi primi ſtudj preſſo i Geſuiti, poi paſsò a Piſa deſtinato dal padre alla giuriſprudenza. Frequentò pertanto il celebre Giuſeppe Averani, ma non in modo che non attendeſſe con maggiore ardore ad altri ſtudj. In queſti non aveva altra guida che il ſuo talento, e dal rapido progreſſo, ch' ei fece nella geometria degli antichi, ben dette a divedere che era nella ſtrada, a cui il ſuo genio il chiamava. Come egli aveva ricevuto dalla natura quell' attività di ſpirito, che non dà ripoſo, finchè reſta qualche coſa a ſcoprire, domandò all' Ab. D. Guido Grandi, reputato con ragione uno de' più ſolenni maeſtri in matematica, qual cammino gli rimaneva a fare. Il Grandi indovinò il ſuo genio. Gli ſervì di padre, ricevendolo oſpite nel ſuo Monaſtero di S. Michele, e di maeſtro, comunicandogli i ſuoi ſcritti d' algebra, e godè di vederlo sì rapidamente correre in queſta difficil carriera da ſuperare, non che uguagliare un giorno i più eſperti. Ecco come il Grandi medeſimo incapace di adulazione, come lo era d' invidia per uno ſcolare, che lo precorreva, ſi eſpreſſe in una lettera al ſuo amico Celeſtino Galliani. *Il ſuddetto giovane è tutto innamorato dell' analiſi moderna, e ne ha un maneggio mirabile, di maniera che ſcioglie i problemi più ardui di fiſico-matematica da sè, nè vi è coſa aſtruſa negli Atti di Lipſia, nel Newton, nell' Ermanno, nel Bernoulli, o altri autori, che egli ſolamente letta la propoſta, ſubito non ne trovi la dimoſtrazione analitica in poche righe di calcolo, dimoſtrando e le leggi delle forze centrali per qualunque curva, e le curve che ſodisfanno a diverſe leggi delle forze centrali, e le catenarie in qualunque ſuppoſizione di gravità variabile, e le velarie, e le elaſtiche, e le trajettorie per mezzi di varia re-*

ſiſtenza, e aſſai più facilmente che non farei io, perchè non ha il capo diſtratto come io in altre coſe. Cinque anni e mezzo conſumò in Piſa il Perelli, e poichè dopo il ſecondo abbandonò interamente la legge, gli piacque di ricever la laurea in filoſofia e medicina. Gliela dette uno ſcolar del Bellini, che era nominato più per la fama del maeſtro che per la propria, e queſti fu il Dott. Antonio Domenico Gotti. Ognun de' ſuoi precettori lo deſiderava o compagno o ſucceſſore, e per fino nella notomia fu creduto dallo Zambeccari degno di ſuccedergli. La morte del padre e gli affari domeſtici, che ne furon la conſeguenza, l' obbligarono di trattenerſi da tre anni in circa in Firenze. La matematica però, la botanica, l' erudizion greca e latina, la ſtoria antica e moderna, le ricerche d' antichi monumenti in quel ricco depoſito della biblioteca Laurenziana occupavano aſſai più il Perelli che le cure domeſtiche. Viaggiava ſpeſſo col celebre Micheli, riputato meritamente allora il Tournefort Italiano, ed ebbe quaſi con lui comune la gloria di molte ſcoperte erbarie. La profonda cognizione, che aveva nelle lingue dotte, e ſpecialmente nella greca, il Salvini, l' acume con cui Filippo Bonarroti paragonava e illuſtrava le prezioſe reliquie dell' antichità, il genio poetico del Buondelmonti e del Crudeli eran per lui tanti diletti di genial converſazione e occaſioni di ſtudio e di profitto. E poichè ebbe nella patria ſua ſoddisfatto all' inſaziabile avidità di ſapere, e di ſaper tutto, ſe ciò foſſe conceſſo ad un uomo ſolo, paſsò a Bologna, nella qual città fiorivano per tal modo le ſcienze fiſiche e matematiche, e sì celebri erano in eſſe i nomi dei Manfredi, dei Beccari, e degli Zanotti, che reputò a ſua gran ventura il vivere domeſticamente con eſſi per lo ſpazio di quaſi quattr' anni. Volle anche conoſcere i principali luminari dell' Univerſità di Padova, e negli undici meſi, che paſsò in quella ſede fortunata delle ſcienze, fu intimo del Poleni, del Morgagni, e del

Facciolati. Queſti lo perſuaſe d' aſpirare alla vacante Cattedra di lingua greca, gli promiſe il ſuo favore, e lo luſingò di un felice eſito, ſol che prima deſſe al pubblico un ſaggio del ſuo ſapere in queſta lingua. Non ricusò la condizione il Perelli, e ſi volſe ad Antonio Cocchi ſuo amico per ottener da lui la copia di un manoſcritto greco di Caritone Afrodiſeo, in cui ſi deſcrivono gli amori di Cherea e di Calliroe. Il Cocchi negò al Perelli quel che poi conceſſe al meſchin guadagno di cinquanta zecchini (che tanto pagò l'opera il Sig. d'Orville), e ciò fu cagione, che ſi ſciglieſſe fra loro un' amicizia, che l' amor nelle lettere e una reciproca ſtima avea conciliata. Tornato il Perelli in Toſcana dopo molte erudite peregrinazioni offerì l' opera ſua a chi preſedeva all' Univerſità di Piſa, e nell' anno 1739 fu fatto Lettore d' Aſtronomia. Era poco men che nuova queſta Cattedra, come lo era interamente l'Oſſervatorio eretto dalla munificenza di Gio. Gaſtone Gran Duca di Toſcana per ſervire ai progreſſi della ſcienza e al decoro dell' Univerſità. Doveva far maraviglia, che in quella ſcuola, in cui il Galileo aveva il primo dimoſtrato il ſiſtema del mondo, e annunziato tante ſue celeſti ſcoperte, e l' uſo mirabile per la geografia e nautica di quelle dei Satelliti di Giove, tutto lo ſtudio della aſtronomia ſi foſſe ridotto a ſpiegare il Quadripartito di Tolommeo, che vuol dire ad una pretta aſtrologia giudiciaria. Il Perelli nella ſua orazione inauguratoria piena di eleganza latina, d' entuſiaſmo, d' erudizione e di dottrina fiſica, recitata due anni dopo la ſua elezione, provò la neceſſità di reſtituire il primiero decoro, eſpoſe i felici progreſſi dell' aſtronomia fatti fin allora, e quanto largo foſſe il campo, che ella preſentava per farne de' nuovi, animando sè, gli ſcolari, e tutti gli zelanti della gloria d'Italia a batter queſta carriera, in cui sì lodevolmente correvano le due in ogni illuſtre impreſa ſempre emule nazioni, l' Ingleſe e la Franceſe.

I progreſſi di queſta ſcienza dipendono dal tempo, dalla perfezione dei metodi matematici, e da quella degl' iſtrumenti, i quali poſſon dare un' eſattezza tale all' oſſervazioni, che quelle di pochi anni vagliano aſſai più delle ineſatte di molti ſecoli. Fu pertanto cura del nuovo Aſtronomo di provvedere il ſuo Oſſervatorio di quegl' iſtrumenti, che i più rinomati artiſti Ingleſi eran ſoliti di coſtruire; nè in ciò gli ſu avara l'anima grande di Franceſco I., che non ricusò mai ſpeſa alcuna, quando credè che poteſſe ſervire alla gloria della ſua Toſcana. E quanto ai metodi, niuno certamente al pari del Perelli maneggiava gl' inventati fin allora, e niuno più di lui era in iſtato di perfezionare i già noti, e d' inventarne de' nuovi. Quanto poi all' oſſervazioni, la ſua memoria che era una viva biblioteca, e una copioſa raccolta dei più rari libri gliene ſomminiſtravano tal copia, che ſi ſarebbe detto eſſere a lui preſente come in vivo quadro la ſtoria tutta dell' antica e della moderna aſtronomia. A un sì dovizioſo corredo null' altro mancava, che un' iſtancabile pazienza nell' oſſervare e nel notare, e una certa agilità e deſtrezza nel ſaper fare il miglior uſo degl' iſtrumenti. Perchè mancarono queſte doti al Perelli, il ſuo nome non è regiſtrato tra quelli, che chiamanſi i maeſtri della ſcienza, al qual onore poteva con ſicurezza aſpirare ſol che aveſſe ſaputo frenare il ſuo troppo fervido ingegno, che lo portava in un tempo a più e diſparatiſſimi ſtudj. Qualche oſſervazion d' ecclíſſi, una porzion dell' Almageſto di Tolommeo da lui elegantemente tradotta in latino, una ſeconda prefazione fatta per oſſervazioni non ſue, ma di chi gli doveva ſervir d' ajuto, in cui ſi fa la ſtoria dell' Oſſervatorio Piſano, ſono i ſoli ſcritti, che ei conſacrò ad Urania. Ma non credaſi perciò, che la fama di queſt' uomo raro foſſe riſtretta dentro i ſoli confini dell' Italia. La ſoluzion di un ſol problema Ottico di trovar una curva, in cui i raggi di luce, che vi ſi intende emanata, ritornino ſempre dopo due rifleſſioni ad un punto ſolo preſo nel mezzo, mandata all' Accademia delle Scienze di Francia da chi n'era il Miniſtro in Firenze, fu come l'unghia del leone, da cui il Clairaut, il Bouguet, ed il de la Lande, nomi illuſtri nelle ſcienze matematiche, giudicarono in eſſe potere il Perelli gareggiar coi primi. Queſta teſtimonianza lo fe coraggioſo, o per meglio dire ottenne da lui una meno interrotta applicazione alle coſe geometriche, e potè così ſomminiſtrare all' Eſtenſore d' un Giornal letterario Toſcano la ſoluzione d' alcuni problemi, che un Anonimo Franceſe aveva propoſto ai matematici Fiorentini. La maggior parte di eſſi era di una facilità da incoraggiare anche i volgari geometri, e alcuni eran già ſtati ſciolti. Credè pertanto il Perelli di doverli rendere alquanto più difficili, e di dar loro un' aria di novità, procedendo nella ſoluzione per via più riſtretta, e del tutto differente dalle altre fin allora battute, e in ciò non volle ſervirſi che della geometria lineare, imitando così il gran Newton, il quale benchè benemerito più d' ogni altro dell' analiſi e dei moderni calcoli, ciò non oſtante ſtimò ſempre ed ebbe in venerazione l'opere e i motodi degli antichi geometri fino a dolerſi amaramente, che dopo l'introduzione fatta dal Carreſio del calcolo nella geometria erano a torto quaſi generalmente traſcurati. Quanto però il Perelli valeſſe nella ſinteſi, non ſi può meglio conoſcere, che dalla ſoluzione di quel problema, in cui ſi cerca il raggio di un cerchio, il quale eſternamente tocchi tre altri cerchj, di cui ſian cogniti i centri ed i raggi; problema, che ha meritato un luogo nell' Aritmetica univerſale del Newton, e che, dopo molt'altre antiche e moderne ſoluzioni, è ſtato ſciolto dal noſtro Geometra con magiſtrale ſemplicità ed eleganza. Dopo di ciò ſi volſe ad alcuni dei più difficili e dei più utili problemi meccanici, che ſe foſſero ſtati pubblicati nel loro tempo, avrebbero affrettato i progreſſi della

della ſcienza, a cui appartenevano, e ci ſarebbero ora conoſcere a qual ſegno era capace il Perelli di contribuire a queſti progreſſi. In sì fatte ſcienze le cognizioni ogni giorno più s' aumentano, i metodi ſi ſemplicizzano, e ogni età aggiunge qualche coſa alle ſcoperte dell' età precedente. Onde è che chi non fu ſollecito a dar ſuori le proprie, merita che i poſteri non abbian cura di ricercarle, perchè non poſſon più ſervire alla loro iſtruzione, eſſendo la ſoſtanza di eſſe non ſol paſſata, ma anche creſciuta negli ſcritti di coloro, che ai medeſimi ſuccedettero. Uno ſpirito creatore, com'era quel del Perelli, non isdegnò di trattare ancora coſe puramente elementari per ſervire all' altrui iſtruzione; e merita ſpecialmente d' eſſer ricordato un trattato delle ſezioni del cono, che ottenne da lui chi preſedeva in nome di Ceſare alla Toſcana per uſo di un ſuo figliuolo, il quale deſtinato a gran fortune pei meriti del padre e pei proprj talenti, credè di non poterli meglio coltivare, che cogli ſcritti e colla voce dei Profeſſori di Piſa. Ella è ugualmente rara tra dotti l'arte di ſapere profittare dei lumi degli eguali o dei ſuperiori, come è l' arte di ſaper comunicare i proprj agl' inferiori. Se uno ha difficoltà per un certo amor proprio a ricevere, ne ha ancora maggiore a dare con facilità e modeſtia, cui rare volte inſpira la ſicurezza della propria ſuperiorità. Queſte due doti erano poſſedute ſovranamente dal Perelli. Egli entrava in quello, che era propoſto dagli altri, come ſe non aveſſe ſaputo che quella tal coſa, ma con una ſpecie d' omaggio, che lungi dall' offendere, luſingava anzi que' pochi che erano in iſtato d' iſtruirlo, e rare volte accadeva, che non aggiungeſſe qualche coſa all' altrui idee. Quando poi doveva comunicare le proprie, lo ſaceva con una chiarezza e naturalezza mirabile, e ſenza abuſar d' alcuno, non ſi negò mai ad alcuno, e coll' iſteſſo impegno parlava col giovane principiante e coll' uomo conſumato. Così la ſua caſa fu quaſi in ogni ora aperta a tutti, e ſe non potè mai ottenere da sè di preſtarſi ai regolari doveri della pubblica ſcuola, compensò queſta mancanza con iſtruzioni continue, che erano tanto più premuroſamente ricercate, perchè ſenza il più piccolo faſto Accademico ſembravano, e realmente lo erano, tante familiari converſazioni. Queſta facilità e naturalezza dipendeva in gran parte dalla ſemplicità de' ſuoi coſtumi e dalla bontà del ſuo carattere, cui non poterono mai alterare nè il profondo ſapere, nè il riſpetto, nè la lode degli uomini. Ei non voleva che ſervire all' utilità di queſti con una maniera tutta ſua, che non poteva diſpiacere ſe non a certe anime piccole o ſoverchiamente ſcrupoloſe, che pongono i doveri tutti della ſocietà nell' ordine e nella regolarità delle occupazioni. Tra le utilità, che apportò il Perelli agli uomini, non fu l' ultima quella della felice applicazione del ſuo profondo ſaper matematico all' idroſtatica. Disgraziatamente per l' Italia ella ha ſovente biſogno di chi regoli l' abbondanza delle ſue acque, e provvegga alla ſicurezza di quei popoli, che l' abitano, maſſime da che il vario intereſſe di differenti Principi, che dominano in eſſa, e le operazioni dal lor voler prodotte, han cangiato per tal modo il natural corſo delle medeſime, che ſenz' arte mal potrebbero contenerſi dal non ſommergere intere provincie. Da queſta neceſſità è nata una ſcienza tanto propria degl' Italiani, che non dividono con altri la gloria d' averla creata e promoſſa. Il Perelli formato nella ſcuola del Grandi e del Manfredi, ai quali tanto è debitrice queſta ſteſſa ſcienza, doveva aver la gloria, e l' ebbe in fatti, di avanzarne i progreſſi. Si può dire che dopo l' eſtinzion di quei gran lumi non vi fu affare di rilievo, in cui egli non foſſe o adoperato o conſultato. Il maggior bene per altro apportato dal Perelli mediante la ſua ſcienza idroſtatica, lo provò la Toſcana, che ricorderà ſempre con animo grato *il Ragionamento ſopra la campa-*

gna Piſana, *la Relazione ſopra il modo di liberare la campagna del Valdarno inferiore dall' inondazioni dell' Uſciana*, l' altra *Relazione della maniera di dare ſcolo alle acque ſtagnanti del Pian del Lago*, che fanno una parte del volume IX. della *Raccolta d' Autori*, *che trattano del moto dell' acque* pubblicato in Firenze l' anno 1774. Se Piſa e la ſua campagna aveſſero ſcoli più facili per le acque e proprie e ſtraniere, che vi ſon portate dai fiumi Arno e Serchio, ſarebbe certamente una delle più floride e fertili provincie d' Italia. Ma la poca inclinazione del terreno verſo il mare, e lo ſcorrer che fanno quei due fiumi in letto o ſuperiore o eguale al terreno medeſimo, producono in diverſe parti sì forte oſtacolo al moto delle ſue acque naturali, che queſte ſono ſottopoſte a frequenti ſtagnamenti, altri temporali, altri perpetui; oltre di che è sì grande tal volta la copia dell' acque ſtraniere, che il loro inondamento arreca danni e pericoli graviſſimi. Come queſti mali, poichè il rimoverli è impoſſibile, ſi poſſano ſcemare, e ſi poſſa migliorar la condizione della campagna tutta, l' inſegna per tal modo il Perelli, che niuna coſa ſembra eſſere alla ſua avvedutezza sfuggita. Nè ſolamente eſpone il proprio ſentimento, ma eſamina anche l' altrui, riportando ogni propoſizione ai principj della ſcienza. Se s' ingannò qualche volta nel calcolar la ſomma della ſpeſa (imperocchè chi può prevedere gli oſtacoli tutti, cui apporta la natura, o la malizia, o la negligenza degli uomini?) come accadde nel taglio d' Arno in vicinanza di Piſa, nel foro del monte, per cui dovevano ſcolarſi le acque del Pian del Lago, e in altre operazioni; furon però ſempre queſte dirette da un ſaper profondo e da un' illuminata prudenza, che ſa diſtinguere nell' incertezza di molte dottrine e nella varietà di molte ſperienze il vero dal veriſimile. Noi ricordiamo il Ragionamento ſopra la campagna Piſana in tempo, che la Repubblica di Lucca ha conſultato i più abili idroſtatici dell' Italia per ſapere qual ſarebbe il modo il più facile e il meno diſpendioſo da condur le acque , che ſcolano nel lago di Bientina, al mare; e chi ſa che nella diſcrepanza dei pareri e nella difficoltà d' eſeguirli non ſia finalmente coſtretta di abbracciar quello propoſto in detto Ragionamento dal Perelli, che è di far traverſare quelle acque per mezzo di una volta ſotterranea l' Arno , e di ſcaricarle nel più baſſo letto del Calambrone? Sarebbe poi coſa lunga a ridire le utilità tutte, che furono una felice conſeguenza dell' idee eſeguite del Perelli , e che egli eſpoſe o negli ſcritti di ſopra ricordati , o in altri , che non videro la pubblica luce * . E ſervivagli mirabilmente a ciò la notizia dell' antichità per paragonare lo ſtato preſente col paſſato , e per dedurre da queſto paragone i rimedj i più opportuni : ed una prova ne ſia la lettera al Senatore Buondelmonti intorno all' inondazioni d' Arno e ai mezzi per ripararvi , in cui ſi fa la ſtoria di tutte le piene, dalle quali la più bella delle città d' Italia fu più volte miſeramente deformata . Così potè convincere d' errore coloro , che ſoſtenevano rialzarſi di più braccia il letto d' Arno nel corſo di un ſecolo, ed eſſere più frequenti e più deſolanti le inondazioni di queſto fiume nei preſenti, che nei trapaſſati tempi; e potè altresì più apertamente provare che ſarebbe riuſcito inutile, e in alcune cir-

---

* Non ſarà diſcara una nota di quelli, che ſono a noi pervenuti.

Relazione ſopra il fiume Marroccia pel Sig. March. Antonio Niccolini. = Sopra una nuova inalveazione della Girotta. = In cauſa Silvatici e Norci. = Intorno alla macchia di Pietraſanta. = Sopra il foſſo reale. = Sulla quantità dell' acqua della fonte Donata ſotto Treggiaja . = Sopra il mantenimento del foſſo di Ripafratta. = Sopra l' unione dell' acqua della Barra , Foſſa Nuova , Foſſa di Malaventre ecc. = Sopra la bonificazione del padule del Bellino . = Sopra le oppoſizioni fatte al ſuo progetto intorno all' emiſſario del lago Traſimene ſtampato in Firenze l' anno 1771. = Sopra le colmate dell' Ajaccia e del piano d' Acquaviva in Valdichiana. = Sopra il taglio d' Arno , e voltata di eſſo in Barbarecina. = Sopra il progetto del canale navigabile da Firenze fino allo sbocco di Ombrone.

coſtanze ancora dannoſo il divertimento di una porzion dell' acque nella parte ſuperiore alla città. Si ſarebbe voluto da lui non ſolamente l' eſame degli altrui penſieri ſopra queſto importante oggetto e l' eſpoſizione dei proprj, il che eſeguì copioſamente, ma ancora una geometrica determinazione di pendenza e larghezza, per le quali un fiume nel ſuo letto ſi riduce in uno ſtato di permanenza inalterabile: ma confeſsò eſſer queſto un problema tanto difficile, che tutte le dottrine fin allora acquiſtate nella ſcienza dell' acque correnti erano inſufficienti a riſolverlo. Tra tutte le mutazioni però, che per legge di natura o per opera umana han ſofferte i diverſi fiumi dell' Italia, niuna havvene forſe maggiore di quella accaduta al Po ed al Reno, per la quale le tre provincie di Bologna, di Ferrara, e di Ravenna, le più amene, le più fertili e forſe le più popolate dello Stato Pontificio han ricevuto danni graviſſimi, e ne temono anche dei maggiori. Le controverſie poi nate per rimediare a queſti mali ſono ſtate sì lunghe, sì varie, e sì vive, che poſſon dirſi d' aver ſervito ſe non al ſollievo di quelle provincie, certamente al progreſſo e perfezione dell' architettura dell' acque. Anche il Perelli ebbe parte in eſſe, allorchè fu preſcelto ad aſſiſtere come matematico il Card. Pietro Paolo Conti, a cui era ſtato commeſſo di viſitare diligentemente quell' eſteſe regioni, e di provvedere alla loro ſalvezza. La Relazion del Perelli a queſto illuminato viſitatore non ſi diparte mai dai principj univerſalmente ricevuti d' idrometria; e nella neceſſità di condurre il Reno unito col rimanente dei torrenti del Bologneſe e della Romagna per un ſol alveo al mare, reputato unico rimedio a tanti mali, propone quella linea, che poi in gran parte felicemente eſeguita da un franco domatore dei pubblici mali e pregiudizj ha provato la ſingolar prudenza del ſuo Autore. Appena meriterebbero d' eſſer ricordate le oppoſizioni fatte alla Relazione del noſtro Idroſtatico, perchè dettate più da umane paſſioni, che dall'amore del vero, ſe la riſpoſta, che ei dette alle medeſime, non appartene ſſe al corredo della ſcienza dell' acque. Alla quale mentre ſerviva viaggiando per diverſi luoghi, che doveva viſitare, da per tutto ricercava monumenti d' antichità, opere d' eccellenti artiſti, e ſpecialmente pittori, ſcultori, ed architetti, de' quali conoſceva il bello ed il buono, rari manoſcritti e libri, facendo di tutte queſte coſe e di altre ſimili ſua cura e delizia. Nè ricuſava richieſto d'eternar la memoria di qualche fatto o perſona con eleganti iſcrizioni Latine, o di ſupplire l'antiche, nel che era di una mirabile ſagacità, baſtandoli poche lettere per indovinare o le corroſe o le ſmarrite, o d' interpetrare quelle che eran reputate della più difficile intelligenza. Tra queſte ci piace di ricordare la più celebre di tutte per la ſua antichità, che fa un ſingolar ornamento del ricchiſſimo muſeo Nani, e intorno la quale ſi ſono occupati gl' ingegni dei più valenti antiquarj. La inſolita forma delle lettere, con cui è ſcritta, ne rende incerto il ſenſo, e penſa il Perelli, che eſprima il dono di un tripode fabbricato da Trifone, ed offerto da Ecfante ad Apollo. Alla maniera degli antiquarj rende ragione d' ogni ſuo detto, e lo fa con quella copia di Greca erudizione, che ſerve unicamente all' argomento, non alla pompa dello ſcrittore. Promette in fine dell'operetta altre ſpiegazioni d'iſcrizioni Greche; ma poichè in ſue letterarie promeſſe era ſovente vano lo ſperare, non valſe la nojoſa importunità di chi lo ſtimolava ad arricchire di queſti doni una ſua Miſcellanea a vincere la naturale incoſtanza del medeſimo. Nè tampoco riuſcì a me di vincerla per ottenere una compita edizione dell' opere inedite del Torricelli, l' autografo delle quali mi era fortunatamente venuto alle mani, nè altri lavori, ch'io credeva poter ſervire alla gloria dell' Univerſità di Piſa, a cui con vincolo comune eravamo legati. Una Memoria ſul modo di migliorarla, un' altra ſull' erezione di una nuova cattedra d' idroſtatica, e ſulla opportunità dell' agro Piſano per fare in grande l' eſperienze appartenenti alla ſteſſa, varj eſtratti di opere matematiche, e la ſoluzione di alcuni problemi barometrici propoſti dal P. Fontana, che furono da me inſeriti nel Giornal Piſano, ſono i ſoli ſcritti, i quali a fatica impetrai dal medeſimo, e di cui il debito di gratitudine ne eſige da me un' onorevol ricordanza. Ma ſe è intereſſante il conoſcere l' opere di un gran genio, come quelle che determinano il giudizio, che ſi deve formare dei ſuoi talenti, non è meno importante lo ſpettacolo della ſua condotta, dei ſuoi coſtumi, e per fino delle ſue debolezze, dalle quali, come da una ſcuola di filoſofia, ſi poſſon cavare utili inſegnamenti. Già ſi ſa, che o la gloria, o l' intereſſe, o tutti e due inſieme ſono i due grandi ſtimoli, che fanno agire gli uomini; e le perſone di lettere non ſono eſenti dal pagare queſto tributo all' umanità. La ſemplicità dei coſtumi, che fu propria del carattere del Perelli, doveva allontanar da lui, come lo allontanò, il deſiderio d' accumular denari. Egli era povero non oſtante un' annua provviſione di ſopra 400. ſcudi, che ritraeva dall' Univerſità, e una rendita vitalizia di 240, perchè ſoddisfatto che egli aveva il deſiderio di acquiſtar libri rari in ogni maniera di ſcienze, e qualche iſtrumento matematico, ed in ſpecie aſtronomico, che mai non adoperò, null' altro curava, e rinunziando ſenza avvederſene ai comodi della vita, dava a ciaſcun di quelli, che lo ſervivano, o lo frequentavano, il dritto di partecipare del frutto delle ſue fatiche. Si ſarebbe detto che non conoſceva l' uſo e il valore della moneta, ſe non allor quando per ſoverchia generoſità o inconſideratezza mancava del neceſſario. Se fu il Perelli eſente dall' amore dell' intereſſe, non lo fu egualmente da quel della gloria, che ſecondo l' eſpreſſion di Tacito è l' ultima paſſione dei ſapienti. Nel ſoddisfarla era lontano non meno da quella delicatezza d' amor proprio, che è un vero ſupplizio per molti dotti, perchè non ſoffre la più piccola contraddizione, come da quegli artifizj, che tanti e tanti impiegano per ottenere i ſuffragj del pubblico, e da quella vil geloſia, che ci fa deprimere il merito altrui per inalzare il proprio. Il Perelli giuſto verſo degli altri, domandava per sè la medeſima equità; e perſuaſo, che il numero dei buoni giudici in ogni ſcienza ed arte è piccolo, ſi contentava dell' approvazione di perſone illuminate, abbandonando tranquillamente il rimanente alla loro ignoranza o invidia. Fu però in lui una ſorta di contraddizione, di cui con difficoltà ſi può render ragione, ed è che non eſſendo eſente dal deſiderio di fama, traſcuraſſe poi di condurre a fine e di dare al pubblico quelle produzioni che gliene avrebbero accreſciuto ed eternato il poſſeſſo. Una certa natural pigrizia, la varietà dei ſuoi ſtudj, e la ſteſſa fama, che godeva in Toſcana di non aver pari nelle ſcienze matematiche, e pochi eguali nella varia erudizione e nella cognizione della Greca lingua, e che ammorzava, ſe pur non toglieva affatto in lui l' operoſo ſentimento di emulazione, ſono a mio credere i motivi, che han privato la poſterità dei frutti, che il ſingolar talento del Perelli avrebbe potuto produrre. Pien di riſpetto per l' antichità non ſapeva accomodarſi ad un certo guſto dominante, che divenendo ogni giorno più ſtravagante par che annunzi la vicina decadenza delle lettere; onde ſe o per ſervire a sè medeſimo o alle richieſte d' amici compoſe qualche coſa in propoſito d' amena letteratura, proccurò ſempre, e l' ottenne mirabilmente, che ella aveſſe impreſſo il carattere della grandezza, facilità, ed eleganza antica *. Non deve far maraviglia che aveſſe il Perelli per gli altri

---

* Darem qui un ſaggio del valore del Perelli in poeſia Latina e Greca.

altri l' indifferenza, che aveva per ſe medeſimo. Lo ſpettacolo vario delle paſſioni, che agitano gli uomini diverte la

---

Per l' Obeliſco, che ſi voleva alzare in monte Citorio da Benedetto XIV.

Ille olim Auguſto metitus Caeſare ſoles
Niliacus jacuit ſaecula plura lapis;
Praeſule nunc idem Benedicto ſurgere juſſus
Admonet antiquos, Roma, redire dies.

Sopra la Signora Sofia N. N.

Dum ſpectat Juno Sophian, auditque loquentem,
Vincor, ait, nec de judice victa queror.
Una trium nequeo junctis certare duabus,
In Sophia Pallas jungitur atque Venus.

Per la morte di un giovanetto.

Traduzione dal Greco.

Nuntia Perſephores, ales Cyllenia, qualem
Ducis ad infernos, triſtia regna, lacus!
Sorte mala eripitur luci ſeptennis Ariſton,
Quem tenet & medium ſpectat uterque parens.
Si te cuncta manent quot ſunt mortalia, Pluto,
Poma quid immiti carpis acerba manu?

Traduzione del Sig. Metaſtaſio.

O della Dea d' Averno
Mercurio meſſaggier, dal cieco mondo
Chi mai conduci al triſto orror profondo!
Di ſett' anni Ariſtone
Dalla barbara Parca al ciel rapito,
Che in mezzo ai genitori è qui ſcolpito.
Oh ſe d' ognun che naſce
La matura vendemmia a te ſi ſerba,
Pluto crudel, perchè la cogli in erba?

Sopra un dito del Galileo ſtaccato dal ſuo cadavere.

Lipſana ne ſpernas digiti quo dextera coeli
Menſa vias, nunquam viſos mortalibus orbes
Monſtravit parvo fragilis molimine vitri.

maggior parte de' filoſofi, e come Democrito, molti ne ridono. Ma il Perelli non ſol non ſi burlava del ridicolo de' ſuoi ſimili, ma nè pur ſi degnava d' oſſervarlo; ſorta d' indulgenza, che ſe foſſe ſtata a lui conceſſa, non ſi ricorderebbero ora con riſo alcuni avvenimenti, che furono l' effetto di una ſoverchia credulità unita al deſiderio di piacere perfino al bel ſeſſo. Si rammenta ancora la ſingolarità delle ſue aſtrazioni. Imperocchè penſava ordinariamente nel mezzo di una converſazione, di una camera piena di gente, e anche in compagnia di Dame. Faceva naturalmente e ſenza affettazione quello, che per una prova o per una oſtentazione delle ſue forze era ſolito di fare un antico filoſofo, che ſi ritirava in un pubblico bagno per meditare. Quantunque però alcuni ſi burlaſſero di queſte diſtrazioni di mente, non per queſto lo riſpettavano meno, e tutti ricercavano avidamente la ſua converſazione, perchè era lontana da burbanza e vani-

---

Auſa prior facinus, cui non Titania quondam
Suffecit pubes congeſtis mollibus olim
Sydereas fruſtra conata adſcendere in arcos.

Per la Signora Ottavia Pepi.

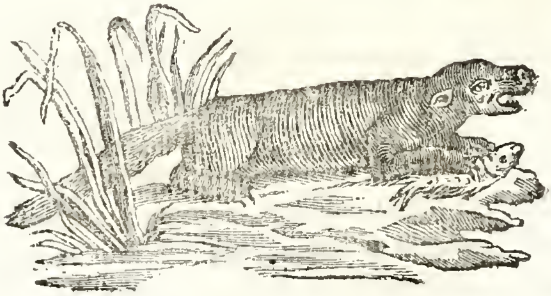
Τὴν ξανθὴν κορυφὴν, ῥοδόεντά τε κύκλα παρειῶν
Καὶ στίλβονθ' ὑγρῷ ὄμματα μαρμαρυγῇ,
Καὶ στόμα μειδιόον δροσερῶν πνέον ἥδιον ἄνθων,
Κλόπον τ' ἀρτιπαγοῦς λευκότερον χιόνος
Πάντ' ἐσορᾷς Πεπίης εἰ χείρονα, μέμφεο τέχνην,
Οὐδὲ γραφίς γε τυποῦν ἠέλιον δύναται.

Verſione del Sig. Ab. Guarducci.

Flaventes crines, circlos roſeoſque genarum,
Quaeque udum vibrant lumina viva jubar;
Floribus & ridens vernis os dulcius halans,
Concreta pectus candidiusque nive,
Cuncta vides Pepiae, quae ſi hic minor, arguito artem;
Nec ſolem artificis pingere dextra queat.

Chi poteva per ſe medeſimo comporre un' antologia, ſappiamo eſſerſi ancora occupato in tradurre alcuni epigrammi della Greca.

tà anche quando iſtruiva, e perchè era condita ſpeſſo di ſali e di opportuni racconti di detti e di fatti, e di una naturalezza, bontà, e giovialità che ſeduceva. Nel raccontare una piacevole ſtoria ſapendo, che la fine ne è l' oggetto, ſi affrettava di giungervi, e produceva l'effetto ſenz'averlo promeſſo. E' incredibile la copia di aneddoti galanti, politici, militari, e letterarj che eran ſempre preſenti alla ſua memoria, e ſi ſarebbe detto, che la ſtoria antica e moderna foſſe ſtata l' unica ſua occupazione. Aveva profondamente meditato quello che grandi Autori, come un Locke, un Monteſquieu, un Cheſterſield, hanno ſcritto ſopra la metafiſica, la politica e la morale, e applicando i loro principj alle circoſtanze dei tempi giudicava, e prevedeva con una ſagacità degna di un gran Miniſtro. Era ſolito di dire, che ſi ſarebbe potuto facilmente moltiplicare il numero dei profeti, ſe da perſone illuminate ſi ricercaſſe per tal modo l' origine delle nazioni, delle loro lingue, dei loro coſtumi, delle loro opinioni, e tutto quello, che appartiene alla ſtoria dello ſpirito umano, che ſi veniſſe a ſcoprire una ſucceſſione ed una catena di penſieri, che naſcono nei popoli gli uni dopo gli altri o piuttoſto gli uni degli altri. Egli è certo, che uno ſpirito metafiſico, come quello del Perelli, ſapeva dallo ſtudio della ſtoria cavare certe generali rifleſſioni, che ſembravano inalzarſi ſopra la ſtoria medeſima. Anche la teologia entrava ſpeſſo ne' ſuoi diſcorſi; imperocchè egli aveva letto molti degli antichi SS. Padri, e ſpecialmente Greci, e conoſceva il forte e il debole di quelle diſpute teologiche, che uno ſpirito di partito ha infelicemente ſuſcitate, e che ſenza farci migliori hanno per tanti anni non ſolo occupate le ſcuole, ma anche agitata con grave ſcandalo degli Eterodoſſi la criſtiana repubblica. Egli era aſſai illuminato per non iſpoſarſi ad alcun partito, e perſuaſo delle verità di noſtra Santa Religione, la coltivò con culto più interno che eſterno, quantunque però non traſcuraſſe mai anche quegli eſteriori doveri che ella preſcrive ai ſuoi ſeguaci. Ciò non oſtante non ſono mancati chi dalla ſua coſtante tranquillità e dall' aſtrazioni, che l' accompagnavano anche nell' adempimento di quei doveri religioſi, che dovrebbero più di tutti eſcluderle, han preſo motivo di mettere in dubbio la religioſità di lui; tanto è vero, che la malignità ſa profittar di tutto, e che vi ſarà ſempre una moltitudine di uomini, che ſi compiace di abbaſſare il merito dei gran genj, e di trovare il più leggier preteſto per diſpenſarſi dal rendere ad eſſi giuſtizia. Quantunque non foſſe indifferente alle grazie del bel ſeſſo, non pensò mai ad ammogliarſi. Sortì dalla natura una forte compleſſione, cui ſolamente nell' età la più avanzata poterono alterare le irregolarità del vivere, la continua meditazione, e l' aſſiduo ſtudio. Queſto divorator di libri, per ſervirmi dell' eſpreſſione, con cui Cicerone caratterizzò M. Catone, quante volte non ſolo nella propria, ma anche nell' altrui caſa fu ſorpreſo dal nuovo giorno, allorchè eraſi abbandonato nella ſera alla lettura di qualche opera per lui intereſſante! E raramente accadeva, che ne diſprezzaſſe alcuna, onde faceva maraviglia, che a un mondo di libri mediocri, e quaſi aſſolutamente ſconoſciuti aveſſe accordata la grazia di leggerli. Rare volte prendeva la penna per notare, fidandoſi della ſorprendente ſua memoria, in cui ciaſcuna idea occupava il poſto, che le conveniva, e che lo ſerviva a ſegno, che era pronto a riſpondere ſopra quaſi tutte le materie, e a citare i luoghi dei principali Autori che le trattavano. L' abbandonò poi quaſi del tutto per l' abuſo fattone negli ultimi tre anni della vita, che furon quaſi una morte anticipata, perchè fu tolto agli amici, ai parenti, alle ſue abituali occupazioni, e per fino a que' ſentimenti, che ſon proprj ancora dell' uomo animale. Queſto triſto ſpettacolo lo dette in Arezzo, che riguardava come ſua patria, perchè vi fu aſcritta tra le nobili la ſua famiglia, nel ſeno di cui ſi rifugiò l' anno 1779. Sentì forſe allora già vacillante, o per meglio dire, gli fu fatto ſentire, che l' Univerſità di Piſa non avrebbe potuto più ſervirli, come per lo avanti, di glorioſo teatro; onde dimandò di ritirarſene ſenza ſcapito d' aſſegnamenti. L' ottenne dalla clemenza di PIETRO LEOPOLDO nato alla felicità della Toſcana, e al ſollievo de' miſeri, perſuaſo che da una paleſtra, dove tutto deve eſſere ſtimolo alla fervida gioventù per correre vigoroſamente la difficile e lunga carriera degli ſtudj, deve allontanarſi la viſta di quegli oggetti, che ne potrebbero troppo ſenſibilmente paleſare la vanità. Finalmente un' apopleſſia tolſe affatto il Perelli al mondo nel dì 5. d' Ottobre dell' anno 1783. E' a noi venuta dall' antichità la moda di far paralleli, e chiuderemo queſt' elogio col farne uno, che ſorprenderà a prima viſta, e che ci farà reputare per troppo parziali della memoria del Perelli. Non dubitiamo di porlo a lato del gran Leibnitz, di quel raro e mirabil genio, che come ſcriſſe grazioſamente il Sig. de Fontenelle, ſimile agli antichi, che avevan l' abilità di condurre fino a otto cavalli di fronte, conduceva anche egli di fronte tutte le ſcienze, e che ſcompoſto e diviſo in tutte le ſcienze, che ſapeva, di un ſol uomo ſi ſarebber fatti più dotti di prima sfera. Il Perelli, come Leibnitz, aveva del guſto e del talento per la poeſia, era verſatiſſimo nell' antichità, era profondo nella ſtoria e negl' intereſſi dei Principi, che ne ſono il reſultato, e ſapeva il dritto pubblico con una non leggiera tintura di teologia; come quegli era eccellente filoſofo e matematico e conoſcitore ſommo della ſtoria dei penſieri degli uomini, certamente ſempre curioſa per lo ſpettacolo d' una varietà infinita, e ſpeſſe volte ancora iſtruttiva. A ſomiglianza di lui non ebbe nè fine, nè regola nella ſua lettura, e divenne per così dire tutto quello che aveva letto; ſapeva più lingue morte, e le più culte delle vive, e da tutto quello che leggeva ed oſſervava ſapeva trar linee di comunicazione, che approſſimavano mirabilmente differenti ſcienze tra loro. Era ancora comune a tutti e due quello ſpirito metafiſico, che ſa farſi padrone di tutti i principj più ſublimi, e i più generali, e una ſingolar diſpoſizione a prender tutte le forme, e a ricevere tutte le ſorte d' idee. Convenivano anche nella facilità di trattare con ogni genere di perſone, cortigiani, artiſti, contadini, ſoldati, ignoranti non men che dotti, perſuaſi, che da tutti ſi può imparar qualche coſa, e niun dei due reputò tempo perduto quello che dettero alla converſazion delle donne. Se il Leibnitz ſuperò il Perelli nell' invenzione di nuovi metodi matematici e nell' illuſtrazione dell' oſcuriſſima ſtoria de' baſſi tempi, fu anche vinto dal noſtro Italiano in un maggior criterio, che queſti portò nelle coſe metafiſiche, e nella contemplazione della natura, e in un guſto più delicato per tutto ciò che appartiene ad amena letteratura. Ma il Leibnitz laſciò copioſo numero di monumenti del ſuo raro ingegno e ſapere, ſcarſiſſimo il Perelli, onde ſi può a ragione temere, che la poſterità, la quale ſarà eternamente grata al primo, divenga ingiuſta verſo il ſecondo, o mettendone in dubbio il merito ſovraggrande, o deponendone la memoria.



INDICE DELLE MEMORIE

PRIMA SEZIONE.

PARTE I.

Introduzione a nuovi principj della Teoria elettrica dedotti dall' analiſi de' fenomeni delle elettriche punte

Del P. CARLO BARLETTI delle Scuole Pie Profeſſore di Fiſica nell' Univerſità di Pavia . . . . . pag. 1

Sopra l'equazione d'una Curva, ſopra la falſità di due famoſi Teoremi, e ſopra le ſerie armoniche a termini infinitamente piccioli

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Pubblico Profeſſore delle Matematiche Superiori nella Regia Univerſità di Pavia 123

Sopra la preſſione de' fluidi

Del Medeſimo 142

Indagini nel calcolo integrale

Del Sig. Cavaliere LORGNA 177

Delle progreſſioni reciproche delle potenze affette

Del Medeſimo 210

Eſpoſizione Anatomica delle parti relative all' Encefalo degli Uccelli

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acqueſi, e Chirurgo del Real Preſidio di Torino 237

Delle Oſſervazioni ſolſtiziali, fatte allo Gnomone della Cattedrale Fiorentina nell' Anno 1782, *e de' loro Riſultati paragonandole colle ſimili Oſſervazioni del* 1756, 1764, *e* 1775.

Del Sig: Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di S. A. R. il Granduca di Toſcana 256

SECONDA SEZIONE.

Oſſervazione della congiunzione inferiore di Venere col Sole a dì 20. *Marzo* 1782. *con alcune Rifleſſioni*

Del Sig. Ab. ANGELO DE CESARIS R. Aſtronomo all' Oſſervatorio di Milano 313

Sopra la forza Centrifuga

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie Pubblico Profeſſore delle Matematiche Superiori nella R. Univerſità di Pavia 325

Sopra le Serie

Del Medeſimo 386

PARTE II.

Nuova Teoria intorno al movimento de' navigli a remi

Del Sig. Cavaliere LORGNA 457

Memoria ſeconda ed ultima ſopra la riproduzione della teſta nelle Lumache terreſtri

DEL Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Profeſſore di Storia naturale nell' Univerſità di Pavia . . . 506

Lettera Prima relativa a diverſe produzioni marine

Del Medeſimo

Al Sig. Carlo Bonnet Membro delle più illuſtri Accademie d' Europa 603

Sopra i Fuochi de' Terreni e delle Fontane ardenti in generale, e ſopra quelli di Pietra-Mala in particolare

Del Sig. Alessandro Volta Profeſſore di Fiſica Sperimentale nell' Univerſità di Pavia 662

TERZA SEZIONE

Saggio di una Nuova Teoria del movimento delle acque pei Fiumi, e

Nuovo metodo per trovare colla ſperienza la quantità dell' acqua corrente per un fiume

Del Sig. Teodoro Bonati Matematico di Ferrara 676

Dimoſtrazione della riducibilità d' ogni quantità immaginaria algebraica alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, *adattata ad un Trattato elementare della natura delle equazioni*

Del Sig. Sebastiano Canterzani Profeſſore di Matematica, e Secretario perpetuo dell' Inſtituto delle Scienze di Bologna 720

Saggio di Oſſervazioni anatomiche intorno agli Organi della reſpirazione degli uccelli

Del Sig. Michele Girardi Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Preſidente al Gabinetto di Storia Naturale, e Profeſſore primario della medeſima e di Notomia

Al Sig. Vincenzo Malacarne Direttore delle R. Terme Acqueſi, e Chirurgo Maggiore del Reale Preſidio di Torino 732

Delle formole differenziali, la cui integrazione dipende dalla rettificazione delle Sezioni coniche

Del Sig. Gian-Francesco Malfatti Pubblico Profeſſore di Matematica nella Pontificia Univerſità di Ferrara 749

Memoria ſull' equazioni a differenze finite e parziali

Del Sig. Pietro Paoli Pubblico Profeſſore nella Univerſità di Pavia 787

Oſſervazione anatomica ſopra un vitello-vacca detto dagl' Ingleſi Freemartin

Del Sig. Antonio Scarpa Pubblico Profeſſore di Notomia, ed Operazioni chirurgiche nella R. Univerſità di Pavia 846

Oppoſizione del Nuovo Pianeta oſſervata nel 1781.

Dal Sig. GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Profeſſore d' Aſtronomia nell' Univerſità di Piſa 853

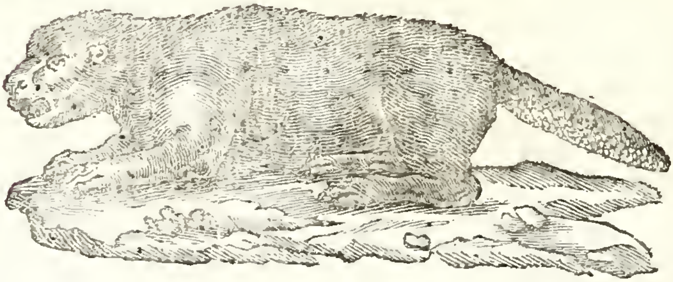
Lettera ſeconda relativa a diverſi Oggetti foſſili e montani

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Profeſſore di Storia Naturale nell' Univerſità di Pavia

Al Sig. CARLO BONNET Membro delle più illuſtri Accademie di Europa 861

Appendice alla Memoria ſopra i Fuochi de' Terreni e delle Fontane ardenti in generale, e ſopra quelli di Pietra-Mala in particolare

Del Sig. ALESSANDRO VOLTA Profeſſore di Fiſica Sperimentale nell' Univerſità di Pavia 900



INTRODUZIONE

INTRODUZIONE

A nuovi principj della Teoria elettrica dedotti dall' analiſi de' fenomeni delle elettriche punte

Del P. Carlo Barletti delle Scuole Pie Profeſſore di Fiſica nell' Univerſità di Pavia.

PARTE SECONDA

SOrgente di fallace evidenza, e di erronee induzioni fu ſempre mai in Fiſica la prevenzione. Lungi da ſimili incanti, e da ogni illuſorio ſplendore proſeguirò la propoſta analiſi de' fenomeni delle elettriche punte indipendente da qualſivoglia ipotetica idea, e con tali combinazioni di ſperienze, che ne rendano aſſolutamente diſtinti, e coſtanti i riſultati in qualunque ipoteſi. Sia pur queſta la *Frankliniana* d' un ſolo fluido eſpanſivo nelle due ſpecie di elettricità; o la *Nollettiana* di due materie efluente, ed affluente in una ſola ſpecie di elettricità, della quale ſpecie non ſieno che gradi varj la vitrea, e reſinoſa; o la *Simmeriana* di due oppoſte potenze, dalle quali vengano le oppoſte elettricità vitrea, e reſinoſa conſtituite; o altra, che delle ſpecie ſteſſe determini i caratteri, e le qualità; o in fine qualſivoglia opinione, che con ſiſtematici, e tecnici nomi definiſca in alcun modo, e riduca a principj la varietà degli elettrici fenomeni. Tutte le conſidero in pari grado poſſibili coteſte ipotetiche, e ſiſtematiche idee; e non riputerei, che un vano trionfo tanto l' adottarne, che il ripudiarne una a preferenza dell' altra, ſe tali preferenze non pervertiſſero le vie della ſcienza naturale, e non ritardaſſero i progreſſi delle utili e vere cognizioni.

Ad oggetto unicamente di oppormi a ſiffatti pregiudizj mi permiſi in fine della prima Parte alcune rifleſſioni contro la *Frankliniana* ſuperſtizione; e pel medeſimo oggetto ſul bel principio di queſta dichiaro apertamente l' indifferenza mia per qualſivoglia maniera di ſiſtematica perſuaſione, acciò limpido, e preſto s' intenda, quanto ſieno diverſi i ſiſtemi, e le ipoteſi dalle teorie, e ſi preveda nel tempo ſteſſo di qual forma, e e tempra ſieno que' nuovi teorici principj, ai quali mi propongo di aprir l' adito con l' analiſi delle elettriche punte.

Ed eſaminando a tenore della propoſta diviſione i fenomeni delle punte oppoſte a punte, e delle ſuperficie oppoſte a ſuperficie ne dedurrò come nella prima, così nella preſente ſeconda Parte i particolari corollarj più immediati per comprenderne indi ne' teoremi la generale, e coſtante eſpreſſione. Porgeranno adunque le diſtinte combinazioni delle punte, e delle ſuperficie materia dei primi due capi; e nel terzo coll' appoggio di nuove ſperienze ne eſtenderò l' applicazione alle apparenze di elettrica luce; preparando così la via alla terza, ed ultima Parte, che il termine comprende e dell' analiſi delle punte, e della Introduzione ai nuovi principj dell' elettrica Teoria.

CAPO I.

Combinazioni di punte oppoſte a punte nella reſinoſa, e nella vitrea elettricità.

L' attività della macchina, e la quantità di elettrica potenza, che ſi eccita ad ogni giro del diſco, e ſi eſtende alle varie diſtanze, fu per me in tutte le precedenti, ſiccome pure lo ſarà nelle ſeguenti ſerie di ſperienze, la miſura, e il modulo comune, a cui ſi riducono le proporzioni delle elettriche forze. Niuno, che nuovo affatto non ſia nelle Fiſiche e Matematiche ricerche, ignorar può, che ogni genere di forze, e di effetti non ſi riconoſce egualmente collo ſteſſo modulo, oſſia unità di miſura. Quanto è neceſſaria la riduzione a comune miſura per conoſcere eſattamente le proporzioni di qualunque termine, ed effetto nelle ſerie diverſe, altrettanto è indiſpenſabile di variar miſura per diſcernere tra loro gli effetti diverſi, o gli elementi varj d' un effetto compoſto; poichè ſenza ſimili ripieghi, e varietà ſi compongono inſieme gli effetti diverſi, e gli elementi de' compoſti effetti vie più ſi confondono ſotto certe miſure.

In due modi ſi preſentano gli elementi d' una forza, o di un effetto naturale; o ſono quelli già compoſti, e confuſi in ogni parte, o termine, da cui l' effetto riſulta; ovvero ſi compongono, e ſi uniſcono inſieme colla ſucceſſiva addizione di parti, o termini, che compiono, e ſoggettano ai ſenſi l' effetto medeſimo. Nel primo caſo l' ingrandire, o diminuire la miſura non porta veruna diſtinzione in quegli elementi; anzi ſi rendono eſſi tanto più confuſi, e indiſcernibili, quanto ſi riportano a miſure, ovvero a termini ſoverchiamente maggiori, o minori. Nel ſecondo caſo all' oppoſto quanto può ridurſi più minuta la miſura, tanto più idonea diventa per dividere, e diſcernere que' ſucceſſivi elementi, che ſi accumulano per accreſcere, e compiere i termini, e lo ſtato vario del propoſto effetto. Talchè ſiccome nel modo primo prendono in fine l' aſpetto di eguaglianza, e ſimilitudine le coſe più ineguali, e diſſimili, perchè coll' aumento, o diminuzione non ſi riſolvono, nè ſi diſtinguono punto, ma ſoltanto ſi ſommano, o ſi ſottraggono confuſi come ſono in ſe ſteſſi i loro elementi; così nel ſecondo modo ſi ſcorgono ne' ſucceſſivi termini, e gradi ſeparatamente i diverſi elementi; e può indi ciaſcuno paragonarſi con gli altri in ragione, che paſſano eſſi dal primo fino all' ultimo ſtato più compoſto, e confuſo.

A norma di sì giuſti principj, che mi baſta qui di accennare, non ſolamente variai le preparazioni, e le combinazioni di ſperienze, ma in ciaſcuna preparazione, e ſerie applicai ordinatamente a tutti i termini la varia attività della macchina, e la minima, e la maſſima quantità di elettrica potenza, che ad ogni giro del diſco m' ingegnai di eccitare con uniformità di ſucceſſione, per ottenere così diſtinti non ſolo i confronti d' ogni termine, ed effetto diverſo colla comune miſura, ma di più i confronti delle miſure diverſe con ogni termine, ed effetto comune. Poichè in fine le miſure, e i confronti ſono le ſole vie d' ogni diſtinta idea.

CON ELETTRICITA' RESINOSA.

PREPARAZIONE.

Un diſco aſſai maggiore del conſueto, che uſai nelle ſerie precedenti, mi porge ad ogni giro tanto più grande elettricità, che quindici ſoli giri baſtano per imprimere nel ſolito quadro verticale deſcritto nella prima ſerie viva forza di carica; e collo ſteſſo numero di giri s' induce verſo gli ultimi giri del diſco a ſcarica ſpontanea una boccetta, che mi ſerve continuamente di confronto, e di prova per i ſucceſſivi termini d' ogni ſerie. Di queſto diſco, e di quindeci giri faccio uſo in ogni termine della preſente, e delle ſeguenti ſerie, quando non avviſo altrimenti di averne ſcemata l'attività, o fatto cambio con altro minore.

La boccetta poco fa indicata non ſolo mi porge, ſiccome accennai, il confronto per la ſucceſſiva attività della macchina, ma di più nel cavare la ſcarica dal quadro mi ſomminiſtra una miſura della quantità, o grado di ciaſcuna carica, che alle varie diſtanze corriſponde: della quale nuova maniera di miſure parlerò in ſeguito più diſtintamente.

Non ommetterò qui di ſpiegare il giuoco, oſſia la pratica di tale miſura. In vece di cavar dal quadro la ſcarica applicando prima, come ſi uſa, un capo dell'arco alla faccia eſteriore, e appreſſando poi con prontezza l'altro capo all'anteriore armatura, tengo in mano queſt' ultimo capo dell' arco, e lo ſtringo ſull' eſteriore armatura di quella boccetta, che tengo inſieme impugnata. E preſento poi all' anteriore armatura del quadro quel globo, che fa la comunicazione, e il termine dell' interna armatura della boccetta; ſicchè non può ſe non attraverſo di queſta boccetta trarſi dal quadro la ſcarica. Così in vece di trarre tutto inſieme la ſcarica dal quadro, ſi divide queſta nella boccetta, che ſcarico immediatamente ſervendomi dell' arco ſteſo. E replicando lo ſteſſo atto di prima ſul quadro, ſi divide nuovamente quel primo reſiduo di ſcarica nella boccetta, che ſcarico ſimilmente a parte coll' arco. Con tali atti replicati eſauriſco in fine l' intera carica impreſſa nel quadro; ed intendo, che queſta ſi eſauriſca, quando più non imprime carica ſenſibile nella frappoſta boccetta. Ed è col numero di tali atti, che io miſuro la carica impreſſa nel quadro nelle varie diſtanze; e s' intenderà ſempre in queſto ſenſo, quando dico *finì*, o ſi *eſaurì* la carica in quattordeci, in dieci, in quattro, in una ſcarica della boccetta.

L' iſolamento in queſto apparato è per ogni verſo perfetto di quattordeci pollici. Nel rimanente replico la *preparazione* della ſerie prima collo ſteſſo tubo, e punta, e quadro ſimilmente oppoſto, e con reſinoſa elettricità. Per introdurre ampia comunicazione dell' eſteriore armatura col ſuolo, applico alla ſteſſa ai fianchi due fili metallici, che col ſuolo comunicano. Serve queſta ſerie di vincolo, e di mezzo termine delle precedenti colle ſeguenti; e comprende in oltre in ſe ſteſſa nuovi fenomeni, ai quali non ſi ebbe verun riguardo nella ſerie prima, e perciò ſi computa in ordine come ſerie diſtinta.

SERIE 5.

1. Dal contatto del quadro colla punta ſino alla diſtanza d' un pollice s' impreſſe nello ſteſſo con quindeci giri carica preſſo a poco eguale, che ſi finì con quattordeci ſcariche della boccetta.

2. A' pollici due finì in tredeci; ai quattro in dodeci; ai pollici otto in nove; ai quattordeci in cinque; ai diciotto in tre; ai ventiquattro in una ſcarica della boccetta: ai trenta pollici tentando la ſcarica del quadro non è più capace d' imprimerne veruna parte nella boccetta, e non ne moſtra ſe non l' ultimo grado applicando l' arco immediatamente alle oppoſte armature del quadro ſteſſo; nel quale alcun ſoſpetto di luce pungente arriva talvolta a ſentirſi ſino ai pollici trentaſei. Se però ai trenta pollici finiſce la ſerie della ſcuotente forza impreſſa nel quadro, non finiſcono i moti del pendoletto cadente lungo la ſua armatura oppoſta alla punta. Hanno que' moti diſtinta eſpreſſione pel confronto delle ſerie ſeguenti, e per l' applicazione de' corollarj alla generale teoria. Perciò ne ripiglieremo l' oſſervazione dal contatto fino alle più rimote diſtanze per determinare così ſenza ambiguità i no-

mi, che comunemente ſi uſano troppo confuſi di elettrica *ripulſione*, *attrazione*, *e adeſione*.

3. Poſta la punta in contatto dell' armatura al primo girar del diſco oſcilla, e ſi agita rapidamente il filo del pendoletto intorno alla punta, e s' inalza, e ſi eſtende un ſeno del filo ſteſſo ſecondo la lunghezza della punta. Indi finchè ſi gira il diſco tanto il filo, come il globetto ſi combacia con forza coll' armatura ſteſſa, e ſimilmente ſi combacia lungo la punta quel ſeno, che ſporge dal filo.

Abbiamo pertanto nelle parti dello ſteſſo filo due adeſioni contemporanee, una del globetto e della maggior parte del filo coll' armatura, l' altra col corpo della punta per quel ſeno del filo, che in fuori lungo la ſteſſa ſi eſtende.

4. Per diſcernere da qual coſa dipendano, e d' onde naſcano queſte due adeſioni, oſſervo, che finiti i giri ceſſano eſſe immediatamente; e il filo ſi tende, e reſta vibrato in fuori dalla faccia del quadro in proporzione della carica impreſſa. Onde ſi conclude, che dipendono, e naſcono dalla azione ſteſſa, che ſi eccita coi giri del diſco.

5. Ma per diſtinguere, ſe quelle adeſioni derivino dalla ſola azione della punta, o da altra azione inſieme procedente, o accumulata dal quadro; e per tentare in oltre qual coſa abbiano di comune, e quali modi, o cauſe diſtinte; mentre ſi gira il diſco io tocco inſieme colle dita le due oppoſte armature del quadro, ſicchè da queſto poſſa ſol tanto procedere qualche azione, ma non poſſa in eſſo accumularſi. E ſuccedono quelle oſcillazioni, che notai da principio, del filo intorno al corpo della punta; anzi creſcono quelle aſſai notabilmente, e il filo, e il pendolo s' inalza, e ſi eſtende per fino al tubo lungo la punta, colla quale tutto talvolta ſi combacia in certa doſe di elettricità. Talchè in queſto ſtato del quadro per quanto continuino i giri del diſco reſta ſempre qualche adeſione del filo, e del globetto colla punta, o col tubo; e niuna mai del filo, nè del globetto coll' armatura del quadro.

Indi concludo, che l'adeſione della parte del filo al corpo della punta dipende dall'azione dei giri per la via della punta, o del tubo, e da qualche coſa, che procede dal quadro, ma non da ciò, che ſul quadro ſi accumula.

6. E viceverſa l' adeſione del filo, e del pendoletto coll' armatura del quadro, ſiccome non ſuſſiſte, che nella ſucceſſione dei giri, nè mai ha luogo, nè ſi mantiene ſe non ſenza quel contatto delle oppoſte armature, il qual contatto impediſce ogni accumulamento di azione, e di carica nel quadro; perciò l'adeſione ſteſſa dipende dall'atto, con cui ſi fa quella ſucceſſiva accumulazione nel quadro.

7. Ma non perciò naſce dalla materia ſteſſa nel quadro accumulata. Poichè col finir dei giri, benchè quella materia accumulata ſuſſiſta, più non ſuſſiſte con eſſa nè la prima, nè queſta adeſione. Che anzi ſi ſcoſta il pendolo e dalla punta, e dall' armatura, e paſſa in divergenza dall' armatura, della quale divergenza parleremo più opportunamente nella ſerie ſeguente.

8. Seguiterò in queſta ſerie a notare gli accidenti delle adeſioni, e de' moti nelle ſucceſſive diſtanze. Scoſtando il quadro ſegue nel cominciar dei giri l' agitazione, e ſegue indi il combaciamento del filo ſull' armatura fino oltre la diſtanza di quattro pollici; e quel ſeno riſtretto, e ſporto in fuori ſi fa or più, or meno eſteſo, e ſi dirige quaſi che foſſe un'altra punta ſecondo l'aſſe della punta del tubo. Ma al di là dei quattro pollici comincia quel ſeno a gonfiarſi, e ſi ſtacca così il filo dall' armatura a poco a poco nelle ulteriori diſtanze, finchè tutto il filo ſi gonfia in arco verſo la punta, reſtando, come è per la ſuperior parte, attaccato all' armatura, e rimanendo il pendolino aderente verſo il fondo dell' armatura ſteſſa, quaſi che ivi pure foſſe attaccato.

9. Quando però arriva verſo i limiti dell' iſolamento ai quattordeci pollici finiſce anche l' adeſione del pendoletto, e queſto inſieme col filo ſi vibra in fuori dell' armatura verſo il tubo con grande divergenza, finchè continuano i giri del diſco. Finiti queſti ſuccede qui al contrario di ſopra al numero quarto. Poichè ivi col finir dei giri paſſa dall'adeſione ad ampia divergenza; qui cade col finir dei giri, e reſta quaſi inerte ſoltanto teſo dal proprio peſo; ſe non che ritiene alcuna tenue divergenza in proporzione della carica, che a tale diſtanza ancor s' imprime nel quadro.

10. Nelle ſucceſſive diſtanze poi, ove la carica è minore, e poi oltre i trenta pollici, ove è nulla, continua nell' atto

dei giri a mantenerſi vibrato ampiamente, ma col finir di eſſi cade affatto, come inerte.

E' una tal divergenza notabile fino ai pollici trenta ſei, indi ſi fa ſucceſſivamente minore; e ai quaranta non oltrepaſſa più d' un pollice e mezzo la diſtanza dall' armatura; e finalmente ai cinquanta pollici ſi riduce lo ſcoſtamento a poche linee, e più in là non è d' ordinario ſenſibile.

11. E ſiccome nelle minori diſtanze notate al numero quinto ha luogo l' adeſione del filo alla punta, e al tubo fino verſo i limiti dell' iſolamento; così nelle maggiori ha luogo nell' atto dei giri l' inclinazione, o tendenza dello ſteſſo filo verſo il tubo, anche quando ſi toccano in tal atto inſieme le oppoſte armature del quadro.

12. Nè ſi debbe laſciare di ben diſtinguere queſta tendenza da quella, di cui parlai al numero quarto, e ſettimo. Che queſta non ha verun rapporto a ciò che nel quadro ſi accumula, mentre ſuſſiſte nelle maggiori diſtanze, quando nulla giammai ſi accumula nel quadro, e quando pel contatto delle armature nulla può accumularſi, e ſuſſiſte ſoltanto inſieme ai giri, e colla continuata azione della punta, o del tubo; e perciò ſi dice *attrazione* del tubo. Quella per oppoſto non è ſe non proporzionata a ciò, che nel quadro ſi è accumulato di carica; e ſiccome ſuſſiſte finiti i giri, non ſembra punto dipendere dall' azione, o preſenza del tubo, e perciò ſi dice *ripulſione* del quadro.

OSSERVAZIONE I.

Ritenendo la ſteſſa attività della macchina variai in due modi l' oppoſto quadro. Soſtituii in vece del primo ſottile un altro di eguale grandezza in ſuperficie armata, ma di groſſezza aſſai maggiore; e la carica a diſtanze eguali al primo s' impreſſe in queſto notabilmente minore. Indi poſta eguale la groſſezza del vetro, variai la grandezza di ſuperficie del vetro armato; e trovai, che quanto la ſuperficie armata ſi fa minore tanto più prontamente a diſtanze eguali al primo aſcende a maggior vivacità, e ſi accoſta al ſommo in proporzione della capacità la carica impreſſa. Per oppoſto niuna carica s' imprime nei quadri più grandi a tali diſtanze dalla punta, ta, alle quali ancor ſi carica una bozzetta, o un quadro aſſai piccolo.

Onde ne ſeguono due corollarj

1. *Nei più ſottili quadri ancor s' imprime alcuna carica colla ſteſſa elettricità, e alle ſteſſe diſtanze, nelle quali niun cenno ſe ne imprime nei più groſſi quadri.*

2. *Ed i quadri di minore armatura ancor ricevono carica con tale forza di elettricità, e a tali diſtanze, nelle quali nulla ne ricevono i quadri di più eſteſa armatura.*

OSSERVAZIONE 2.

Dovrebbe in oltre provarſi in ſimile ſerie la varietà delle paſte, o doſi de' vetri, o criſtalli diverſi ſotto le medeſime dimenſioni, e diſtanze, e dovrebbero ridurſi a dimenſioni eguali altre lamine di varie ſoſtanze atte a ricever la carica, come le reſine, i zolfi, e ſimili per ſoggettarle del pari a tal ſorta di ſperienze, e riconoſcerne la riſpettiva capacità fra loro, e con le eguali lamine di vetro. Naſcerebbero così inſieme alle due della precedente oſſervazione quattro nuove ſerie di ſperienze, cioè la prima dei quadri variati nella ſola *groſſezza* del vetro; la ſeconda dei medeſimi variati nella ſola *grandezza di ſuperficie armata;* la terza delle varie *paſte*, o *doſi* di vetri nella ſteſſa groſſezza, e grandezza: la quarta in fine di ſomiglianti lamine di tutte le *ſoſtanze dal vetro diverſe*, che atte ſono a ricever carica. Ardua per verità, e lunga è la via nella preparazione, e nel compimento di tante ſerie; ma fuori di queſta altra non ve n' ha, che ſtia fra i confini del vero.

OSSERVAZIONE 3.

Oltre alle due prime ſerie, che nella prima oſſervazione incominciai, e le due altre, che nella ſeconda non feci che proporre da farſi, ne ho cominciata una nuova ſerie, che ſu tutte le precedenti ſi eſtende; ed è il cangiamento di attività nella macchina per ridurre così gradatamente minore l' elettrica quantità procedente dal tubo, e dalla punta. Trovai in tal modo, che *quanto ſi fa minore l' elettricità, tanto diventa più* *inſufficiente ad imprimere carica ne' quadri più grandi in pari diſtanze, che in altri minori; e in fine poſta certa grandezza del quadro, neppure a contatto più non s' imprime verun cenno di carica collo ſteſſo numero di giri, che è ſofficiente per far carica notabile in un quadro minore.*

OSSERVAZIONE 4.

Ed a queſta differenza di carica impreſſa con la minore elettricità corriſpondono le differenze de' moti nella quinta ſerie deſcritti principalmente ai numeri terzo, ottavo, e ſeguenti. Poichè quel filo del pendolo, che con forte elettricità ſi comprime ſull' armatura, e ſtende ſuori un ſeno riſtretto in forma di punta, quel filo ſteſſo appena nelle minori diſtanze ſi gonfia, e poi non fa che vibrarſi in fuori, quando l' elettricità della punta è aſſai debole, nè è capace d' imprimere ſe non tenue, o niuna carica nell' oppoſto quadro. Talchè *accade in proporzione con minore elettricità nelle minori diſtanze lo ſteſſo, che con maggiore elettricità ſuccede nelle diſtanze maggiori.*

OSSERVAZIONE 5.

Tentai in queſto ſteſſo degradamento di attività della macchina, ſe con minore quantità di eccitamento ſi poteſſero nel quadro imprimere cariche proporzionali a quelle, che con maggiore s' imprimono; e ſe coll' accreſcere tanto più il numero de' giri, quanto è minore l' eccitamento, ſi ragguagliaſſero al fine le cariche. E qui riconobbi più che mai fallace il ragionar per analogia. Poichè ben lungi da ſimili ragguagli col reciprocare il numero de' giri alla quantità di eccitamento non incontrai di fatto ſe non aberrazioni da tutto ciò, che ſembrava più conforme all' analogia, e al raziocinio. Il che m' induſſe a diffidare di quelle ſemplici, e facili ragioni, e leggi, alle quali pur ſi vorrebbero ridurre gli elettrici principj. *Simili aberrazioni ſono prove dirette della falſità, e inſufficienza de' principj, che ſi ſuppongono ſemplici*. Non è l' analogia che c' inganni; ma noi vogliamo ingannarci ſoggettando alla ſemplicità delle noſtre ſuppoſizioni i complicati fenomeni della natura.

PREPARAZIONE.

Fiſſo nell' armatura del quadro una punta verticale di filo d'ottone in groſſezza eguale a quella del tubo, e lunga quattro pollici, la quale punta mira direttamente l'oppoſta ſecondo l' aſſe del tubo. Il filo del pendolino non è più attaccato all' armatura, ma al fondo della punta, ſicchè pende verticale diſcoſto circa due linee dall' armatura ſteſſa. E ripiglio nel rimanente colla ſteſſa preparazione, e attività della macchina, che uſai nella precedente ſerie, la ſeguente

SERIE 6.

1. Dal contatto delle due punte fino alla diſtanza d' un pollice s' impreſſe con quindeci giri nel quadro ſempre uguale forza di carica, che ſi eſtinſe con quattordeci ſcariche della conſueta boccetta.

2. Ai due pollici finì in tredeci; ai quattro in dieci; agli otto in otto; ai quattordeci in tre; ai diciotto in due ſcariche della boccetta. Ai ventiquattro pollici è ancor ſenſibile tra il pollice, e l'indice la ſcarica del quadro; ma nulla imprime nella boccetta. Ai pollici trenta d' ordinario più niun ſenſo di ſcarica nel quadro, e ſoltanto alcuna volta qualche cenno di puntura, e di luce.

3. Qui pure i moti hanno particolare eſpreſſione pel contraſto colla ſerie precedente. Dal contatto delle punte fino alle ultime diſtanze, nelle quali ſono ſenſibili que' moti, ſuccedono eſſi blandamente, e progrediſcono con uniformità di accidenti ſenza veruna oſcillazione, o agitazione impetuoſa. Al primo girar del diſco ſi ſcoſta alquanto il pendoletto, indi ſi accoſta all' armatura ſenza che però il filo reſti notabilmente gonfio in fuori finchè continuano i giri; col finir dei quali continua a reſtar aderente, nè ſi ſtacca, nè ſi vibra alquanto in fuori ſe non nell' atto, che ſi fa per cavar la ſcarica dal quadro. Queſti moti non ſono più affatto ſenſibili al di là dei quaranta due pollici fra le due punte.

4. Quando però nel contatto delle medeſime, e nelle minori loro diſtanze s' imprime ancor notabile carica nel qua-

dro, precedono nel pendoletto le ſteſſe vicende, ma in fine ſi ſtacca da sè nell' atto che continuano i giri del diſco, e ſi conſerva vibrato anche finiti i giri, finchè dura tal forza di carica, che ſi eſtingue con tre, o quattro ſcariche della boccetta. Talvolta però reſta aderente anche finiti i giri, benchè nel quadro vi ſia maggior forza di carica; e in tal caſo ſi vibra in fuori alla prima ſcarica, che la frappoſta boccetta cava dal quadro, e ſi mantiene vibrato in fuori perſino alle tre, o quattro ultime, ſiccome poco fa notai.

5. Provai qui ſimilmente a toccare di continuo col pollice, ed indice le oppoſte armature del quadro nell' atto, che continuano i giri del diſco, come feci nella ſerie quinta al n. 5. Ma non comparve così verun moto nel pendoletto, ſiccome neppur un cenno di elettricità ſi raccolſe nel quadro.

Quella divergenza adunque del pendolo, che chiamai di attrazione, e che ſuſſiſte colà tanto notabile in ſimil caſo ſenza la punta, reſta qui tolta affatto per la ſola addizione della punta.

6. Siccome pure per queſta ſola addizione ſvanì nell' atto dei giri ogni adeſione, e combaciamento del filo coll' armatura, benchè aſſai forte s' imprimeſſe nel quadro la carica; nè reſtò ſe non fino a certo limite la blanda adeſione del ſolo globetto coll' armatura.

7. All' oppoſto quella divergenza, che da forza della carica impreſſa nel quadro dipende, e che chiamai di *ripulſione*, comincia qui d' ordinario, e ſuſſiſte dentro i limiti dell' iſolamento, e nelle minori diſtanze in proporzione, che creſce la carica anche nell' atto, che continuano i giri, ſiccome notai al numero quarto.

8. Rimane da cercarſi, ſe queſta divergenza di ripulſione naſca realmente da ſola forza eſpanſiva della carica impreſſa, e permanente nel quadro. Dalla precedente ſerie già è manifeſto il contrario, mentre finchè ivi continuano i giri del diſco, e vie più ſi accumula piena forza ſcuotente nel quadro dal contatto fino oltre la diſtanza di quattro pollici, ben lungi dal comparire ſimile ripulſione reſtano il filo, e il globo combaciati, e compreſſi ſull' armatura iſteſſa (*Ser.* 5. *n.* 3. 8.). Finiti poi i giri ſi vibra ivi in fuori il pendolo in proporzione della carica, come qui ſi vibra nella ſteſſa proporzione molto prima, che finiſcano i giri.

9. Per accertarmi dunque vie più, che sì fatta ripulſione non dipende altrimenti da veruna forza eſpanſiva della carica impreſſa nel quadro, oſſervo, che continua fin verſo le tre, o quattro ultime ſcoſſe, che reſtano ancor da cavarſi dal quadro, e perciò con tale reſiduo di carica più non rimane ſenſibile quella ripulſione. Oſſervo di più, che anche nella piena forza della carica ſiffatta ripulſione dipende dalla comunicazione, che per mezzo dei due fili di ottone ritiene col ſuolo l' oppoſta faccia del quadro. Poichè ritirando que' fili, e rendendo così iſolate ugualmente ambedue le facce armate del quadro, baſta che ſi tocchi la faccia, da cui ſembra ripulſo quel pendolo, perchè eſſo cada inerte ſenza veruna vibrazione; e per eccitar nuovamente, e accreſcere aſſai più, che non era da principio tale vibrazione, baſta che ſi tocchi l' oppoſta armatura.

Onde non dipende da veruna forza eſpanſiva propria dell' intera carica, nè di verun reſiduo di carica; ma da certa corriſpondenza di azione dell' oppoſta faccia del quadro.

10. Con queſto quadro così iſolato provo in oltre, che quando il pendolo è vibrato in fuori, ſiccome decade accoſtando il dito all' armatura, e cade poi affatto pel contatto della ſteſſa, così quando è vibrato in fuori, ſe in vece di accoſtare il dito all' armatura, l' accoſto al globetto del filo, io lo inalzo, o lo vibro di più, e lo guido, e lo dirigo in qualunque parte, verſo la quale lo invito con preſentare il dito. Onde ſiccome nel precedente numero ſi moſtrò ſuſſiſtere l' intera carica, e qualunque ſuo reſiduo ſenza veruna forza eſpanſiva eſterna efficiente di quella ripulſione; così dalla preſente oſſervazione riſulta, che naſce da vera azione mutua di attrazione fra il dito, e il pendolo quella eſterior vibrazione, e perciò meglio ſi riduce ad un cambio di relazione, oſſia ad attrazione con qualche eſterna materia, che non a meccanica forza eſpanſiva del corpo, a cui appartiene.

E ciò s' intende non ſolo dalle facce dei quadri carichi, ma ſimilmente ſi applica a tutti i moti, che ſi dicono di elettrica *ripulſione*.

11. E per l' oppoſta ragione appariſce, perchè colla punta al quadro ſi eſtenda appena ai quaranta due pollici (ſopra *n.* 3.) un cenno di que' moti, che ſenza punta arrivano aſſai

notabili ſino ai cinquanta (*Ser.* 5. *n.* 10.). Poichè ſiccome ſenza punta al quadro la mutua azione colla punta del tubo ſi fa principalmente per via del pendolo, che ſporge innanzi all' armatura; così la punta ſpinta aſſai più innanzi, che non è il pendolo, raccoglie in ſe ſteſſa, o porta previamente nel quadro quella mutua azione, che più non può eſtenderſi nè al globetto, nè al filo.

12. Per rendere ſuperiore ad ogni ſcrupolo la preſente induzione, replicai col quadro da ambe le parti iſolato, e ſenza punta le ſperienze ora deſcritte nei numeri 9, e 10, nè vi fu altra differenza, ſe non che ſenza punta ſuccedono que' moti più continui, e veementi. Onde la punta non fa che dividere, o raccogliere in sè la mutua azione eſteriore, che ſi fa per la ſola via del filo, e del globetto nel quadro ſenza punta.

PREPARAZIONE.

Ritenendo la ſteſſa della precedente ſerie non altro cangio, ſe non la punta di quattro pollici, alla quale altra ne ſoſtituiſco in tutto ſimilmente poſta, e ſimile, fuorchè nella lunghezza, la quale è qui di pollici dodeci.

SERIE 7.

1. Nel contatto s' imprime carica, che ſi eſtingue in tredeci della boccetta.

2. Ad un pollice ſi eſtingue in dodeci; ai due in dieci; ai quattro in nove; agli otto in ſette; ai quattordici in tre; ai diciotto in una ſcarica della boccetta. Ai ventiquattro ancor carica ſenſibile nel ſolo quadro; e fino ai trenta talvolta è ſenſibile la luce, e puntura tentando di cavar la ſcarica.

3. I moti di adeſione del pendoletto finiſcono qui ai pollici trentaſei; e fino ai quaranta durò qualche accoſtamento; poichè vi fu ſcoſtamento nel toccare finiti i giri le oppoſte facce del quadro.

PREPARAZIONE.

A queſta punta d' un piede altra ne ſoſtituiſco d' ottone ſimile, del doppio più lunga, cioè di pollici ventiquattro; e con quindeci giri ad ogni atto rinnovo altra ſerie, come la precedente.

SERIE 8.

1. A contatto non è più la carica, ſe non capace di ſuſſiſtere fino alle dodeci ſcariche della boccetta.

2. Ad un pollice finiſce in undeci; ai due in dieci; ai quattro in nove; agli otto in ſei; ai quattordeci in tre; ai diciotto in due; ai ventiquattro nel ſolo quadro; ai trenta vi fu ancor luce pungente toccando le oppoſte armature del quadro.

3. I moti non ſi eſteſero più oltre dei pollici trentaſei.

PREPARAZIONE.

Volendo in fine meglio diſcernere gli effetti di mutua azione delle ſole punte ſenza verun ſoſpetto di azione diretta della punta del tubo colla oppoſta armatura del quadro; e volendo vie meglio determinare fino a quanto ſi eſtenda la diretta azione della prima punta, che dal tubo procede nell' oppoſta punta, che parte dall'armatura, frapposi una lamina di vetro più grande del quadro ben pulita, e ſenza veruna armatura, diſtante otto pollici dal quadro ſteſſo, ſopra la quale piegai la punta lunga due piedi, e preſentai queſta al ſolito a quella prima nelle ſeguenti diſtanze.

SERIE 9.

1. Nel contatto con quindici giri di fortiſſima elettricità non oltrepaſsò mai le undeci ſcariche della boccetta.

2. Ad un pollice finì in dieci; ai due in nove; ai quattro in otto; agli otto in ſei; ai quattordeci in tre; ai diciotto più nulla s' imprime nella boccetta, e nel ſolo quadro

è ſenſibile la ſcoſſa. Ai ventiquattro appena è ſenſibile la ſcintilla toccando immediatamente le oppoſte armature: ai ventiſei non vi è più il minimo indizio di luce.

3. I moti non ſi diſcernono più in là dei pollici ventiquattro, e ſono di tenuiſſimo ſcoſtamento, e accoſtamento; e progrediſcono nelle minori diſtanze que' moti aſſai tenui. Ai pollici otto continua il globo a ſtar aderente, nè ſi ſcoſta, ſe non cavata la prima ſcarica della boccetta con divergenza d' arco d' un pollice. Ai pollici quattro ſi ſcoſta in fine da sè, quando è aſſai forte la carica impreſſa. Ma tanto qui, come nelle minori diſtanze la ſua divergenza non è più ſenſibile, quando più non reſtano nel quadro, che tre ſcariche della boccetta. Siccome in tutte le ſerie precedenti non comincia mai nell' atto dei giri, nè col finir di eſſi tal divergenza, quando la carica impreſſa non è capace di dar almeno quattro ſcariche della conſueta boccetta.

OSSERVAZIONE 6.

Dopo le prime due, e le due ſeguenti ſerie di ſperienze calcolai nella prima Parte i fenomeni delle elettriche punte in ciaſcuna ſpecie di elettricità ſecondo le ſemplici ragioni diretta delle diſtanze, e inverſa degl' iſolamenti; e con quelle proporzioni calcolai ſimilmente ne' primi otto teoremi i fenomeni delle punte medeſime nelle oppoſte ſpecie di elettricità. Se in quelle ſemplici ragioni d' iſolamento, e diſtanze ſi terminaſſero le differenze di ogni elettrica azione, proſeguirei ora a calcolar ſimilmente le cinque ultime ſerie. Ma ben altre vie di calcolo forza è d' intraprendere e per determinare preciſamente gli elementi delle punte, e per internarci così nella cognizione delle elettriche potenze. Poichè quanto quelle ragioni ſono diſtinte, e certe in riguardo a que' particolari fenomeni, tanto ſono limitate, e ipotetiche per l' applicazione loro alla generale teoria. Onde non altro io ne derivai ne' teoremi della prima Parte, ſe non i principali elementi delle punte, e ne riſervai le teoriche applicazioni dopo le ultime ricerche da farſi nella ſeconda, e terza Parte.

Ora per entrare ordinatamente in ſimili ricerche aggiungerò alle precedenti ſerie di reſinoſa elettricità alcune oſſervazioni,

zioni, che le ragioni comprendono di tutti gli elementi, che concorrono a compiere l'azione delle punte nella ſteſſa ſpecie di elettricità; nè punto ci occuperemo a calcolarne alcuno ſingolarmente.

Due cauſe mi muovono a proceder in ſimil guiſa. Primieramente le compoſte ragioni, che nelle preſenti oſſervazioni raccolgo, mi porgono più adequato, e ſpedito confronto con le corriſpondenti ragioni, che dedurrò dalle cinque ſerie ſeguenti di vitrea elettricità; e tutte queſte inſieme poſſono poi ſimilmente confrontarſi colle ragioni, che dedurrò nel capo ſeguente dalle ſerie di ſuperſicie oppoſte a ſuperficie non meno nella reſinoſa, che nella vitrea.

L'altra cauſa poi, che mi determina a raccogliere così quelle compoſte ragioni, ha principalmente per oggetto di ben diſtinguere i termini, e le differenze tutte, che in qualſivoglia modo concorrono a comporre le ſteſſe ragioni; eſſendo che unitamente con queſta diſtinta cognizione, e non altrimenti ci è lecito di calcolare que' termini, e quelle differenze ciaſcuna per ſe ſteſſa ſecondo le diſtinte ſerie di ſperienze, che ſingolarmente ſaranno fatte, o propoſte da farſi. Onde ne riſulteranno gli ultimi teoremi, che all' analiſi delle punte daranno compimento.

Coroll. 1. Nella ſteſſa ſpezie di reſinoſa elettricità la punta procedente dal tubo imprime nell' oppoſto quadro maggior forza di carica, e ne eſtende nello ſteſſo gli elettrici ſegni a maggiori diſtanze, quando è fornito d'armatura piana, e ſenza punta, che quando dall'armatura ſteſſa parte un'altra punta oppoſta alla prima.

Coroll. 2. E ſimilmente la carica, e gli altri elettrici ſegni eſteſi nel quadro dalla ſteſſa punta di reſinoſa elettricità ſi fanno minori, quanto più creſce la lunghezza della punta procedente dall' armatura, e oppoſta alla prima del tubo.

Coroll. 3. E in fine la carica, e gli elettrici ſegni impreſſi nel quadro dalla ſteſſa punta di reſinoſa elettricità ſi fanno ancor minori, ſe s' impediſce ogni mutua azione fra la punta del tubo, e l' oppoſta armatura del quadro, benchè intera ſuſſiſta l' azione delle due oppoſte punte fra loro.

OSSERVAZIONE. 7.

Per immediata oſſervazione delle ultime precedenti ſerie riſulta

1. Che la punta procedente dal condottore di reſinoſa elettricità non fa veruno ſcoppio di ſcintilla contro l' oppoſta armatura, e contro l' oppoſta punta oltre la diſtanza di tre linee; indi nelle maggiori diſtanze fino ai pollici 24 ſegue ad indurre nel quadro la carica ſenz' altro ſtrepito di ſcintilla.

2. Che ſe a fianco del tubo ſi preſenti una ſpranga metallica terminante in globo groſſo mezzo pollice, reſta per tal modo ſcemata l' elettricità del tubo anche a diſtanza d' un pollice, e mezzo; ma non perciò ſcoppia veruna ſcintilla tra il tubo, e il globo preſentato neppure alla diſtanza di due linee.

3. E ſoltanto quando la punta oppoſta, e il quadro ſono lontani dalla punta del tubo più d' un piede, ſcoppia la ſcintilla fra il tubo, e il globo preſentato alla diſtanza di tre in quattro linee.

OSSERVAZIONE 8.

Or quali ſono le differenze, e i modi, che maggiore, o minore ci rendono la carica impreſſa, e gli altri elettrici ſegni? Poichè in fine in quelle differenze, e in que' modi s' involge la compoſta ragione, che ſtiamo rintracciando. Tentiamo prima d' ogni altra indagine di riconoſcere ad una ad una partitamente quelle differenze e que' modi.

E quanto alla elettricità in ſe ſteſſa ſoggiace a tre principali differenze.

1. Sotto la ſteſſa quantità può variare la ſpecie, e la qualità, che dicemmo ne' precedenti teoremi *forza ſpecifica*.

2. In ciaſcuna ſpecie è varia in oltre la *quantità*, che ad ogni giro del diſco ſi eccita.

3. E poſta anche la ſteſſa quantità, e la ſpecifica forza può variare ſecondo la *grandezza*, *e la figura* del condottore, in cui ſi raccoglie, e da cui all' oppoſto quadro procede.

E queſte tre differenze di *ſpecifica forza*, di *quantità*, e di *grandezza*, *e figura del condottore*, ſiccome tutte riguardano l' interiore ſtato della elettrica azione, che indi paſſa nel mezzo ambiente, e nell' oppoſto quadro, le comprenderò inſieme col comune nome di *interne differenze*.

Alle interne ſuccedono le altre, che dal mezzo ambiente dipendono, il quale per eſſere frappoſto tra il condottore, e il quadro ci dà luogo di eſprimerle tutte col nome ſolo di *frappoſte*, *o ambienti differenze*. E proſeguendo a numerarle dopo le prime appartengono qui, 4. la ſpecie, e l' eſtenſione dell' iſolamento, oſſia de' corpi, che il condottore ſoſtengono, e circondano; 5. le qualità dell' aria, o di altro corpo ambiente, ſpettante all' iſolamento; e tali qualità particolarmente ſi riducono a denſità, o rarità; 6. a calore, o freddo; 7. umidità, o ſiccità; 8. purità, o miſtura di arie o particelle diverſe; 9. alla groſſezza ſteſſa dello ſtrato frappoſto tra l' eſtremità del condottore, e l' eſtremità della ſuperficie, o di altro, che dalla ſuperficie proceda dell' oppoſto quadro, la quale groſſezza ſi eſprime colle diſtanze, che in ogni atto di ciaſcuna ſerie vengano ſegnate.

Sono adunque ſei le *differenze frappoſte*, come tre da principio ſi notarono le interne.

Rimangono le differenze ſpettanti all' oppoſto quadro, che perciò ſi diranno *oppoſte*. Quando non vi è quadro dipendono le oppoſte differenze dai condottori, che naturalmente s' incontrano negli eſteriori limiti del mezzo ambiente, ed i medeſimi uniſcono l' azione loro con quella del quadro, quando queſto ſi rimuove oltre i limiti dell' iſolamento. E per numerar queſte inſieme alle precedenti, ſarà 10. la figura varia dell' oppoſta armatura, cioè o piana come nella ſerie quinta; 11. o fornita di punte di varia lunghezza, come nelle ſerie ſeſta, ſettima, ottava, e nona; 12. in oltre ſotto la ſteſſa figura può variarſi la grandezza, o eſtenſione della ſuperficie del vetro armata, come nella ſerie, che in ſecondo luogo accennai nelle oſſervazioni prima, e ſeconda; 13. e può in fine ridurſi a nulla l' armatura, e reſtar nuda la faccia del quadro; 14. e ritenendo queſta faccia armata può l' eſteriore, e inverſa faccia del quadro ſteſſo eſſere armata egualmente; 15. ovvero inegualmente più, o meno; 16. ovvero ridurſi l' eſteriore ſola affatto nuda, e ſenza veruna armatura; 17. e poi ritenendo egualmente armate le due ſacce del quadro, ora ſi toglie l' iſolamento delle due armature fra loro, ſiccome abbiamo fatto nelle ſerie quinta, e ſeſta al n. quinto; 18. ora ſi toglie l' iſolamento dell' armatura ſola, che guarda il condottore, e ſi fa comunicare col ſuolo; 19. ora ſimilmente ſi toglie il ſolo iſolamento eſteriore dal ſuolo con applicare all' eſteriore armatura due fili metallici, come ho fatto in tutte le ſerie precedenti; 20. ed ora ſi rende anche la ſteſſa armatura iſolata ritirando que' fili; 21. Reſtando in fine uniformi tutte le precedenti differenze, ſi preſentano le altre, che inſieme alla duodecima indicate abbiamo nella oſſervazione ſeconda, e ſono la diverſa groſſezza del vetro; 22. o le diverſe paſte, o doſi del vetro ſteſſo; 23. e le altre ſoſtanze dal vetro diverſe, che atte ſono a ſormar lamine reſiſtenti, o quadri armati ſecondo le loro varietà. 24. ed eſaurite infine, e reſe pari tutte queſte oppoſte differenze, che hanno luogo nella ſteſſa, come nelle diverſe ſpecie di elettricità, rimane l' ultima differenza, che ne' precedenti teoremi indicai col nome di ſpecifica mobilità.

Separando queſte dalle tre prime interne, e dalle ſei frappoſte, quindeci rimangono le *oppoſte* differenze.

Ma la prima delle interne, che è la *ſpecifica forza*, e l' ultima di queſte, che è la *ſpecifica mobilità*, non hanno luogo nella ſteſſa ſpecie, e coſtituiſcono perciò le ſpecifiche differenze della reſinoſa, e della vitrea elettricità. Prima dunque di ridurre a calcolo diſtinto le differenze delle cinque precedenti ſerie ſeguiterò ordinatamente le corriſpondenti di vitrea, che le combinazioni eſauriſcono di punte oppoſte; e ripiglierò nel capo ſecondo le combinazioni di ſuperficie oppoſte a ſuperficie nell' una, e nell' altra ſpecie di elettricità, dopo le quali tenterò di ſtabilire le vie, e i termini per calcolare tutte inſieme le interne frappoſte, e oppoſte differenze, che comuni ſono alle due ſpecie, acciò poſſano libere, e ſpogliate da ſimili differenze riconoſcerſi la ſpecifica forza, e la ſpecifica mobilità della reſinoſa, e della vitrea. Onde concluderò queſte prime ſerie di reſinoſa col ſeguente

LEMMA PRIMO.

D' uopo è calcolare diſtintamente le differenze tutte, che ridotte abbiamo ad interne, frappoſte, ed oppoſte nella ſteſſa ſpecie di elettricità, e dedurne con particolari ſerie l' eſatta miſura per farci ſtrada a calcolare in fine per ſe ſteſſa la ſpecifica forza, e la mobilità delle oppoſte elettricità, e ſtabilire così non equivoci principj della nuova Teoria.

CON VITREA ELETTRICITA'.

PREPARAZIONE.

Rinnovo la preparazione della ſerie quinta, e comincio a replicare con vitrea elettricità quelle cinque conſecutive ſerie già fatte colla reſinoſa. Non vi è altra differenza, ſe non che nella reſinoſa riduſſi tutte le ſerie a quantità di elettricità eccitata preſſochè uguale, ed uniforme con uguale numero di giri. In queſte di vitrea ritengo dal principio al fine di ciaſcuna ſerie l' uguaglianza, ed uniformità di eccitamento, e del numero dei giri; nelle ſerie poi conſecutive cangio dall' una all' altra la quantità di eccitamento, e non ſerbo per comune miſura, ſe non il numero dei giri, che ſono quindeci in ciaſcun atto. Con ciò non reſtano più interamente comparabili le ſerie fra loro per difetto di uniformità della prima miſura, che alla quantità corriſponde in ciaſcun giro eccitata; ſono però tuttavia comparabili per l' altra miſura, e per le proporzioni corriſpondenti alla varietà della prima miſura, oſſia alla varia quantità di eccitamento.

SERIE 10.

1. A contatto finì la carica in tredeci ſcariche della conſueta boccetta.

2. Ad un pollice finì alle undeci; ai due alle nove; ai quattro alle ſei; agli otto alle tre; ai quattordici ad una; ai diciotto non imprime più il quadro veruna carica nella boccetta, e ſoltanto rende per sè una ſcoſſa ancor ſenſibile.

Ai ventiquattro pollici dà il quadro appena un cenno di ſcintilla pungente; ai trenta appena un cenno di luce.

3. I moti progrediſcono qui come nella ſerie quinta. Se non che lo ſcoſtamento del pendolo dall' armatura comincia più preſto, cioè a minori diſtanze, e finiſce poi alquanto più tardi, cioè ſi rende più notabile alle maggiori diſtanze.

PREPARAZIONE.

La ſteſſa della ſerie ſteſſa.

SERIE 11.

1. A contatto finiſce la carica in tredeci.

2. Ad un pollice arriva alle undeci; ai due alle dieci; ai quattro alle otto; agli otto alle quattro; ai quattordeci ad una. Ai diciotto non ha, che il primo grado di carica, nè imprime neppur un cenno nella boccetta. Ai ventiquattro il primo cenno di ſcintilla pungente nel quadro. Ai trenta appena un cenno di luce.

3. I moti qui pure procedono come nella ſerie ſeſta; ſe non che qui finiſcono più preſto, che nella corriſpondente reſinoſa; cioè alla diſtanza di trentaſei pollici non vi è che talvolta un ſoſpetto di accoſtamento, e comincia per oppoſto la divergenza anche più preſto, che nelle corriſpondenti di reſinoſa; cioè ſi ſcoſta il pendolo in proporzione, che creſce la carica nell' atto, che continuano i giri del diſco anche nelle minori diſtanze.

PREPARAZIONE.

Come nella ſerie ſettima.

SERIE 12.

1. E' tanto minore l' eccitamento di elettricità, che a contatto delle punte con quindeci giri non imprime nel quadro ſe non tanta carica, che finiſce in otto ſcariche della conſueta boccetta.

2. Ad un pollice finiſce in quattro ; ai quattro in due; agli otto in una. Ai quattordici l' ultimo grado di ſcuotente nel quadro , che non è capace d' imprimere verun cenno nella boccetta. Ai pollici ſedeci appariſce nel quadro l' ultimo cenno di luce.

3. Si ſcoſta qui pure il pendolo dopo i primi giri in proporzione , che creſce la carica fino ai pollici quattro , oltre i quali non vi è più verun moto, ſiccome non vi è più forza di carica maggiore di due ſcariche della boccetta.

OSSERVAZIONE. 9.

Preſcelgo in queſta ſerie la minor copia di elettricità eccitata per la regolarità della ſua progreſſione di carica impreſſa perſino ai limiti dell' iſolamento. La coſtante oſſervazione mi dimoſtra , che ogni modo di preparazione contempera i ſuoi effetti con certa grandezza di elettricità , la quale creſciuta, o ſcemata turba, e confonde egualmente la regolarità de' varj termini , che alle ſucceſſive diſtanze corriſpondono. Onde queſta copia di elettricità eccitata ſembra la più conveniente alla regolare ſucceſſione de' ſuoi termini in queſta preparazione.

PREPARAZIONE.

Come nella ſerie ottava.

SERIE 13.

1. Contrappongo al precedente aſſai tenue un viviſſimo eccitamento di elettricità , che fa eſploſione ſpontanea della conſueta boccetta ai dodeci giri; e con quindeci giri conſueti imprime col contatto delle punte tanta forza di carica nel quadro, che non ſi eſtingue ſe non con quindeci ſcariche della boccetta.

2. Ad un pollice finì in undeci; ai due in nove; ai quattro in otto ; agli otto in ſei ; ai quattordeci in quattro ; ai diciotto in due ; ai ventiquattro in una ; e perfino ai trenta fu ancor l' ultimo grado di ſcoſſa nel quadro.

3. I moti tanto in queſta, come nella ſeguente ſerie cominciano ai primi giri in proporzione, che creſce la carica; e continuano, finchè dura tanta forza nel quadro, che ſia capace d' indurre in circa due ſcariche nella boccetta (*vedi Ser.* 12. *n.* 3.). Ma oltre la diſtanza di ventiquattro pollici in queſta ſerie, e oltre i diciotto nella ſeguente non vi è più verun indizio neppur di accoſtamento.

PREPARAZIONE.

La medeſima della ſerie nona.

SERIE 14.

1. A contatto finì in quattordeci ſcariche della boccetta.

2. Ad un pollice in nove; ai due in otto; ai quattro in ſette; agli otto in ſei; ai quattordeci in due; ai diciotto in una. Ai ventiquattro è ancora ſcuotente nel ſolo quadro; e fino ai trenta ſi manifeſta nello ſteſſo la ſcintilla pungente.

OSSERVAZIONE 10.

Dedurrò qui pure a norma della oſſervazione 6 alcuni corollarj.

COROLL. 1. Nella ſteſſa ſpecie di vitrea elettricità la punta procedente dal condottore imprime a pari diſtanze nell' oppoſto quadro alquanto minore forza di carica, quando l' oppoſta armatura è piana, e ſenza punta, che quando dall' armatura ſteſſa parte una punta oppoſta alla prima.

COROLL. 2. Nè la carica impreſſa ſi fa notabilmente minore, quantunque creſca la lunghezza di quella oppoſta punta.

COROLL. 3. E comunque in fine ſi frapponga fra la prima punta, e l' oppoſta armatura del quadro un vetro nudo, che impediſce ogni loro mutua azione, purchè al ſolito ſuſſiſta l' azione delle due punte fra loro, ſi rende a pari diſtanze di poco minore la carica impreſſa nel quadro.

OSSERVAZIONE 11.

Per immediata oſſervazione dalle cinque ultime ſerie precedenti riſulta

1. Che la punta procedente dal tubo fa quaſi continuo ſcoppio di ſcintilla contro l' armatura, o punta oppoſta fino oltre la diſtanza di nove linee; indi ſegue ad imprimere la carica ſenza altro ſtrepito di ſcintilla.

2. Che ſe a fianco del tubo ſi preſenti una ſpranga metallica terminante in globo groſſo mezzo pollice, non diminuiſce queſto notabilmente l' elettricità del tubo, finchè non ſi ſente fra loro qualche ſtridore di ſcintilla.

3. E queſta ſcoppia viva tra il tubo, e il globo preſentato fino alla diſtanza d' un pollice, quando il quadro, o la punta dallo ſteſſo procedente ſono lontani dalla punta del tubo anche meno d' un piede.

OSSERVAZIONE 12.

E donde procede, che in queſti corollarj la carica ſi eſtende alquanto più notabile con punta, ed anche più lunga oppoſta alla prima, che non a pari diſtanze colla ſola piana armatura del quadro? Mentre ne' corollarj dopo la ſeſta oſſervazione il contrario ſi notò colla reſinoſa elettricità. Gioverà qui trattenerci a rintracciarne la cauſa con qualche diſtinzione; e procederò in queſta ricerca a norma della oſſervazione ottava conſiderando più diſtintamente quelle differenze interne, frappoſte, ed oppoſte, che ivi ſoltanto accennai.

(*a*) Ed abbiamo occaſione d' incominciare dalle oppoſte differenze riflettendo che la decima, e l' undecima appunto (che tra quelle ſono le prime) eſaurite furono nelle ſerie precedenti, e ci guidarono a quella varietà di corollarj, i quali la reſinoſa dalla vitrea elettricità ſembrano per sè ſoli diſtinguere.

(*b*) E per le differenze di eſtenſione delle armature, e d' iſolamento delle medeſime, le quali ſi comprendono dalla duodecima fino alla venteſima, troppo mi traſporterei fuori del titolo di queſto capo, ſe per ciaſcuna voleſſi intraprenderne ſerie diſtinte, e perciò ne accennerò ſoltanto alcuni termini principali; e quanto alla eſtenſione, o grandezza della ſuperſicie armata del vetro, che notai in duodecimo luogo, ci porgerebbe per sè ſteſſa argomento di molte ſerie, e di ſingolari induzioni. Poichè ſe la ſteſſa lamina con minore armatura a diſtanze maggiori riceve più notabile carica, la ſteſſa poi a minori diſtanze colla medeſima elettricità non ne riceve, nè può riceverne ſe non minore, che non ne riceverebbe, quando aveſſe armatura più eſteſa. Nè in ciò vi è uniformità alcuna di effetti, che ridur ſi poſſa a ragione coſtante, ma ciaſcuna determinata grandezza di armatura ci preſenta nell'ugualianza non meno, che nella varietà dell' altre differenze interne, frappoſte, ed oppoſte una diſtanza, o un limite, nel quale è maſſima ſecondo la capacità di quella grandezza la carica impreſſa; oltre il qual limite con minori diſtanze non creſce la carica altrimenti, ma o ſi rompe, o ſi ſcarica ſpontaneamente il quadro, e con diſtanze maggiori ſi fa ſempre minore la carica. E paragonando poi le diverſe grandezze d'armatura ſulla ſteſſa lamina colla quantità varia di elettricità in ciaſcun giro procedente dal tubo, vi è tale grandezza d'armatura, colla quale neppure a contatto con tenue elettricità non s'imprime cenno di carica.

(*c*) E nelle ſeguenti combinazioni fino alla decima ſeſta tutti i caſi, ne' quali manca l'armatura ſopra l' una, o l'altra, o ſopra ambedue le facce del quadro, rendono qualſivoglia elettricità procedente dal tubo inetta ad imprimere nel quadro ſteſſo la carica. Poichè queſta ſoltanto s'imprime con la conveniente elettricità, e diſtanza in ragione delle eguali armature, o in ragione della minore, quando ſono ineguali. E nella ſteſſa ragione delle armature può trarſi lo ſcoppio, o la ſcarica, quantunque il quadro ſia carico; qualora o l'una o l' altra, o ambedue le facce ſi ſpogliano di tutta l' armatura, o d' alcuna ſua parte.

(*d*) Nelle differenze poi notate dal numero diciaſſette fino al venti, che le combinazioni riguardano dell' iſolamento delle ſteſſe armature, non vi è, che la decima nona, in cui ſi raccolga, e reſti nel quadro impreſſa la forza di carica corriſpondente alla elettricità del tubo e alla grandezza, e alla diſtanza del quadro. Nelle altre niuna carica ſi raccoglie, nè s' imprime in eſſo giammai, ſe non nel caſo, in cui la ſteſſa eſtremità del tubo ſi faccia ſucceſſivamente ne' diverſi punti diſarmati ſervire di armatura.

(*e*) Nulla aggiungerò delle differenze compreſe dal numero ventuno al ventitre, dopo che già oſſervai precedentemente, quanto eſſe pure influiſcano nella varia capacità di ricevere la carica. Noterò bensì, che tanto in queſte, come nelle precedenti differenze anche quando niuna s' imprime, nè reſta la carica nel quadro, compariſcono tuttavia al di là del quadro gli elettrici moti, e ſomiglianti ſegni di elettricità, dei quali ci occorrerà parlare tra poco (*i*).

(*f*) Anzi per fino nelle differenze frappoſte, che dal numero quarto fino al nono ſi comprendono, ſimilmente ſuſſiſtono i movimenti, quando niuna più ſuſſiſte la carica, o la ſcarica, e ciò non ſolo nella varietà delle diſtanze, ma anche ſotto la ſteſſa diſtanza, e vicino al contatto. In vero ſe tra il condottore, e l' armatura del quadro ſi frappone una lamina reſiſtente, come un vetro nudo, impediſce queſto ſoltanto la carica, ma non i moti; e viceverſa ſe una ſimile lamina ſi frappone tra le oppoſte armature di un quadro carico, s' impediſce per tal modo lo ſcoppio, o la ſcarica, ma non s' impediſcono i moti. Il che parimenti accade colle differenze interne, che notate abbiamo al numero ſecondo, e terzo; poichè in molte ſerie di queſto capo vedemmo ſuſſiſtere i moti, ove più non ſuſſiſteva la carica, e lo ſteſſo ci occorrerà d' oſſervare più volte.

(*g*) Nè la conſiderazione dei moti è perciò ſoſtanzialmente diverſa dalle cariche, o ſcariche. Poichè vedemmo già in alcuni caſi più oltre eſtenderſi i moti, che non la carica; ed aſcendere queſta al ſommo, e ſuſſiſtere negl' infimi gradi ſenza ſcoſtamento (*ſer.* 5, *e* 9). Ed in altri caſi all' oppoſto più oltre eſtenderſi alcun ſegno di ſcintilla ſcuotente, che non i moti (*ſer.* 6, *e* 11, *e ſeguenti*). E in ſomma le punte quanto per un verſo ſcemano gl' intervalli, e la facilità, e prontezza dei moti, tanto creſcono i limiti, e la facilità della carica. Onde gli accidenti dei moti ſoggiacciono a vicende non diverſe dalle cariche, o ſcariche, poichè vi ſono del pari nei moti certe combinazioni, e certi limiti per renderli più, o meno ſenſibili, e per fargli ſvanire in fine, o richiamarli.

(*h*) Come dopo i corollarj ſpettanti alla reſinoſa elettricità giovò della enumerazione delle differenze dedurne un lemma fondamentale per le ſeguenti inveſtigazioni ; così gioverà qui l' applicazione più diſtinta , che fatto abbiamo di quelle diſſerenze alle corriſpondenti ſerie di vitrea elettricità per guidarci ad un nuovo lemma, che più complete renda le ricerche dell' una, e dell' altra ſpecie , e ci ſomminiſtri in fine i veri termini pel confronto loro, e per la reciproca eſtimazione . Tre rifleſſioni aggiunte a quelle, che finora abbiamo eſpoſto, ci porranno in chiara luce il nuovo lemma, che ricerchiamo .

(*i*) E primieramente in tutti i capi delle propoſte differenze notar conviene quale , e in fino a quanto ciaſcuna influiſca in aumento, e quale poi ſi rivolti, e influiſca all' oppoſto in diminuzione di carica , o di moti, o di altro effetto ſenſibile , e ciò non ſolo per sè ſteſſe , e nella porzione di apparato, che a ciaſcuna immediatamente appartiene, ma anche intorno a sè, e nella porzione di apparato, che a ciaſcuna ſi riferiſce . Sembra talvolta ſvanire ogni eſterno ſegno e nel condottore, e nell' anneſſo apparato, come quando ſi preſenta un grande quadro, o una batteria da caricarſi; eppure le elettriche potenze agiſcono allora vicendevolmente più che mai, e in vece di ſvanire ſi raccolgono così nelle oppoſte facce del vetro.

All' oppoſto l' elettrica azione, che eſteriormente non appariſce, ſi eſterna, e ſi fa notabile ſtaccando, o allontanando l' armatura dallo ſtrato reſiſtente elettrico, a cui ſtava unita, come nell' epiniano elettroforo. Or queſta elettrica virtù non procede altrimenti dallo ſtrato reſiſtente, ma dall' armatura , ed è realmente di ſpecie a quella oppoſta, che nello ſtrato ſi raccoglie. Che ſe ſi eſternano poi in fuori dall' armatura, quando ſta unita al quadro, ſegni omologhi a quei della faccia reſiſtente, non ſono mai queſti per elettricità, che alla carica appartiene, ma ſono effetti di elettricità riſpinta, o frenata per azione della oppoſta armatura , i quali neceſſariamente o ſcemano la carica ſteſſa, o ne cominciano l' eſploſione. Ond' è, che ſimili effetti ſi chiamano ſecondo le diverſe relazioni or *laterali*, or *obliqui*, or *inverſi*; perchè ſebbene procedano da elettrica potenza , non ſono giammai prodotti dal primo ſtrato attraverſo del quale a vicenda ſi frenano, e ſi equilibrano le oppoſte ſpecie, che conſtituiſcono la carica. Simili potenze quanto più per l' interiore via dello ſtrato reſiſtente ſi eſercitano vicine fra loro, tanto meno ſi eſternano; e viceverſa tanto meno ritengono di mutua azione, e di colliſione reciproca quanto più ſi ſcoſtano, e ſi eſtendono eſteriormente a fianco, o in oppoſto. Quindi nel deſcrivere, e valutare tale ſorta di azioni troppo è facile prendere abbaglio, e cadere in contradditorie illazioni.

(*k*) In oltre ciaſcuna delle anzidette differenze non ha d' ordinario andamento uniforme, nè preciſo in sè ſteſſa; ma ſoggiace a vicende, e inverſioni di effetti, o perchè appunto è variabile, o perchè ſi compone, e ſi collide con altre. Per accennarne qualche eſempio comincierò dalle interne differenze, nelle quali la punta accreſce l' idraulico momento qualora ſi rivolge contra il corpo, in cui raccogliere ſi vuole tale azione, per quanto eſſo ne è capace. Ma ſe la punta ſteſſa, o altre punte ſi rivolgono altrove, ſi trasforma l' idraulico momento in virtù diſperſiva, e non concorre così che a ſcemare l' effetto della prima forza ſecondo la capacità, e vicinanza degli altri corpi, ai quali le punte ſi rivolgono.

Similmente le punte non meno coll' idraulico, che col meccanico loro momento ſpezzano il mezzo frappoſto; e ſervono così or a ſcemare, or ad accreſcere le conſuete vie d' iſolamento, e di accumulazione.

Il calore poi, che ſu tutte quelle differenze eſtende la ſua influenza, fino a certo grado migliora la reſiſtente virtù; più oltre poi la debilita, e la eſtingue affatto riducendo qualſivoglia reſiſtente al comune officio di condottore. Il calore ſteſſo accreſce la ſiccità de' corpi, e diſpone in oltre le elettriche ſoſtanze a più facile ſcioglimento; ma nel tempo ſteſſo diſpone il vetro, la ſeta, e l' aria a concepire in ſeguito più pronta umidità, e inducendo varietà nel mezzo ambiente facilita per queſta via la diſperſione delle elettriche forze.

L' armatura in fine accreſce e la capacità di accumulamento, e di mutua azione, ma colla ſua ſteſſa grandezza rareſà l' elettricità movente; e perciò quando queſta è tenue, diventa per la ſteſſa grandezza dell' armatura inetta altrettanto a imprimer ſegni di carica, o di moti in quella maggiore capacità (vedi *oſſ*. 1. *e* 2).

Quindi nell' applicare ai particolari caſi qualſivoglia fra le propoſte differenze, d' uopo è determinarne l' andamento, e la colliſione, e compoſizion ſua con le altre, che nei caſi ſteſſi influiſcono.

(*l*) Niuna per fine delle ſteſſe differenze vi è, che non ſia di oſtacolo, e di reſiſtenza alle elettriche potenze; o non ſoggiaccia ad oſtacoli, e reſiſtenze. Or chi non ſa rariſſimi eſſere i caſi, ne' quali pienamente la potenza s' impiega contro la reſiſtenza, talchè eſſendo quella incognita poſſa bene valutarſi colla ſola cognizione dell' effetto ſuo ſulla reſiſtenza? Chi non ſa l' effetto della potenza comunque accreſciuta per la via delle macchine contro la reſiſtenza non eſſere mai, ſe non l' eceſſo dell' intero momento ſopra i frappoſti oſtacoli? Che ſe queſt' ecceſſo ſcemi, e perfine diventi negativo, allora l' effetto della potenza, e d' ogni ſuo momento rintracciare ne' frappoſti oſtacoli ſi debbe, e non più nella reſiſtenza. Chi non ſa quanto ſpeſſo i ſoli oſtacoli ſuperano le reſiſtenze, e come poi quelli reagiſcono del pari contro la potenza, e la reſiſtenza? Nel qual caſo ſe i momenti di varie potenze dall' effetto loro miſurar ti piaccia contro le reſiſtenze, cadrai in illuſioni, e roveſcj non meno nella qualità, che nelle proporzioni di quelle miſure. E quante fiate non ſoſtituirai l' oſtacolo alla potenza, e tal parte di reazione dell' oſtacolo non prenderai per miſura della prima potenza? Che ſe ciò ad ogni tratto interviene nel valutare dagli effetti le potenze, che ci ſono più familiari, e che ſono in sè ſteſſe trattabili, come ſono le animate potenze, la gravità, l' acqua, l' aria, e altri fluidi: che ſarà di quelle, che non operano ſe non per vie inſenſibili, e per accumulazione di particelle tenuiſſime inacceſſibili all' attività de' ſenſi, e alla perfezione degli ſtromenti? Tali ſono le azioni tutte di chimica affinità, che come ampiamente dominano in ciaſcun ramo della Fiſica più delicata, così particolarmente reggono le elettriche potenze. Vi è di più tra le comuni azioni di affinità, e le elettriche il divario, che in quelle ſi riconoſcono in fine, e ſi raccolgono d' ordinario i prodotti ſeparati, e diſtinti; in queſta i diſtinti prodotti non ſi rincontrano, ſe non a ondate, a ſoffj, e quaſi a ſalti, nè altrimenti ſi raccolgono, ſe non nell' atto di mutua azione, ed in continuo sforzo per colliderſi a vicenda, e riunirſi. E queſta ſingolare natura, o maniera delle elettriche potenze eſige un nuovo genere d'inveſtigazione, che è riſervato per le particolari Memorie ſpettanti all' elettrica teoria.

Frattanto raccogliendo inſieme le avvertenze ſparſe nella preſente oſſervazione dedurremo il ſeguente

Lemma Secondo.

Qualunque ſia la ſpecifica forza delle elettriche potenze non può eſtimarſi, nè talvolta diſcernerſi colle conſuete vie del loro eccitamento, e confronto; molto meno può ridurſi ad immediate miſure di comuni ſtromenti, o ad effetti uniformi. Ma occorrono ne' diverſi gradi loro tali modi, e momenti di aumento, e viceverſa tali oſtacoli di reſiſtenze per diminuirne, e roveſciarne la vera loro grandezza, che ſe queſti non ſono in ogni caſo riconoſciuti, e diſtinti, conſondono le aſſolute potenze coi momenti, e cambiano gli effetti delle potenze colle reſiſtenze, nè ci laſciano veruna forma di eſatto, e preciſo calcolo della ſpecifica loro ragione.

Osservazione 13.

A fronte delle moltiplici difficoltà, e combinazioni, che il calcolo ci ritardano e delle ſpecifiche forze, e delle altre mentovate differenze, non v'ha però dubbio, che ciaſcuna di eſſe dalla ſeconda fino alla venteſima terza non ſia in sè ſteſſa certa, e determinata ne' ſuoi effetti, e nelle ſue qualità. E perchè non dovrà la prima, e l' ultima di quelle ventiquattro differenze del pari ſicuramente conoſcerſi nella ſua eſiſtenza, e ne' ſuoi effetti? Benchè non ci ſia ancor permeſſo di calcolare l' una, e l'altra aſſolutamente per quelle vie, che non ſono altrimenti acceſſibili, che dopo lunghe, e delicate preparazioni. Ne calcolai gli effetti dopo le prime quattro ſerie a norma di quelle preparazioni, e volli a bello ſtudio eſprimerle in numeriche proporzioni, e in fenomeni notiſſimi per colpire così più vivamente l' immaginazione, e ſcuotere con veemenza le comuni prevenzioni, e le triviali uſanze di ſperimentare. In vero nulla di aſſoluto eſprimono quelle proporzioni, e non altro ſono in sè ſteſſe, che il primo paſſo, ed una in ſomma delle molte ſpeciali induzioni, colle quali a termine vuole condurſi l' analiſi delle punte. Proſeguiamo dunque, come nella prima Parte, a raccogliere in teoremi le nuove induzioni, che dalle dieci ultime ſerie riſultano.

TEOREMA XIV.

In ciaſcuna ſerie delle punte di reſinoſa elettricità la progreſſione della carica impreſſa nell' oppoſto quadro eccede in ciaſcun termine ſucceſſivo la corriſpondente progreſſione delle punte di vitrea.

E dovrà dunque il Fiſico ridurſi in fine ad implorar l' attenzione di chi legge, o aſcolta, come è coſtume dell' Oratore? Tutta ſi richiede l' attenzione de' più penetranti ingegni a ben comprendere il ſenſo, e le prove del preſente teorema per la novità e per l' eſtenſione de' termini, che inſieme raccoglie, e confronta. M' ingegnerò di ſollevarne, e ſoſtenerne lo sforzo eſprimendone colla maggiore chiarezza, e coll' ordine più diſtinto le idee.

1. Diſtinguo in ciaſcuna ſerie il primo termine dai ſucceſſivi, che ne formano la progreſſione. Quel primo determina la quantità di elettricità, che coſtituiſce la ſeconda differenza notata nell' oſſervazione 8, quantità, che in ciaſcun giro ſi eccita, e in quindici giri ſi raccoglie, quando la punta, e l' armatura, o le due punte fra loro ſono a contatto. E ſiccome ſi mantiene da quel primo fino all' ultimo termine d' ogni ſerie collo ſteſſo numero di giri la ſteſſa quantità, perciò quel primo termine serve di baſe, e fiſſa l' aſſoluto valore di ciaſcuna ſerie.

Ne' diverſi apparati, e nelle diverſe ſpecie di elettricità non fu poſſibile di ridurre quel primo termine a ragione di eguaglianza in tutte le diſtinte ſerie, maſſime aſcendendo queſte a tanto numero. Sarebbe tale impreſa ſuperiore o alla umana condizione, o alla qualità ſteſſa della materia, che a tante differenze, e a tanta incoſtanza ſoggiace, ſiccome abbiamo più volte oſſervato. Avrebbe in vero quella comune uguaglianza del primo termine ſomminiſtrato più facile, e regolare il confronto e di tutti i primi nelle diverſe elettricità, e de' ſucceſſivi termini in ogni loro progreſſione.

A queſto

A queſto eſſenziale difetto di facilità, e di regolarità non vi è altro riparo, che ſoggettarſi a calcolo più compoſto, e rintracciarne le proporzioni ſecondo l' inevitabile varietà di ciaſcun termine primo. La ſemplicità del calcolo è vana qualunque volta alla natura delle coſe non corriſponde; e il Fiſico del pari, che il Matematico ſecondo l' indole, e la natura de' ſoggetti diverſi è ad ogni paſſo forzato di variar metodi, e formole di calcolare. A queſto fine riſtringiamo in tavole tutti i numeri delle precedenti ſerie di reſinoſa, e di vitrea elettricità ſegnando nella prima linea orizzontale i nomi di ciaſcun termine dal contatto fino alle ultime diſtanze, e nelle ſeguenti linee ſottoponendo a ciaſcuno di que' nomi il numero delle ſcariche, colle quali ſi eſaurì la carica impreſſa nel quadro in ogni ſerie diſtinta.

CON RESINOSA ELETTRICITA'.

	A contatto.	Poll. I.	Poll. II.	Poll. IV.	Poll. VIII.	Poll. XIV.	Poll. XVIII.	Poll. XXIV.	Poll. XXX.	Poll. XXXVI.
Ser. 5 =	14	14	13	12	9	5	3	1	*X*	*x*
Ser. 6 =	14	14	13	10	8	3	2	*X*	*x*	0
Ser. 7 =	13	12	10	9	7	3	1	*X*	*x*	0
Ser. 8 =	12	11	10	9	6	3	1	*X*	*x*	0
Ser. 9 =	11	10	9	8	6	3	*X*	*X*	0	0
Totale	64	61	55	48	36	17	7	1		

2. Abbiamo eſpreſſo colla *X* majuſcula l' ultimo grado di ſcoſſa, che ſi ſente toccando immediatamente le oppoſte armature del quadro, quando non è più capace d' imprimere veruna forza ſcuotente nella boccetta; e colla *x* minore gli ultimi cenni di ſcintilla pungente, o di luce ſenza eſpreſſo ſenſo di ſcoſſa.

Sommati abbiamo in oltre ſotto ciaſcuna colonna i numeri pel confronto compoſto di tutte le ſerie inſieme di reſinoſa, e di vitrea, ſiccome pel ſemplice confronto di ciaſcuna ſerie colla ſua corriſpondente dovremo riportarle alternamente da una tavola alla corriſpondente dell' altra. Dei moti non occorre per ora farne uſo, e perciò non ne eſtendiamo ulteriormente la tavola; e paſſiamo all' altra tavola corriſpondente.

CON VITREA ELETTRICITA'.

	A contatto.	Poll. I.	Poll. II.	Poll. IV.	Poll. VIII.	Poll. XIV.	Poll. XVIII.	Poll. XXIV.	Poll. XXX.	Poll. XXXVI.
Ser. 10 =	13	10	9	6	3	1	X	x	x	0
Ser. 11 =	13	11	10	8	4	1	X	x	x	0
Ser. 12 =	8	4	2	1	X	x	0	0	0	0
Ser. 13 =	15	11	9	8	6	4	2	1	X	0
Ser. 14 =	14	9	8	7	6	2	1	X	x	0
Totale	63	45	38	30	19	8	3	1		

3. Un' occhiata ſu queſte tavole, e l' immediato confronto de' termini corriſpondenti in ciaſcuna ſerie compie la dimoſtrazione del Teorema propoſto. Ma per dirigere queſto colpo d' occhio non ſolo nelle ſomme totali, che ſono d' immediata evidenza, ma nelle corriſpondenti, riduciamo in quelle tavole alternamente a confronto i termini, che eſprimono eguale, o più proſſimo il numero delle ſcariche colle riſpettive diſtanze fino all' ultima ſcoſſa tratta dal quadro. Quando non vi è il numero eſatto nella ſerie corriſpondente prendiamo la diſtanza di mezzo fra i due termini più proſſimi.

Ser. 5.	Dalle ſcariche 13 fino ad una ſono	poll. 22	
Ser. 10.	Dalle 13 all' ultima	poll.	14
Ser. 6.	Dalle 13 all' ultima	poll. 19	
Ser. 11.	Dalle 13 all' ultima	poll.	14
Ser. 7.	Dalle 8 all' ultima	poll. 12	
Ser. 12.	Dalle 8 all' ultima	poll.	4
	Totale	poll. 53	32

Ed è qui tanto nelle maggiori diſtanze di ciaſcun termine, come nelle ſomme loro evidente la ſuperiorità della reſinoſa.

4. Ed è queſta del pari evidente, ſe ſi paragonino le ſomme totali corriſpondenti a ciaſcun termine in eguali diſtanze. Le ſomme dei primi termini ſono 64 : 63, e ſi ſuccedono le corriſpondenti come ſegue.

Reſinoſa	Diſtanze comuni	Vitrea
61	Poll. I	45
55	II	38
48	IV	30
36	VIII	19
17	XIV	8
7	XVIII	3
1	XXIV	1
Totale 225		144

5. Riducendo adunque a' fenomeni le ragioni di queſte ſomme totali de' numeri corriſpondenti alle uguali diſtanze abbiamo la ſeguente analogia. Se le ſomme de' termini primi ſiano in numeri proſſimamente uguali cioè 64:63; le ſomme de' termini ſucceſſivi corriſpondenti aſcendono alla numerica eſpreſſione di 225:144. Onde quantunque le forze coſtituenti i primi termini non abbiano differenza, che d' unità, le ſomme de' ſucceſſivi termini nella reſinoſa eccedono quelle della vitrea, come il numero 225 eccede il numero 144, e per eſprimere lo ſteſſo con fenomeni di cariche, la reſinoſa eccede la vitrea quanto una carica eſpreſſa con 225 di quelle unità eccede altra carica eſpreſſa con 144.

6. Nè faccia nella precedente tavola eccezione l'apparente uguaglianza degli ultimi termini ai pollici XXIV. Poichè nella ſerie 5 non comincia il primo termine che con 14 ſcariche, e nella ſerie 13 il primo termine comincia con 15 ſcariche; e con tutto ciò non eſtende l' ultima ſcoſſa ſe non quanto quel termine primo della ſerie 5.

Naſce in oltre quella apparente uguaglianza degli ultimi termini da altra cagione, la quale ci obbligò a interrompere nel numero 3 precedente il confronto fra i termini corriſpondenti delle due ultime ſerie 8, e 9 di reſinoſa colle ultime 13, e 14 di vitrea. S' interruppe adunque ſimile confronto, perchè quelle ultime ſerie non hanno termini comuni, nè poſſono come le precedenti ragguagliarſi, e ridurſi a' termini proſſimi. Il che acciò chiaramente s' intenda d' uopo è oſſervare tra le ſerie di reſinoſa, e di vitrea elettricità due ſingolari contrappoſizioni, le quali ſe coſtanti ſono nelle prime ſerie, con maggior eſpreſſione poi nelle due ultime ſi manifeſtano.

7. Primieramente è inſigne la decadenza della vitrea ſopra la reſinoſa dall' uno all' altro dei primi termini d' ogni ſerie. E per trattenermi ſoltanto nelle ultime la vitrea nella ſer. 13 in un pollice dalle 15 decade alle 11 ; ed ai due pollici alle 9, e nella ſerie 14 dalle 14 decade in un pollice alle 9. Mentre la reſinoſa in un pollice nella ſer. 8 dalle 12 non decade, che alle 11, ed arriva fino ai quattro pollici prima di cader alle 9, e nella ſerie 9 dalle 11 non decade che alle 10, ed arriva fino ai due pollici prima di cader alle 9.

All' oppoſto negli ultimi termini decade più inſignemente la reſinoſa, che non la vitrea. E per riſtringermi qui pure alle ultime ſerie, la reſinoſa nella ſerie 8 in quattro pollici decade dalle 3 ad 1, e nella ſerie 9 nello ſteſſo termine dalle 3 a niuna. Mentre la vitrea nella ſerie 13 nello ſteſſo termine decade gradatamente dalle 4 a 2 ; e nel ſeguente di ſei pollici dalle 2 ad 1. E nella ſer. 14 in quattro pollici non cade che dalle 2 ad 1.

Ma queſte contrappoſizioni meglio, e immediatamente ſi ſcorgono nelle ſomme corriſpondenti dalla tavola del n. 4 precedente. In eſſe dal contatto ad un pollice la reſinoſa è = 64 : 61, e la vitrea = 63 : 45, così ne' ſeguenti fino ai pollici otto la reſinoſa decade pochiſſimo in confronto della vitrea. Indi comincia la decadenza a farſi preſſo poco eguale; poichè dagli otto ai quattordici pollici la reſinoſa è = 36 : 17, e la vitrea = 19 : 8. Ma dai pollici quattordeci ai diciotto quella è = 17 : 7, queſta = 8 : 3, e in fine dai diciotto ai ventiquattro quella è = 7 : 1, queſta = 3 : 1, cioè decade la reſinoſa inſignemente più della vitrea.

E ſiccome queſte differenze, e contrappoſizioni comprendono in sè ſteſſe importanti applicazioni per la teoria, perciò le ridurremo nella ſeguente tavola eſprimendo in frazioni più proſſime le ſucceſſive differenze de' riſpettivi termini col precedente

	Reſinoſa	A contatto	Vitrea	
Differenze	64 . .	Primo termine	63	Differenze
$\frac{1}{11} = 3 =$	61 . .	Poll. I . . .	45	$= 18 = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{10} = 6 =$	55	II . . .	38	$= 7 = \frac{1}{6}$
$\frac{1}{8} = 7 =$	48	IV . . .	30	$= 8 = \frac{1}{5}$
$\frac{1}{4} = 12 =$	36	VIII . . .	19	$= 11 = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{2} = 19 =$	17	XIV . . .	8	$= 11 = \frac{1}{2}$
$\frac{10}{17} = 10 =$	7	XVIII . . .	3	$= 5 = \frac{5}{8}$
$\frac{6}{7} = 6 =$	1	XXIV . . .	1	$= 2 = \frac{2}{3}$

8. E in propoſito noſtro l' ultima contrappoſizione quanto accorcia le diſtanze degli ultimi termini della reſinoſa, tanto allunga le ſteſſe nei corriſpondenti della vitrea. Onde comparando nel num. 3 precedente colla ragione delle diſtanze la reſinoſa, e la vitrea elettricità nella maggior forza, che in quella compariſce per le ſole diſtanze un'altra ſe ne include, che per ora non può calcolarſi. E perciò ragguagliando i termini ultimi della reſinoſa coi corriſpondenti di vitrea prevediamo, che l' errore coſpira ad accreſcerne la ſuperiorità più che non appariſce dalle ſemplici diſtanze. Al contrario ſe ragguagliaſſimo i termini primi della reſinoſa cogli ultimi della vitrea, coſpirerebbero le ſemplici ragioni delle diſtanze a indurci doppiamente in errore, perchè la ſuperiorità di que' primi verrebbe in tal modo a confonderſi colla più lenta decadenza degli ultimi di vitrea.

Qualunque ſia pertanto la cagione di ſimili contrappoſizioni, che altrove ſi eſplorerà, rimane e col confronto de' termini corriſpondenti alterni, e colle ſomme totali de' medeſimi, e colle ſomme de' termini ſimili compiuta la dimoſtrazione del teorema propoſto.

9. Mal ſi apporrebbe però chi ne credeſſe compiuta egualmente l' intelligenza. Per giungere a queſta d' uopo è riconoſcere dal primo all' ultimo il valore di que' numeri, che ciaſcun termine eſprimono delle due tavole. Nè ſi può ſenza manifeſta petizione di principio aſſumere, che il numero 14,

o 13 del primo termine d' una ſerie di reſinoſa ſia eguale al num. 14, o 13 del primo termine della corriſpondente di vitrea, benchè ſi eſprimano con numeri eguali; il che ſimilmente s' intenda delle ſomme loro, e dei ſucceſſivi termini comunque con eguali numeri eſpreſſi in ogni loro progreſſione.

10. Suſſiſte ſoltanto con queſta eguaglianza de' numeri l' eguaglianza del loro valore ne' termini corriſpondenti della ſteſſa ſpecie di elettricità, ma ſotto ſiffatta eguaglianza ſi mantiene una diſuguaglianza grandiſſima di ciaſcuna unità componente que' numeri. Poichè per eſempio le dieci unità, che il ſecondo termine eſprimono della ſerie decima, non ſono altrimenti omogenee, come niuna lo è di quante altre eſprimono o i primi, o i ſucceſſivi termini di qualſivoglia ſerie. Anche a ſolo ſenſo manifeſtamente ſi riconoſce ſempre maggiore l' unità precedente, che non la ſeguente in tutta la ſucceſſione di ciaſcun numero.

11. Due ricerche adunque ſi preſentano da farſi per compiere l' intelligenza del teorema, e dei numeri, che lo dimoſtrano. Si debbono nella prima valutare le unità componenti i primi termini delle due ſpecie di elettricità; e ſi valuteranno nella ſeconda ricerca le unità, che i ſucceſſivi termini compongono in ciaſcuna di quelle ſerie. A queſti due oggetti ſoddisfaremo nel ſeguente

TEOREMA XV.

I numeri, che l' eccesso eſprimono della carica impreſſa nel quadro in tutta la progreſſione de' termini con punta di reſinoſa ſopra la punta di vitrea elettricità, non s' intendono, nè ſono comparabili altrimenti, che con nuove induzioni.

1. Or quale induzione ci guiderà a valutare quelle unità, ed a ridurle omogenee, e per tal via chiare, e comparabili? Non altro che una nuova applicazione, e il compimento di quella ſteſſa, che ci guidò a ritrovare que' numeri, ed a riſolverli in quelle unità. Riſolviamo adunque ciaſcuna unità nell' iſteſſo modo, che le cariche abbiamo diſtinte, le quali a ciaſcuna ſpecie, e a ciaſcun termine delle loro ſerie appartengono; ed avremo così que' numeri chiari, e diſtinti, e perciò comparabili fra loro, come lo ſono fra loro i termini di quelle cariche.

Quanto però ad immaginarſi piana, e facile ſembra queſta nuova induzione, tanto è intralciata, e ardua ne' dettagli, che ne compiono l' eſecuzione. Ciaſcuna unità de' primi termini, e di tutti i ſucceſſivi di tante ſerie vuol eſſere valutata diſtintamente; il che altro non ſignifica in fine ſe non di riſolverla in numeri formati di nuove unità omogenee, e comparabili. Nè ciò altrimenti ſi ottiene, che con ſuddividere la prima miſura in parti minori finchè arriviamo ad eguali elementi primi, e naſcenti, dai quali tutte quelle unità, e quelle cariche ſono in sè ſteſſe compoſte. Così in ogni genere di calcolo ſi riduce a minimi termini qualſivoglia varietà di numeri, peſi, o miſure.

2. Ritorniamo pertanto al principio di queſto capo, e ripigliamo l' operazione deſcritta nella preparazione della ſerie quinta. Con una boccetta applicata all' eſtremità dell' arco l' arte ivi inſegnai di eſprimere con numeri in tutte le future ſerie dal primo all' ultimo termine le cariche impreſſe nel quadro. Nelle tavole poi del precedente teorema chiamai *X* quell' ultimo grado di forza ſcuotente, che ſi trae immediatamente dal quadro ſteſſo, quando più niuna ne imprime nella boccetta. Or ſe arriverò ad eſprimere ogni unità di que' numeri con altri numeri compoſti dell' ultimo grado di forza ſcuotente nell' una, e nell' altra ſpecie di elettricità, non ci approſſimeremo per tal via quanto più è poſſibile a quella comune, e comparabile miſura, che in tutti que' termini ricerchiamo?

3. Per tal uopo in ciaſcuna unità di que' numeri applico alla boccetta l' operazione ſteſſa, che replico nel medeſimo tempo, e ſimilmente ſul quadro procedendo nella ſeguente forma.

Ho pronte tre boccette ſimili, ed eguali alla prima, e due archi. Uno di queſti archi colla prima boccetta inſieme impugnata ad una eſtremità nella ſiniſtra mano la tiene un compagno previamente agguerrito in ſimili ſperienze, mentre io traggo al ſolito coll' altro arco la prima ſcarica del quadro nella ſeconda boccetta. Queſta così caricata la paſſo immediatamente nella deſtra mano del compagno, il quale la impugna come la prima nell' altra eſtremità dell' arco; ed appreſſandone il globo a quella prima ſubito la ſcarica in eſſa. Subito abbaſſa il globo di queſta contro l' arco ſotto la deſtra mano, e per tal via la ſcarica interamente . Indi ripete la ſteſſa operazione di prima, finchè la ſeconda boccetta non ſia ridotta all' ultimo grado di forza ſcuotente , e tien numerate le ſcoſſe, che ne cavò.

Frattanto io ſoſtituendo a quella ſeconda la terza boccetta nell' eſtremità del mio arco, numero ſimilmente le ſcariche , finchè ſi eſauriſca al ſolito la carica impreſſa nel quadro; ed ottengo così la prima ſuddiviſione di quelle unità componenti i numeri, nei quali ad ogni termine fu diviſa la carica impreſſa nel quadro.

4. Carico nuovamente il quadro in tutti i termini d'ogni ſpecie di elettricità, cominciando dalla carica diviſa in quindeci ſcariche della boccetta (per eſſere queſta la maggiore che occorſa ci ſia nelle ſerie medeſime a contatto, oſſia nel più alto loro termine), e numero in ciaſcun termine la corriſpondente ſuddiviſione colla prima , e ſeconda boccetta , come nella ſeguente tavola, che leggere ſi vuole dalla colonna di mezzo a dritta, e ſiniſtra.

Reſinoſa.	Termini del quadro.	Vitrea.
4	15	6
4	14	5
4	13	5
4	12	4
4	11	4
3	10	4
3	9	4
3	8	4
3	7	3
2	6	3
2	5	3
2	4	3
1	3	2
X	2	1
0	1	X
39		51

5. Comprendo in un colpo d'occhio nella preſente tavola i riſultati di trenta nuove ſerie di ſperienze, cioè quindici con reſinoſa, e altrettante con vitrea elettricità. La maggior

gior parte di eſſe ſono ſtate ripetute per ſino a ſei , e otto volte in tempi diverſi, e niuna mai meno di tre volte; e ſecondo il compleſſo di tante ripetizioni ne ho ragguagliati i numeri, che a ciaſcun termine corriſpondono. Nei tempi di aria ben ſecca ebbi numeri aſſai maggiori, ma preſſo a poco proporzionali ai precedenti. Ne' tempi più umidi occorrono maggiori irregolarità, maſſime nella reſinoſa, che ſcema, e ſi diſperde con incredibile prontezza.

6. Ciò, che ho fatto colle tre boccette ſul quadro, forza è ripeterlo nei nuovi numeri in ciaſcun termine delle due boccette. Ed a queſto ſine non altro ci vuole, che una quarta boccetta ſimile, ed eguale alle prime. Toſto che ho cavata colla ſeconda boccetta la prima ſcarica dal quadro, lo abbandono; e ſubito colla terza boccetta io cavo ſimilmente da queſta la prima ſcarica. Paſſo immediatamente quella terza alla deſtra mano del compagno, che non eſauriſce al ſolito, come qui ſopra, il numero delle ſcariche nella prima boccetta.

Ed io frattanto ſoſtituendo a quella terza la quarta boccetta eſauriſco inſieme, e ſimilmente il numero delle ſcariche della ſeconda boccetta; ed ottengo per tal modo la nuova, ed ultima ſuddiviſione di que' numeri, come nella ſeguente tavola.

Reſinoſa.	Termini della ſeconda boccetta.	Vitrea.
3	6	5
3	5	4
2	4	3
1	3	2
z	2	1
0	1	z
9		15

7. Riſtringo ſimilmente nella preſente tavola i riſultati di dodeci nuove ſerie di ſperienze, cioè ſei di reſinoſa, e ſei di vitrea elettricità, ripetute, e ragguagliate ſecondo le avvertenze, che più ſopra indicai (*n*. 5.)

8. Poteva baſtare la prima tavola, ſe l' ultimo grado di forza ſcuotente *X* nel quadro foſſe ſtato uguale all' ultimo grado di forza ſcuotente nella boccetta. Ciò per altro ſarebbe ſtato un aſſunto arbitrario, e volli perciò ridurre le ſcariche ſteſſe della boccetta all' ultimo grado loro, che chiamerò *z*.

Ed è così dichiarata, e ridotta in tavole la nuova induzione, che ſola guidar ci può alla diſtinta comparazione, e intelligenza di que' numeri, che le proporzioni comprendono ſtabilite nel teorema precedente. Paſſiamo ora ad inveſtigarne l' eſpreſſione col ſeguente

TEOREMA XVI.

Le tavole di nuova induzione eſprimono diſtintamente il valore delle parti, ond'è compoſta ciaſcuna carica in tutti i termini delle precedenti ſerie di reſinoſa, e di vitrea elettricità.

1. In tutti i termini delle precedenti ſerie ſi riduſſe la carica all'ultimo grado di forza ſcuotente X per via di ſcoſſe ſucceſſivamente tratte dal quadro; le quali eſpreſſero in numero le parti ſteſſe di ciaſcuna carica. Se eguali foſſero le unità, che queſti numeri compongono, ſarebbe nella ſemplice ragione di eſſi il valore delle parti, onde ciaſcuna carica è compoſta.

Ma ſiccome da principio oſſervai (*teor. XIV. n. 9., e 10.*) ſono quelle unità diſuguali in due modi; l' uno de' quali riguarda la diverſità della ſpecie di elettricità, l'altro la diverſa intenſità d'ogni ſucceſſiva ſcarica della boccetta, il che per fino col ſemplice ſenſo è manifeſto.

Per valutare adunque l' una e l' altra diſuguaglianza, due nuove ſuddiviſioni ſi richiedevano, una pel confronto delle diverſe ſpecie, e l' altra pel confronto di tutte le ſucceſſive ſcariche tratte dal quadro in ciaſcun termine delle ſpecie diverſe di elettricità. Or quelle ſuddiviſioni eſpreſſe ſono diſtintamente nella prima tavola del teorema precedente (*n*. 4.); nella quale e le unità corriſpondenti di ſpecie diverſa, e le ſucceſſive di ciaſcuna ſpecie ridotte ſono in numeri minori, oſſia parti di quelle prime unità.

2. Sommando adunque le ſerie di tali numeri minori, ovvero parti ne riſultano le proporzioni di tutti i termini dell' una e dell' altra ſpecie, e dei ſucceſſivi termini di ciaſcuna fra loro.

3. Il metodo di valutar quelle cariche non è che di approſſimazione per la via di riſoluzione, o eſaurimento delle medeſime. E ſiccome in Fiſica non è quanto in Matematica

agevole il replicare le ſuddiviſioni per approſſimarne ognora più l' eſpreſſione , e il valore ; perciò ſoddisfare potrebbe all' intento noſtro la ſuddiviſione compreſa nella precedente tavola, trattandoſi maſſimamente di coſa tanto ardua in sè ſteſſa, e di vie tanto nuove , nelle quali non ſi era fin qui tentato, non che fatto un ſolo paſſo neppure nelle prime diviſioni raccolte nel teorema XIV.

Contuttociò volli ben più innanzi inoltrarmi per approſſimare quanto meglio poſſibil foſſe il valore di quelle proporzioni . Conſiderai le differenze fra le unità de' nuovi numeri, o delle parti minori; e con nuova ſuddiviſione le diſtinſi in altre di ordine ancor minore . Come quelle unità prime eſprimenti il numero delle ſcariche tratte dal quadro furono diviſe in altre minori tratte colla ſeconda boccetta; così furono queſte ſimilmente diviſe in altre ancor minori tratte dalla ſteſſa colla terza boccetta; e ſono queſte ordinatamente eſpreſſe nella ſeconda tavola del teorema precedente (*n. 6.*) in ambedue le ſpecie di elettricità.

4. Sommando adunque nuovamente la ſerie di queſti numeri, o parti minori, che ſuddividono le ſomme precedenti, riſulterà quanto più proſſimo ſperar ſi può il valore delle ricercate proporzioni.

Cadrebbe però in errore, chi ampliaſſe incautamente l' uſo di queſte tavole per eſtimare il valore di qualſivoglia carica, e voleſſe così troppo rapidamente generalizzare . Non ſono queſte che particolari induzioni , nè ſi eſtendono forſe più oltre delle preſenti preparazioni, e dei modi loro. Altre ricerche , e nuove induzioni a tal uopo ſi richiedono , delle quali alcuna ne accenneremo nel ſeguente

TEOREMA XVII.

Le proporzioni delle cariche valutate ſecondo le tavole precedenti non ſi eſtendono ad altri modi, nè generalizzare poſſono le ragioni d' ogni carica elettrica , ſe non col ſuſſidio di nuove, e moltiplicate induzioni.

Non ripeterò qui le varietà corriſpondenti alle differenze, che numerai nelle oſſervazioni previe ai due lemmi più ſopra ſtabiliti. Ci porterebbero quelle a tanta moltiplicità d' induzioni, quanto opportune per la comprenſione della teoria, altrettanto dai limiti del preſente capo aliene. Può agevolmente a ciaſcuna di quelle differenze adattare le convenienti induzioni, chiunque voglia inoltrarſi in ſimili ricerche. Accennerò piuttoſto alcuni modi da altri, ch' io ſappia, non oſſervati nel variar le proporzioni delle cariche impreſſe.

1. Cercai primieramente, ſe, poſte le altre coſe pari, foſſero le cariche proporzionali al ſemplice numero dei giri, coi quali eſſe s' imprimono. Non ſolo tale proporzione variò nelle diverſe, ma anche in ciaſcuna ſpecie di elettricità. Se per eſempio con un giro s' impreſſe carica equivalente a due ſcariche di boccetta; con due giri fu quella maggiore di quattro, con tre maggiore di ſei, con dieci aſſai maggiore di venti delle ſteſſe cariche ridotte, e così in ſeguito. Non ho tant' oltre promoſſa l' induzione da fiſſarne fin qui veruna legge; poſſo però accertare, che creſce la carica in proporzione maggiore del ſemplice numero dei giri.

2. Creſce in oltre la carica ſecondo certa proporzione della celerità, colla quale ſi ſuccedono que' giri medeſimi.

3. Onde con elettricità, che minore ſia in ciaſcun giro, s' imprime, e ſi eſtende fino a certe diſtanze la piena carica, purchè ſi accreſca il numero, e la rapida ſucceſſione dei giri. Il che non ſi ottiene con minor numero di giri, benchè fino a certo grado maggiore ſia l' elettricità, e più rapida la ſucceſſione loro.

4. E viceverſa al di là di certe diſtanze tra il condottore e il quadro, per quanto creſca il numero, e la celere ſucceſſione, e la quantità di eccitamento di ciaſcun giro, non s' imprime giammai piena, ed in fine poi a nulla ſi riduce la carica.

5. Siffatte diſtanze non ſono fin qui ridotte a limiti certi in niſſuna ſpecie di elettricità, nè ſi è trovato con quale ragione que' limiti corriſpondano o al numero, o alla celerità, o alla quantità di eccitamento de' ſucceſſivi giri del diſco.

I tre ultimi numeri riſultano immediatamente dal confronto della ſerie prima colla quinta, e della terza colla decima, e dalle moltiplici combinazioni, che colle precedenti preparazioni in vano io cimentai per dedurne qualche lume di ragione coſtante.

6. Eſporrò nel ſeguente capo altri modi, coi quali l'elettricità eccitata nel condottore ſi porta al ſommo grado; e ciò nonpertanto la carica nell' oppoſto quadro non s' imprime in veruna coſtante proporzione, che corriſponda alla grandezza di eccitamento, o al ſolo numero, o alla rapidità dei giri, nè alla ſola grandezza delle ſuperficie terminanti il condottore, o l' oppoſta armatura, nè alle ſole diſtanze.

7. Talchè ogni grado maggiore di eccitamento ſembra eſigere una determinata grandezza di ſuperficie terminante non meno il condottore, che l'oppoſta armatura, acciò quel grado o ſi mantenga nel condottore, o ſi eſtenda ad imprimere maggior carica nell' oppoſto quadro. Onde ſenza conoſcere l' intera ſerie, e ſucceſſione in ciaſcun apparato, poſſono ne' particolari ſuoi termini confonderſi quelle diverſe ragioni di eccitamento, o di ſuperficie, o di carica.

8. Sembra in oltre, che a ciaſcun grado maggiore di elettricità eccitata corriſponda certa capacità d' iſolamento, o di reſiſtenza del mezzo ambiente accreſciuta per frenarla, e raccoglierla nel proprio condottore, o diminuita per diſperderla, e derivarla altrove. Quindi occorrer debbono nelle ſerie, che ſi fanno con gradi varj di eccitamento, certe diſtanze, nelle quali appariſce maſſima l' elettricità del condottore, e minimo l' effetto ſuo nell' oppoſto quadro; e viceverſa minima nel condottore, e maſſimo l' effetto ſuo nel quadro. E perciò ſe in ciaſcun grado non ſi eſauriſce l'intera ſerie, e ſi giudichino que' gradi, e gli effetti loro con termini particolari, e ſolitarj, ſi confonderà un grado con l'altro, e ſi prenderanno al roveſcio le miſure della intenſità, e degli effetti loro.

9. Qualunque volta adunque ci proponiamo di confrontare in parità di apparato la forza delle ſpecie diverſe, o ne' diverſi apparati la forza di ciaſcuna, è neceſſario eſaurirne dal primo fino all' ultimo termine le intere ſerie non meno in ciaſcuna ſpecie, che in ciaſcun diverſo apparato per dedurne in ſomma le particolari loro proporzioni. In vero ſe conoſciute foſſero le ragioni diſtinte, e i limiti ſiſſi di tutte le varietà, che ſin qui notate abbiamo, anche i fatti iſolati, e i fenomeni ſolitarj condurci potrebbero a qualche preciſa conſeguenza. Poichè ſecondo le tavole di quelle cognite ragioni

ſi ridurrebbero que' fenomeni ad eſpreſſione, che foſſe al termine loro corriſpondente.

10. Ora finchè ſomiglianti tavole di riduzione non ſono che deſiderate, nè altrimenti cominciate, non che perfette, non avremo giammai per la conſueta e triviale maniera di fatti iſolati comunque coſtanti, ſe non riſultati affatto inſignificanti, e per fino contraddittorj; nè troveremo in eſſi altra eſpreſſione fuori di quella delle noſtre prevenzioni. E quindi è che con arbitrarie, e ſuppoſte leggi per mero ſcambio di mezzo termine dedurremo da que' fatti le concluſioni, che dalle ſole ſuppoſizioni, e non altrimenti da que' fatti derivano. E perciò nella dovizia di ſperienze, e di macchine faremo poveriſſimi di giuſte idee, perchè non arriveremo mai neppure a ſoſpettare la genuina interpretazione di que' fatti, che tutto dì ci paſſano per mano, e molto meno concluder potremo da eſſi la proporzione delle incognite forze, e l'andamento delle incognite leggi, che incautamente prima di cominciare a rintracciarle pretendemmo di ſtabilire.

TEOREMA XVIII.

Le prime tavole altre ne ſomminiſtrano in fine, e ci porgono una formola generale per calcolare, e ridurre a confronto, e a comune miſura le ſerie precedenti con le ſeguenti nuove induzioni.

1. Le ſomme 39, e 51 eſprimono il valore d' una carica di quadro equivalente a quindici ſcariche della boccetta (*teor. XV. n.* 4.), e ſi dovrebbe ſimilmente ſommare ciaſcuna carica ſucceſſiva equivalente, e i ſucceſſivi termini di ſcariche per eſprimerne il corriſpondente valore. Ma ſe dalla prima ſomma ſi ſottragga il numero delle ſcariche di boccetta, che al primo termine corriſponde, ſi avrà per reſiduo la ſomma corriſpondente al ſecondo termine; e così procedendo collo ſteſſo canone in tutti i ſucceſſivi termini, ſi eſprimerà diſtintamente il loro riſpettivo valore, come nella ſeguente tavola, che ſi leggerà al pari delle precedenti dalla colonna di mezzo a dritta, e ſiniſtra.

Reſinoſa Termini del quadro Vitrea

39 . . . . . . 15 51
35 = 4 — 39 = 14 = 51 — 6 = 45
31 = 4 — 35 = 13 = 45 — 5 = 40
27 = 4 — 31 = 12 = 40 — 4 = 36
23 = 4 — 27 = 11 = 36 — 4 = 32
19 = 4 — 23 = 10 = 32 — 4 = 28
16 = 3 — 19 = 9 = 28 — 4 = 24
13 = 3 — 16 = 8 = 24 — 4 = 20
10 = 3 — 13 = 7 = 20 — 4 = 16
7 = 3 — 10 = 6 = 16 — 3 = 13
5 = 2 — 7 = 5 = 13 — 3 = 10
3 = 2 — 5 = 4 = 10 — 3 = 7
1 = 2 — 3 = 3 = 7 — 3 = 4
X = 2 = 4 — 2 = 2
0 = 1 = 2 — 1 = 1

229 329

2. Nello ſteſſo modo ſi valuterà ciaſcun termine ſucceſſivo della ſeconda boccetta a norma della tavola premeſſa nel teor. XV. n. 6. dichiarata nel teor. XVI. n. 4.

Reſinoſa. Termini della ſeconda boccetta. Vitrea.

9 . . . . . . 6 15
6 = 3 — 9 = 5 = 15 — 5 = 10
3 = 3 — 6 = 4 = 10 — 4 = 6
1 = 2 — 3 = 3 = 6 — 3 = 3
z = 2 = 3 — 2 = 1
0 = 1 = z — . . .

19 35

3. Il diſtinto valore del primo termine eſpreſſo in queſte tavole ſi raccoglie riducendo a norma delle prime tavole (*teor. XV. n.* 4. *e* 6.) tutti i termini corriſpondenti del quadro, e della ſeconda boccetta in una tavola comune, che è la ſeguente.

Tavola ridotta dei termini del quadro, e della ſeconda boccetta.

Reſinoſa. Vitrea.
58 = 19 + 39 = 15 = 51 + 35 = 86
38 = 3 + 35 = 14 = 45 + 10 = 55
34 = 3 + 31 = 13 = 40 + 10 = 50
30 = 3 + 27 = 12 = 36 + 6 = 42
26 = 3 + 23 = 11 = 32 + 6 = 38
20 = 1 + 19 = 10 = 28 + 6 = 34
17 = 1 + 16 = 9 = 24 + 6 = 30
14 = 1 + 13 = 8 = 20 + 6 = 26
11 = 1 + 10 = 7 = 16 + 3 = 19
7 = ... 7 = 6 = 13 + 3 = 16
5 = ... 5 = 5 = 10 + 3 = 13
3 = ... 3 = 4 = 7 + 3 = 10
1 = ... 1 = 3 = 4 + 3 = 7
. . . . 2 = 2 + 1 = 3
. . . . 1 = 1 . . . . = 1

---

264 = 35 + 229 . . . . . 329 + 101 = 430

4. Abbiamo qui una tavola dimoſtrativa, che tutte in sè comprende le ragioni del più alto termine, che diſtinto abbiamo nelle ſerie precedenti. Per trarne le ragioni particolari, che ad ogni ſucceſſivo termine corriſpondono, ſi ſottragga dall' intera ſomma il numero, che il valore eſprime di ciaſcun termine antecedente; e que' ſucceſſivi reſidui ci ſomminiſtreranno in fine la generale ſormola per valutare, e ridurre a confronto tutti i termini delle precedenti, e delle ſeguenti induzioni.

Tavola ridotta del diſtinto valore di ciaſcun termine ſucceſſivo.

Reſinoſa . . . . . Vitrea.
264 = 15 = 430
206 = 14 = 344
168 = 13 = 289
134 = 12 = 239
104 = 11 = 197
78 = 10 = 159
58 = 9 = 125
41 = 8 = 85
27 = 7 = 69
16 = 6 = 50
9 = 5 = 34
4 = 4 = 21
1 = 3 = 11
2 = 4
1 = 1
1110 2058

5. Sono così dal ſommo all'imo riſoluti in diſtinte ragioni tutti que' termini, che propoſti abbiamo.

C A P O II.

Combinazioni di ſuperficie a vicenda oppoſte nell' indurre la carica colla reſinoſa, e vitrea elettricità.

MOltiplichiamo le induzioni, ed opponendo a vicenda diverſe forme di ſuperficie compiamo le gradazioni varie del relativo nome delle punte, e riduciamole perſino al contrappoſto di maggiori, ed eguali grandezze. Si compie così l' oggetto della prima, e ſeconda Parte in tutte le combinazioni, e ne' modi, coi quali s' induce nell' oppoſto quadro, e ſi raccoglie la carica colle due ſpecie di elettricità.

Fra tanta varietà di cariche, e fra tante differenze nel comporle, e raccoglierle un modo unico e ſempre uniforme

(qual è la ſucceſſiva loro ſcarica nella boccetta) adopriamo per disfarle, oſſia per riſolverle, e ridurle a comune miſura. Nella terza Parte procederà la coſa inverſamente; e nulla curando la varietà dei modi d' indurre le cariche, le raccoglieremo per qualunque via ci ſi preſenterà più ſpedita ad accreſcerle. Ma ci occuperemo all' oppoſto delle combinazioni varie, che ſcemano le cariche, e le ſcompongono, rintracciando diſtintamente di que' modi varj le miſure, e le proporzioni. Proſeguiamo intanto colla ſeguente ſerie.

CON ELETTRICITA' RESINOSA.

PREPARAZIONE.

Termina il tubo o condottore nel ſolito globo ſenza veruna punta; ed a queſto oppongo direttamente il conſueto quadro verticale per modo, che quel globo ne guardi l' armatura in mezzo ai due terzi d' altezza. Il rimanente tutto ſta come nelle ſerie del precedente capo, ed applico qui pure ad ogni termine quindici giri del diſco, e di reſinoſa elettricità.

Alle due baſi iſolanti, che ſoſtengono il quadro, ſottopongo in queſta, e in tutte le ſerie del preſente capo un' ampia laſtra di vetro nudo, e pulito per meglio conſervare l' iſolamento del quadro, e delle più ampie ſuperficie, che nelle ſeguenti ſerie terminano l' oppoſto condottore.

SERIE 15.

1. Col globo a contatto dell' armatura ſi finì la carica in cinque ſcariche della conſueta boccetta; a mezzo pollice in quattro; ad un pollice in tre; ad un pollice e mezzo in una; a due pollici non vi fu nel quadro ſe non luce pungente ſenza veruna forza ſcuotente.

2. Fino alla diſtanza d' un pollice ad ogni due in tre giri ſcoppiò la ſcintilla tra il globo e il quadro, ma ad un pollice e mezzo non vi fu più indizio di ſcintilla.

3. Dal principio de' giri ſino all' atto, che ſcoppia la ſcintilla, il quadro è tratto al globo, e s' inclina ad eſſo notabilmente. Ma nello ſcoppio della ſcintilla reſta il quadro in

libertà, e ſi reſtituiſce per sè alla prima ſua poſitura oſcillando indietro quaſichè foſſe riſpinto. E ciò ſi ripete ſimilmente in ciaſcuna delle ſcintille, che ſono tanto più frequenti, quanto è minore la diſtanza tra il globo e l' armatura.

4. Non ha qui luogo tra il globo e l' armatura del quadro il ſolito pendoletto. Rimane ſoltanto quel filo, e globetto, che pende dall' eſteriore armatura, e queſto nell' atto dei giri ſi vibra alquanto in fuori, benchè quell' armatura comunichi ampiamente col ſuolo per mezzo di due fili metallici, fra i quali a diſtanza di tre pollici dall' uno e dall' altro pende quel filo.

PREPARAZIONE.

Non più il condottore termina in globo, ma in una ſuperficie piana di legno groſſa dieci linee, tutta coperta di foglia di ſtagno, di figura ſimile all' armatura del quadro, e di grandezza un quarto della ſteſſa, e perciò la chiamo *ſuperficie d' un quarto*. Sta queſta fiſſa all' eſtremità del globo in modo, che ſi preſenta, e ſi conſerva parallela in mezzo alla oppoſta armatura del quadro.

SERIE 16.

1. A contatto finì la carica in ſette ſcariche della boccetta; a mezzo pollice in cinque; ad un pollice in quattro; ad un pollice e mezzo in due; a due pollici in una. A due pollici e mezzo vi è ſola ſcoſſa nel quadro. A pollici tre più niuna luce affatto.

2. Si fanno qui a pari diſtanze più frequenti, che nella precedente ſerie, e prendono un tuono più grave le ſcintille; talchè fino a mezzo pollice ſcoppiano vive ad ogni giro.

3. Ad ognuna di eſſe precede l' accoſtamento, o inclinazione; e nell' atto, che ſcoppia, ſuccede la reſtituzione del quadro. Onde queſto ſi vede in continue oſcillazioni ſulla ſua baſe.

4. Ad un pollice e mezzo, e fino ai due in vece di ſcintilla non ſi sentì, che un certo ſpruzzo, e quaſi friggimento, o ſtridore cupo continuo. Ed a queſto corriſpondono

tenuiſſimi moti di accoſtamento, e reſtituzione del quadro, che ſembrano tremori.

PREPARAZIONE.

Soſtituiſco in fondo del globo una ſuperficie ſimile, e poſta ſimilmente, che la precedente, ma del doppio più grande, e perciò *la metà* dell' armatura del quadro, alla quale ſi preſenta nel mezzo affatto parallela.

SERIE 17.

1. A contatto finì la carica in otto ſcoſſe della boccetta; a mezzo pollice in ſei; ad un pollice in quattro; e ciò fino ad un pollice e mezzo; a due pollici in tre; a tre pollici in una; a tre e mezzo, e perfino ai quattro vi è ſcoſſa nel quadro; ai quattro e mezzo ancor luce ſcintillante; e vi fu l' ultimo cenno di luce perfino ai pollici cinque e mezzo.

2. Segue a farſi più grave il tuono delle ſcintille; ma qui ſi fanno più rare, che nella ſerie precedente; cioè a mezzo pollice ad ogni tre giri ſoltanto ſcoppia la ſcintilla; ad un pollice non più che ad ogni quattro in cinque giri. A due pollici più niuna ſcintilla, nè ſpruzzo, nè ſtridore.

3. Alle ſcintille corriſpondono previamente i moti d' inclinazione, e inſieme di reſtituzione del quadro.

PREPARAZIONE.

Alla ſuperficie di *metà* altra ne ſoſtituiſco ſimile, e ſimilmente poſta, che è *uguale* affatto all' armatura del quadro, a cui ſi preſenta in eguale altezza, e parallela.

SERIE 18.

1. A contatto finì la carica in nove della boccetta; a mezzo pollice in ſei; ad uno in cinque; ad uno e mezzo in tre; a due in una; ai tre l' ultima ſcoſſa nel quadro. Ai quattro nello ſteſſo non altro, che luce, che ai cinque pollici appena diede l' ultimo cenno.

2. Creſce oltre modo la frequenza, e la forza delle ſcintille nelle prime diſtanze ſino ad un pollice; al di là del quale ſi fanno più rare, cioè ad un pollice e mezzo appena una ogni tre giri; e a due pollici non altro ſi ſente, che uno ſpruzzo, o ſtridore cupo.

3. A mezzo pollice s' inclina il quadro ſino a contatto col più alto lato dell' armatura, e ſino dalla diſtanza d' un pollice s' inclina tuttavia quaſi a contatto. Siccome ad ogni ſcoppio di ſcintilla ſi reſtituiſce in dietro con impeto, così previamente fu ſempre tratto all' oppoſta ſuperficie con forza, che superò la preſſione di due diti, coi quali tentai di fermarlo premendo ſopra gli angoli ſuperiori del vetro nudo. Ad un pollice e mezzo benchè foſſero più rare le ſcintille, furono tuttavia forti in ciaſcuna le oſcillazioni di accoſtamento, e di reſtituzione del quadro.

OSSERVAZIONE I.

Raccolgo qui alcune oſſervazioni comuni a tutte queſte ſerie.

1. Il pendoletto, che indicato abbiamo nel n. 4 della ſerie 15, ſegue nell' atto, che continuano i giri, a ſcoſtarſi anche oltre le diſtanze, nelle quali più non s' imprime nel quadro alcun cenno di luce. Tale ſcoſtamento, o divergenza non è mai molto grande, e ricade col finir dei giri.

2. Nel numero delle ſcariche della boccetta, e nei cenni di ſcoſſa, o luce tratti immediatamente dal quadro non riconobbi diverſità veruna comunque nel trarre quelle ſcariche o ſcoſſe toglieſſi previamente affatto, o laſciaſſi intera nel conduttore, e nell' anneſſa ſuperficie la loro elettricità, che ivi lungamente ſi mantiene. Nel contatto ſi traggono le ſcariche dalla ſuperficie ſteſſa applicata ſull' armatura del quadro; e nelle ſucceſſive diſtanze ſi traggono le ſcariche al ſolito dalle oppoſte armature ſenza toccar quella ſuperficie. Ed è indifferente ſpogliar quella, e il tubo d' ogni elettricità o prima, o dopo che ſi ſcarichi il quadro.

3. Le attrazioni tra le ſuperficie terminanti il tubo, e il quadro (le quali nel contatto loro non ſolo ſi combaciano, ma ſi comprimono ſtrettamente l' una ſull' altra con vera adeſione) ſuſſiſtono ſoltanto ſin che durano i giri, e fino al mo-

mento della ſcintilla, come accade nei comuni combaciamenti del filo, e del pendoletto nella ſer. 5; e col finir dei giri, e collo ſcoppiar della ſcintilla ſvaniſcono. Nel contatto però l' adeſione è continua nell' atto, che ſi gira il diſco, poichè non vi ſono ſcintille.

4. Tanto l' adeſione in contatto, come le attrazioni nelle ſucceſſive diſtanze hanno certa proporzione, e colla quantità di elettricità, e colla grandezza di ambe le ſuperficie, che a vicenda ſi oppongano. Talchè come col globo è minima, così è maſſima l' attrazione, e l' adeſione colla intera ſuperficie uguale all' oppoſta armatura.

5. Non ommetterò le anomalie delle ſcintille, che ſi preſentano ne' ſucceſſivi aumenti da minore a maggior ſuperficie. Poichè col globo le ſcintille ceſſano dopo la diſtanza d' un pollice (*ſer.* 15. *n.* 2.), colla ſuperficie di quarto ne eſtendono lo ſpruzzo per fino ai due pollici (*ſer.* 16. *n.* 2.). Ma colla ſuperficie di metà, benchè creſca l' elettrica quantità, ſi ſanno più rare le ſcintille, nè più fino ai due pollici ſi eſtende lo ſpruzzo delle medeſime (*ſer.* 17. *n.* 2.). E colla ſuperficie intera crebbe ſul principio la vivacità loro, ma non ne eſteſero lo ſtridore più in là dei due pollici come nella ſuperficie di quarto (*ſer.* 18. *n.* 2.).

6. Paragonando queſte diſtanze, alle quali ſi eſtende la ſcintilla, che non oltrepaſſano mai i due pollici, colle diſtanze alle quali ſegue ad imprimerſi nel quadro elettricità ſcuotente, che arriva fino ai quattro pollici (*ſer.* 17. *n.* 1.); è manifeſto, che la reſinoſa elettricità ſi raccoglie nell' oppoſto quadro anche quando tra la ſuperficie e l' armatura non paſſa più veruna ſcintilla, e ciò fino a diſtanze del doppio maggiori.

7. Preſentai in tutte queſte ſerie al condottore, o all' anneſſa ſuperficie una ſpranga metallica terminante in globo groſſo mezzo pollice; ed oſſervai, che nell' avvicinarſi di queſto globo quantunque fino dalla diſtanza di due, o tre pollici ſi ſcemaſſe nel tubo l' elettricità, nonpertanto la ſcintilla fra il globo ſteſſo e il condottore non iſcoppiò mai a diſtanza maggiore d' un pollice, anzi d' ordinario aſſai minore. E ſiccome nel numero precedente ſi vide ſprizzar la ſcintilla tra il condottore ſteſſo e il quadro fino alla diſtanza di due

pollici, perciò nella reſinoſa elettricità sbalza tra il condottore e l' oppoſto quadro la ſcintilla a diſtanze non meno di doppie, che non tra il condottore ſteſſo, e tale globo, che eſteriormente ſi preſenta.

8. Queſto globo per altro comincia a ſcemare l' elettricità del tubo alla diſtanza di due, e fino di tre pollici, come fino ai quattro ſi ſpinge dal tubo ſteſſo l' elettricità ſcuotente nell' oppoſto quadro ſenza apparenza di ſcintille (*ſopra n. 6.*). E perciò la reſinoſa elettricità, anche in tal ſorta di condottori ſenza punte, ſi diſperde, o paſſa ſenza ſtrepito di ſcintille nell' oppoſto quadro, o in altro condottore a diſtanze doppie, e per fino triple di quelle, che alla ſcintilla corriſpondono.

OSSERVAZIONE 2.

Riduciamo qui pure in tavole a norma del teor. XIV. dal primo all' ultimo i termini delle ſcariche, colle quali ſi eſaurì la carica nelle ſerie precedenti impreſſa con reſinoſa elettricità.

	A contatto.	Poll. ½.	Poll. I.	Poll. I½.	Poll. II.	Poll. II½.	Poll. III.	Poll. III½.	Poll. IV.	Poll. IV½.	Poll. V.	Poll. V½
15 =	5	4	3	1	x	0	0	0	0	0	0	0
16 =	7	5	4	2	1	X	0	0	0	0	0	0
17 =	8	5	4	4	3	2	1	X	X	x	x	x
18 =	9	6	5	3	1	X	X	x	x	x	x	0
ale =	29	20	16	10	4	2	1					

OSSERVAZIONE 3.

Confrontando con queſte, che ſono proprie delle quattro ultime ſerie, le oſſervazioni, e le tavole delle ſerie precedenti di reſinoſa elettricità, ne riſultano i più ovvj rapporti della ſteſſa ſpecie in tutte le differenti ſue preparazioni, come ne' ſeguenti

COROLLARJ.

COROLL. 1. Nella ſteſſa ſpecie di reſinoſa elettricità ſe ſi conſideri la ſemplice ragione delle diſtanze nelle ſomme loro confuſe, il condottore terminante in punta imprime la carica nell' oppoſto quadro con forza ottupla, che non quando termina in globo, oſſia sferica, o altra piana ſuperficie.

Nella ſomma delle ſerie con punta di reſinoſa elettricità ſi trova fino ai pollici 24 l' ultima ſcoſſa tratta dal quadro (*teor. XIV. n.* 1.); e nella ſomma delle ſerie del condottore terminante in globo, o in piana ſuperficie non ſi trova l'ultima ſcoſſa ſimile al di là dei pollici 3 (*oſſ.* 2. *prec.*). E' dunque come 24 : 3.

COROLL. 2. Se nella ſteſſa ragione ſi paragonino i termini corriſpondenti nelle ſomme delle ſerie di punta, e di ſuperficie terminante il condottore non ha la punta di reſinoſa elettricità ſe non forza circa quintupla della sferica, o piana ſuperficie per imprimere la carica nell' oppoſto quadro.

Intendo per termini corriſpondenti i numeri proſſimi nelle ſomme delle ſcariche. Ora nelle ſerie di punte (*teor. XIV. n.* 1.) ſotto i pollici otto vi è la ſomma 36, cioè la più proſſima alla ſomma 29 del primo termine delle ſerie ultime (*oſſ.* 2.). Ma dai pollici otto finiſce ai 24 l' ultima ſcoſſa, che qui finiſce ai pollici 3. Dunque le diſtanze ſono come 16 : 3, le quali ragguagliate per la maggiorità del termine 36 ſopra il 29, poſſono ridurſi circa come 15 : 3

COROLL. 3. Se nello ſteſſo modo ſi paragoni diſtintamente l' azione della punta con certa grandezza di sferica, e piana ſuperficie, ſi riconoſce 1. la forza della punta poco meno di ſettupla del globo; 2. quintupla della ſuperficie di quarto; 3. poco più di quadrupla della ſuperficie di metà; 4. e più di ſettupla dell' intera ſuperficie uguale all' oppoſta armatura.

1. Nella ſerie 5 (*teor. XIV. n.* 1) il termine di ſcoſſe cinque è ai pollici 14; e l' ultima ſcoſſa arriva fino ai 24, e benchè nelle ſerie ſeguenti non ſi trovi il preciſo termine di cinque, pure ſe ſi prendano le diſtanze medie tra il termine proſſimo e l' ultima ſcoſſa, può con ſicurezza aſſumerſi di pollici 10 la diſtanza fra il termine di cinque all' ultima ſcoſ-

ſa. Ma nella ſerie 15 (*oſſ. prec.*) dal termine primo di cinque ſcariche fino all'ultima col globo non vi è che la diſtanza di pollici 1 $\frac{1}{2}$; dunque riducendo ſono le diſtanze come 20 : 3, cioè la prima poco meno di ſettupla.

2. Nella ſerie 7 il termine di ſette ſcoſſe dai pollici 8 arriva fino ai 18 coll' ultima ſcoſſa; e ragguagliando gli altri termini proſſimi ſi trova poco più di dieci pollici la diſtanza loro dall'ultima. Ma nella ſerie 16 con ſuperficie di quarto dal primo termine di ſette ſcariche all' ultima ſcoſſa non vi ſono che pollici 2; dunque non è che quintupla in ragione delle diſtanze.

3. Nella ſerie 6 ai pollici 8 vi è il termine di otto ſcoſſe, che eſtende fino ai 21 l' ultima ſcoſſa; ed è perciò la diſtanza di pollici 13. Ma nella ſerie 17 con ſuperficie di metà dal primo termine di otto arriva fino ai pollici 3 l'ultima ſcoſſa; dunque la ragione delle diſtanze è come 13 : 3, cioè poco più di quadrupla.

4. Nella ſerie 7 e 8 ai pollici 4 vi è il termine di nove ſcariche, e nella ſerie 5 è ai pollici 8. Ora come in quelle dai quattro all' ultima ſcoſſa vi ſono 14 pollici, così in queſta dagli otto all' ultima vi ſono pollici 16: che per adequato ſi riducono ai pollici 15. Ma nella ſerie 18 dal primo termine di nove ſcoſſe fino all'ultima ſono pollici 2. Dunque è la ragione delle diſtanze come 15 : 2, cioè più di ſettupla.

COROLL. 4. Ma la punta ſteſſa nell' imprimere nell' oppoſto quadro la carica non eſtende nel frappoſto mezzo lo ſtrepito di ſcintilla ſe non a diſtanza ſubquadrupla, e perfino ſubottupla della rotonda, o piana ſuperficie.

Poichè colle punte lo ſtrepito della ſcintilla non oltrepaſſa la diſtanza di tre linee (*Cap. I. oſſ.* 7. *n.* 1.). All' oppoſto col condottore terminante in globo ſi eſtende tra queſto e il quadro la ſcintilla per lo meno ad un pollice, e con piana ſuperficie per fino ai due pollici (*oſſ.* 1 *n.* 6.).

COROLL. 5. Ed un globo di mezzo pollice, che eſteriormente a fianco ſi preſenta al condottore terminante in punta, non comincia a ſcemarne notabilmente l'elettricità, ſe non a diſtanza ſubdupla, che non quando il condottore imprime nell'oppoſto quadro la carica con rotonda, o piana ſuperficie.

Finchè verſo l' oppoſto quadro vi è punta quel globo, che di fianco ſi preſenta, non comincia a ſcemar notabilmente l' elettricità del condottore ſe non a diſtanza d'un pollice e mezzo (*Cap. I. oſſ. 7. n. 2.*), e quando al quadro quel condottore oppone la rotonda, o piana ſuperficie, ne ſcema quel globo ſteſſo l' elettricità per fino alla diſtanza di tre pollici (*oſſ. 1. n. 6. 7.*).

Coroll. 6. E tra quel globo e il condottore quando termina in punta non iſcoppia la ſcintilla, ſe non a diſtanza ſubdupla, e per fino ſubtripla, che non quando il condottore ſteſſo imprime nell' oppoſto quadro la carica con rotonda, o piana ſuperficie.

Quando il condottore oppone all' oppoſto quadro la punta non iſcoppia la ſcintilla tra il condottore e il globo, che a fianco ſi preſenta, ſe non a diſtanza di due linee, e al più di quattro (*Cap. I. oſſ. 7. n. 2. 3.*) ; e ſcoppia la ſcintilla ſteſſa anche a diſtanza maggiore d' un pollice, quando il condottore ſteſſo imprime nell' oppoſto quadro la carica con rotonda, o piana ſuperficie (*oſſ. 1. n. 7.*) .

CON VITREA ELETTRICITA'.

PREPARAZIONE.

La ſteſſa, che nella ſerie 15.

SERIE 19.

1. A contatto con quindici giri s' impreſſe tanta carica, che finì in nove ſcariche della boccetta ; a mezzo pollice in otto ; ad uno in ſette ; ad uno e mezzo in tre ; ad uno e tre quarti più niuna ſcoſſa neppur nel ſolo quadro . A due pollici non ſi ottenne più dal quadro neppure il menomo cenno di luce.

2. Fino a mezzo pollice ad ogni giro ſcoppiò viviſſima la ſcintilla tra il globo ed il quadro. Ad un pollice fu egualmente forte, e non molto più rara, cioè ogni tre giri ſcoppiarono incirca due ſcintille . Ad un pollice e mezzo ſi fece più grave il tuono, e più raro lo ſcoppio della ſcintilla,

talchè appena una ne ſaltò ogni tre, o quattro giri: ad un pollice e tre quarti ſvanì ogni ſcintilla, nè vi fu indizio di ſpruzzo veruno.

3. Anche qui alle ſcintille precede l' inclinazione, o accoſtamento del quadro, e la ſua reſtituzione nell' atto dello ſcoppio. Fu l' inclinazione, o accoſtamento aſſai più notabile, che nella reſinoſa, che a queſta corriſponde.

4. Il pendoletto, che qui pure ſta all' eſteriore armatura del quadro in mezzo ai due fili metallici, ſi ſcoſtò nell' atto dei giri, e continuò a ſcoſtarſi anche al di là di due pollici, quando più non s' impreſſe nel quadro neppure cenno di luce. Dalle prime alle ultime diſtanze fu qui lo ſcoſtamento del pendolo aſſai maggiore, che non fu mai colla reſinoſa elettricità; e ſi mantenne anche finiti i giri del diſco.

PREPARAZIONE.

La medeſima della ſerie 16.

SERIE 20.

1. A contatto s' impreſſe carica, che finì in tredeci ſcariche della boccetta; a mezzo pollice in dieci; ad uno in otto; ad uno e mezzo in ſette; ad uno, e fino ai due e mezzo in cinque; ai tre in due; ai tre e un quarto in una; ai tre e mezzo ſola ſcoſſa nel quadro. Ai tre e tre quarti appena un cenno di luce nel quadro. Ai quattro più nulla.

2. Continuo fu lo ſcoppio di ſcintille viviſſime fino ad un pollice; nelle ſucceſſive diſtanze ſi fecero alquanto più gravi, ma non molto più rare fino ai due pollici, e continuarono a ſpruzzo, e a ſcoppio ſerpeggiante perfino ai pollici tre e mezzo, ma ognora più gravi, e rare.

3. L' inclinazione, o l' accoſtamento del quadro corriſponde alla forza delle ſcintille fino alla diſtanza d' un pollice e mezzo; ma più in là fu l' accoſtamento aſſai minore, che non furono le ſcintille, e la carica impreſſa nel quadro.

PREPARAZIONE.

Come nella ſerie 17.

SERIE 21.

1. A contatto finì la carica in tredeci della boccetta; a mezzo pollice in nove; ad un pollice, e ad uno e mezzo in otto; ai due in ſette, e fino ai tre pollici ſi ebbero poco di meno. Ai tre e mezzo in tre. Ma ai tre e tre quarti appena vi fu ſenſo di ſcoſſa nel ſolo quadro. Dai quattro poi fino ai cinque pollici appena vi fu un cenno di luce neppur pungente nel ſolo quadro.

2. Scintille ſtridenti, e acute fino ad un pollice e mezzo; e continuano ſimili fino ai tre pollici, ſe non che ſi fanno ſucceſſivamente di tuono più grave. Dopo i tre ſi fanno anche più rare fino ai tre e mezzo. Fino ai quattro ſi ſente lo ſpruzzo d' una ſcintilluzza; e più in là non reſta ſenſo di ſpruzzo veruno.

3. L' accoſtamento del quadro fu ognora più notabile, che nelle ſerie precedenti. Ma dopo un pollice e mezzo fu aſſai indebolito, e s' indebolì vie più nelle ſucceſſive diſtanze, benchè continuaſſero vive le ſcintille, e la carica impreſſa nel quadro.

PREPARAZIONE.

Come nella ſerie 18.

SERIE 22.

1. A contatto finì la carica in tredeci come ſopra; a mezzo pollice in nove; ad uno in ſei; ad uno e mezzo in cinque; ai due in tre; ai due e mezzo in due; ai tre in una; ai tre e mezzo ſola ſcoſſa nel quadro; ai quattro ancor ſcintilla pungente; e fino ai cinque appena un cenno di luce.

2. Fino a mezzo pollice furono viviſſime, e continue le ſcintille. Si fecero gravi, e alquanto più rare ad un pollice.

Indi ad uno e mezzo furono graviſſime, e ancor più rare, talchè ai due pollici una appena ne ſcoppiò ogni ſei giri. Ai due pollici e mezzo non ſi ſentì, che qualche ſpruzzo interrotto, e grave; e più in là dei tre pollici non vi fu neppur ſenſo di ſpruzzo.

3. A mezzo pollice fu tanto forte la mutua attrazione della ſuperſicie, e del quadro, che quella ſi ſpingeva innanzi ſollevando la baſe del condottore, benchè ſi caricaſſe d'un grave peſo; nè il quadro ſi poteva fermare premendone i due angoli ſuperiori con tutta la forza dell' indice di ambedue le mani. Ad un pollice continuò aſſai forte; e tanto qui come ad un mezzo pollice ad ogni ſcoppio di ſcintilla ſi reſtituì al ſolito la ſuperſicie, e il quadro; onde furono continue, e grandi le loro oſcillazioni. Ad un pollice e mezzo ſcemarono, e così ſucceſſivamente in proporzione delle ſcintille, e della carica impreſſa nel quadro.

OSSERVAZIONE 4.

Raccogliendo qui pure alcune oſſervazioni comuni alle quattro ultime ſerie di vitrea elettricità le paragoniamo alle corriſpondenti di reſinoſa.

1. Lo ſcoſtamento di quel pendoletto, che notato abbiamo nel n. 4 della ſer. 19, ſegue in tutte queſte, finchè continuano i giri, a mantenerſi aſſai più notabile, che nelle precedenti di reſinoſa, e molto al di là delle diſtanze, nelle quali s'imprime carica, o luce nel quadro. Nè qui col finir dei giri cade ſubito tanto nelle prime, come nelle ultime diſtanze.

2. E ſimilmente in tutte le diſtanze replicai le prove delle ſcariche, e delle ſcintille impreſſe nel quadro; nè trovai nel numero, e nella forza loro veruna differenza, comunque toglieſſi previamente ogni elettricità al tubo, e alla anneſſa ſuperficie, ovvero ivi laſciaſſi tutta l' elettricità, che ſi conſerva lungamente.

3. Le attrazioni, e adeſioni tra la ſuperficie e l' armatura del quadro ſuſſiſtono ſoltanto, finchè durano i giri, e fino allo ſcoppio della ſcintilla, come accade nei combaciamenti del filo nella ſer. 10. Nel che ſi diſtinguono dalle adeſioni, e attrazioni tra l' armatura e la nuda ſuperficie del

quadro, e da ogni genere di adeſione tra il cuſcinetto, il vetro con eſſo ſtroffinato, e tra molte lamine reſiſtenti, o anche fogli di carta ſtroffinati inſieme uno ſopra l' altro. Nei quali caſi, e altri ſimili ſuſſiſte l'adeſione anche finiti i giri, e dopo tratta la ſcintilla.

4. Creſcono qui quelle attrazioni con forza ſorprendente, e aſſai più che nelle corriſpondenti di reſinoſa. Conſervano però ſimilmente certa proporzione colla maggior eſtenſione delle oppoſte ſuperficie, e colla quantità di elettricità procedente dal condottore. Talchè non ſembrano ſoſtenerſi, che per la viva, e continua permutazione di ſoſtanze, ovvero dei ſoggetti della loro mutua azione, che in tal atto, e in conveniente quantità trapaſſano da una in altra ſuperficie. In vero tanto nel filo della ſer. 10, come nelle ſerie ultime ſe debole ſi rende l' elettricità, tanto meno è notabile l'adeſione, e in fine diviene inſenſibile e nulla.

Sembra impoſſibile, che naſcere poſſa, o ſoſtenerſi l' idea di fluido unico, ed eſpanſivo in mente di chi veduto abbia da principio, o in fine veder voglia fenomeni tanto inſigni, e coſtanti di mutua azione. Avrei deſiderato di miſurare con qualche preciſione la forza corriſpondente alle ſucceſſive grandezze di ſuperficie, e alla quantità di elettricità; ma non ebbi campo di fare per ciò le opportune preparazioni.

5. Le anomalie, che notate abbiamo nella frequenza, e nella forza delle ſcintille tra la ſuperficie e 'l quadro nelle ſucceſſive diſtanze, non cominciano qui dalla ſuperficie di metà, come nella reſinoſa, ma dalla ultima ſuperficie intera. Poichè nella ſer. 20, e 21 ſi eſteſero le ſcintille, e gli ſpruzzi per fino ai quattro pollici (ivi *n.* 2.), e nella ſer. 22. n. 2. non arrivano più in là dei tre pollici.

6. Paragonando le diſtanze, nelle quali ſcoppiano, o ſpruzzano le ſcintille tra la ſuperficie e il quadro in tutte le ſerie di vitrea elettricità, corriſpondono quelle appuntino alle diſtanze, nelle quali ſegue ad imprimerſi alcuna forza ſcuotente nello ſteſſo quadro. Poichè dalla ſer. 19 alla 22 n. 1, e 2 ſvaniſce queſta nel momento, che finiſcono gli ultimi ſpruzzi delle ſcintille. Onde la vitrea elettricità non ſi raccoglie qui nell' oppoſto quadro, ſe non a diſtanze, e in copia proporzionali al numero, e alla forza delle ſcintille.

7. Preſentando qui pure al tubo, o all' anneſſa ſuperficie una ſpranga metallica terminante in globo groſſo mezzo pollice ne ebbi ſcintille viviſſime, e veramente ſcuotenti, e ſerpeggianti ſino alla diſtanza di tre pollici maſſime nell' ultima ſerie. Non ho mai altrimenti oſſervato verun modo di elevare al ſommo la capacità d' un condottore, quanto nell' ultima preparazione, in cui queſto preſenta a certa diſtanza un' uguale ſuperficie all' oppoſto quadro. E in queſt' ultima ſerie la ſcintilla dalla ſuperficie al quadro non iſcoppiò notabilmente al di là di tre pollici; onde ſembra, che le anomalie di maggiori diſtanze nella ſerie 20, e 21 notate più ſopra al n. 5, ſiccome le corriſpondenti, che notate abbiamo al n. 5. della oſſ. 1, dipendano da certa grandezza di ſuperficie oppoſte, o preſentate. E perciò riſtringendoci all' ultima preparazione troviamo, che nella vitrea elettricità la ſcintilla tra il condottore e l' oppoſto quadro non iſcoppia a diſtanze molto maggiori, che non tra il condottore medeſimo e tale globo, che eſteriormente ſi preſenta.

8. Queſto globo però, che al condottore ſi preſenta, non fa in eſſo notabile diminuzione di elettricità nelle maggiori diſtanze, finchè non incomincia a trarre qualche ſpruzzo o ſtridore di ſcintilla. Siccome dal condottore ſteſſo non ſi ſpinge nell' oppoſto quadro veruna forza di carica, ſe non a diſtanze corriſpondenti allo ſcoppio, o ſpruzzo delle ſcintille (ſopra *n. 6.*). Onde anche in tali forme di condottori la vitrea elettricità non ſi diſperde, nè paſſa tacitamente, come la reſinoſa, nell' oppoſto quadro, o in altro condottore ſe non a diſtanze proporzionate allo ſtrepito, e ſcoppio delle ſcintille.

OSSERVAZIONE 5.

Riduciamo ſimilmente in una tavola i numeri, che eſprimono la ſorza ſcuotente nel quadro impreſſa con vitrea elettricità nelle ſucceſſive diſtanze.

	A contatto.	Poll. $\frac{1}{2}$.	Poll. I.	Poll. I$\frac{1}{2}$.	Poll. II.	Poll. II$\frac{1}{2}$.	Poll. III.	Poll. III$\frac{1}{2}$.	Poll. IV.	Poll. IV$\frac{1}{2}$.	Poll. V.	Poll. V$\frac{1}{2}$.	Poll. VI.
Ser. 19 =	9	8	7	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ser. 20 =	13	10	8	7	5	5	2	*X*	0	0	0	0	0
Ser. 21 =	13	9	8	8	7	7	6	3	*x*	*x*	*x*	0	0
Ser. 22 =	13	9	6	5	3	2	1	*X*	*x*	*x*	*x*	0	0
Totale =	48	36	29	23	15	14	9	3					

Paragonando la ſerie 21 colla precedente 20, e colla ſeguente 22, nelle quali i primi termini a contatto ſono eguali, reſta evidente, come qui ſopra accennai (*n.* 7.), che le diſtanze, alle quali s' eſtendono le ſcintille, e le cariche corriſpondenti tra il condottore e l' oppoſto quadro, o altro condottore, dipendono da certa grandezza, e proporzione delle ſuperficie oppoſte, e preſentate, e non dalla ſola quantità di elettricità.

OSSERVAZIONE. 6.

E confrontando queſte, che alle quattro ultime ſerie appartengono, colle tavole, e oſſervazioni delle ſerie precedenti di vitrea elettricità deduciamo i rapporti della ſteſſa ſpecie nelle diverſe preparazioni ne' ſeguenti

COROLLARJ.

COROLL. I. Nella ſteſſa ſpecie di vitrea elettricità ſe ſi conſideri la ſemplice ragione delle diſtanze nelle ſomme loro confuſe il condottore terminante in punta imprime la carica nell' oppoſto quadro con forza poco più di quintupla, che non quando termina in globo, oſſia sferica, o altra piana ſuperficie.

Nella tavola delle ſerie con punta di vitrea elettricità ſi trova ſoltanto ai pollici XVIII il termine ſommato di 3 ſcariche tratte dal quadro (*teor. XIV. n.* 2.). E nella tavola delle ſerie di ſimile elettricità col condottore terminante in globo, e in piane ſuperficie ſi trova il termine di tre ſcariche ai pollici III $\frac{1}{2}$ (*oſſ.* 5. *prec.*). E' dunque la relativa forza come 18 : 3 $\frac{1}{2}$, e riducendo come 36 : 7; cioè poco più di quintupla.

COROLL.

Coroll. 2. Che ſe nella ſteſſa ragione diſtintamente ſi paragonino i termini corriſpondenti nelle ſomme di quelle tavole, non hanno le punte di vitrea elettricità ſe non forza poco meno di quintupla delle sferiche, o piane ſuperficie per imprimerne la carica nell' oppoſto quadro.

Prendiamo nelle ſteſſe tavole i numeri eguali, o più proſſimi che nelle ſomme dei primi, ed ultimi termini ſi corriſpondono. Nelle ſerie di punte ad un pollice vi è la ſomma 45, che è la più proſſima alla ſomma 48 del primo termine delle ſerie di ſuperficie. Ma in quelle arriva fino ai pollici III $\frac{1}{2}$. Dunque ſono le diſtanze pollici 17 : 3 $\frac{1}{2}$, le quali ridotte come 34 : 7 ſono in minor ragione di quintupla. Può per altro accreſcerſi alquanto tale ragione per la differenza dei termini primi 48, e 45, che porterebbe di più una ſediceſima d' un pollice nel numero 34, o di meno nel numero 7.

Coroll. 3. Che ſe nello ſteſſo modo ſi paragoni diſtintamente la forza delle punte con ciaſcuna grandezza di sferica, o piana ſuperficie, ſi riconoſce la forza delle punte 1. circa quadrupla del globo; 2. e ſimilmente quadrupla della piana ſuperficie di quarto; 3. più di tripla della ſuperficie di metà; 4. e quintupla dell' intera ſuperficie uguale all' oppoſta armatura.

1. Nella ſerie 10 il termine di ſcoſſe 9 è ai pollici II, e il termine di ſcoſſe 3 ai pollici VIII; e benchè nelle ſerie ſeguenti non s' incontrino in una ſteſſa ſerie i termini preciſi di 9, e 3, pure ſe ſi prendono le diſtanze medie tra il primo e l' ultimo dei termini proſſimi, ſi trova in circa adequata la diſtanza di quella prima ſerie di pollici VI.

Ma nella ſerie 19 col globo tra il primo termine 9 e l' ultimo 3 vi è la diſtanza di pollici 1 $\frac{1}{2}$. Dunque riducendo ſono le diſtanze incirca come 12 : 3, ed è perciò circa quadrupla la ragione loro.

2. Non ſi trovano in neſſuna delle ſerie di punta eſatti i termini di 13 ſcariche, e 2 in fine, come nella ſerie 20 con ſuperficie di quarto, fra i quali termini la diſtanza è di pollici III.

Ma ragguagliando le ſerie 10, 11, e 14, nelle quali ſono i termini più proſſimi ai 13, e 2, ſi trova tale diſtanza tra i pollici VIII, e XIV, cioè verſo i pollici XII. Onde riſulta incirca quadrupla la ragione loro.

3. Nella ſerie 10 ſono preciſamente i termini 13, e 3 alla diſtanza di pollici VIII. Nella ſerie 11 tra i pollici VIII, e XIV; e nelle ultime ſono pure verſo i pollici XIV. Può quindi prenderſi circa di pollici XII l' adequata diſtanza di que' termini.

Ma nella ſerie 21 con ſuperficie di metà tra il primo 13 e l' ultimo 3 vi è la diſtanza di pollici III $\frac{1}{2}$. Dunque riducendo è la ragione loro come ſono le diſtanze 24 : 7, cioè più di tripla.

4. Nella ſerie 10, e 11 in fine ſono i termini preciſi di 13, e 1 alla diſtanza di XIV pollici. Per le ſerie 13, e 14 ſembra poterſi eſtendere ſicuramente di più oltre i pollici XV.

Ma nella ſerie 22 con ſuperficie intera eguale all' oppoſta armatura non vi ſono, che pollici III fra i termini 13, e 1. Dunque in ragione delle diſtanze ſarebbe la relativa loro forza come 15 : 3 cioè quintupla.

COROLL. 4. Ma la ſteſſa punta nell' imprimere nell' oppoſto quadro la carica non eſtende nel frappoſto mezzo lo ſtrepito di ſcintilla, ſe non a diſtanza ſubdupla, e perfino ſubquadrupla della rotonda, o piana ſuperficie.

Dalla punta del condottore all' oppoſta ſcoppia la ſcintilla fino alla diſtanza di linee nove (*Cap. I. oſſ.* 11. *n.* 1.); e dal condottore ſteſſo terminante in globo, o in piana ſuperficie ſcoppia a diſtanza d' un pollice e mezzo, colla quale è ſubdupla; e al più di tre pollici, coi quali è ſubquadrupla (*oſſ.* 4. *n.* 6.).

COROLL. 5. Ed un globo di mezzo pollice, che eſteriormente ſi preſenta a fianco del condottore terminante in punta, comincia a diminuirne l' elettricità a diſtanza ſubtripla, che quando il condottore ſteſſo imprime nell' oppoſto quadro la carica con rotonda, o piana ſuperſicie.

Col globo, che a fianco ſi preſenta, non comincia nel primo caſo a ſcemarſi l' elettricità del condottore, ſe non alla diſtanza di un pollice (*Cap. I. oſſ.* 11. *n.* 2. 3.); e nel ſecondo caſo comincia a ſcemarſi fino alla diſtanza di pollici tre (*oſſ.* 4. *n.* 8.), alla quale diſtanza ſegue ad imprimerſi la carica (*ivi n.* 6.).

COROLL. 6. E tra quel globo, che ſi preſenta, e 'l condottore terminante in punta ſcoppia la ſcintilla a diſtanza ſubtripla, che non quando il condottore ſteſſo imprime nell' oppoſto quadro la carica con rotonda, o piana ſuperficie.

Con punta al condottore ſcoppia la ſcintilla a diſtanza d'un pollice (*Cap. I. oſſ.* 11. *n.* 3.). Ma terminando il condottore in rotonda, o piana ſuperficie ſcoppia la ſcintilla tra queſta e il globo, che ſi preſenta, oltre la diſtanza di pollici tre (*oſſ.* 4. *n.* 7.).

OSSERVAZIONE 7.

Confrontiamo in fine le ultime tavole di reſinoſa, e di vitrea elettricità nelle oppoſte ſuperficie per compiere le propoſte induzioni, e dedurne i generali reſultati, e le diſtinte loro proporzioni.

TEOREMA XIX.

In tutte le ſerie con ſuperficie di reſinoſa elettricità le progreſſioni della carica impreſſa nell' oppoſto quadro eccedono le corriſpondenti progreſſioni con ſuperficie di vitrea.

1. Riduciamo tutti i primi, ed ultimi termini alle riſpettive diſtanze nelle tavole di reſinoſa (*oſſ.* 2.), e di vitrea elettricità (*oſſ.* 5.).

Gli ultimi cenni di luce ſi eſtendono colla reſinoſa fino ai	poll.	6	
Gli ultimi cenni ſimili colla vitrea non oltrepaſſano i	poll.	. . .	5
L' ultimo grado di forza ſcuotente *X* nel quadro colla reſinoſa	poll.	4	
L' ultimo grado ſimile colla vitrea non oltrepaſſa i	poll.	. . .	$3\frac{1}{2}$
L' ultima ſcoſſa nella boccetta arriva colla reſinoſa fino ai	poll.	3	
L' ultima ſcoſſa ſimile colla vitrea ſi ha fino ai	poll.	. . .	$3\frac{1}{2}$
Totale	poll.	13 :	12

2. Sarebbe maggiore della vitrea la ſomma delle diſtanze di reſinoſa, quando anche i primi termini dell' una e dell' altra foſſero uguali. Ma nella reſinoſa la ſomma dei primi termini non è che 29, e la corriſpondente alla vitrea è 48. Supponendo per ora il valore di queſti numeri proporzionale alle loro unità (la quale ſuppoſizione ſcema anche più del giuſto i mutui rapporti), e calcolandone le proporzioni colle ſemplici ragioni delle diſtanze, e delle forze ſuppoſte corriſpondenti ai primi loro termini, dobbiamo invertere queſti numeri, e comporli colla ragione delle diſtanze. Sarà dunque la reſinoſa alla vitrea come $13 \times 48 : 12 \times 29 = 624 : 348 = 52 : 29$.

3. Ed eſprimendo queſta ragione con fenomeni di cariche, ſarà la reſinoſa alla vitrea come una carica equivalente a 52 di quelle unità ad altra carica equivalente a 29 delle ſteſſe unità.

4. Prima di confrontare i termini corriſpondenti, oſſerviamo, che le contrappoſizioni tra la reſinoſa e la vitrea elettricità non concorrono ſimilmente, anzi in qualche modo ſi oppongono a quelle, che oſſervammo nel n. 7. del Teor. XIV. Per rendere ciò più evidente riduciamo in una tavola tutti que' numeri dal contatto fino alle ultime diſtanze colle frazioni proſſimamente indicanti le riſpettive differenze tra i termini, che immediatamente ſi ſuccedono.

Reſinoſa A contatto Vitrea

Differenze 29 . Primo termine . 48 Differenze

$\frac{1}{3} = 9 = 20$ . . . Poll. $\frac{1}{2}$ . . . $36 = 12 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{5} = 4 = 16$ . . . . . . I . . . $29 = 7 = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{3} = 6 = 10$ . . . . . . I $\frac{1}{2}$ . . $23 = 6 = \frac{1}{5}$

$\frac{3}{5} = 6 = 4$ . . . . . . II . . $15 = 8 = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} = 2 = 2$ . . . . . . II $\frac{1}{2}$ . . $14 = 1 = \frac{1}{15}$

$\frac{1}{2} = 1 = 1$ . . . . . . III . . $9 = 5 = \frac{1}{3}$

$1 = X$ . . . . . . III $\frac{1}{2}$ . . $3 = 6 = \frac{2}{3}$

$0 = X$ . . . . . . IV . . $x = 3 + X$

Rintraccieremo in ſeguito la cauſa tanto delle prime, che delle nuove contrappoſizioni, e anomalie. E frattanto in propoſito noſtro vediamo, che nei ſucceſſivi termini delle due ſpecie è mal ſicuro il confronto tanto in ragione del numerico loro valore, che delle diſtanze; poichè non ſeguono eſſi verun andamento coſtante ſecondo quelle ſemplici ragioni.

5. Contuttociò raccogliendo gli eſtremi delle ſomme corriſpondenti ſono nella reſinoſa dal primo termine all' ultima ſcoſſa di boccetta pollici tre, e all' ultima di quadro pollici quattro; e nella vitrea dal termine corriſpondente 29, che nelle ſomme è alla diſtanza d' un pollice, fino alle ultime ſcoſſe tanto di boccetta, che di quadro, ſono pollici due e mezzo. Onde riducendo le ragioni ſono come . . . . 6 : 5
e come . . . . 8 : 5

e nella ſomma totale come . . . . 14 : 10
e componendole ſono come 48 : 25.

6. E confrontando nelle ſerie diſtinte ciaſcun termine, o numero corriſpondente ſono le diſtanze

Ser. 15.	Dalle cinque all' ultima pollici	$1\frac{1}{2}$	
Ser. 19.	Fra i termini proſſimi alle cinque all' ultima poll.		$0\frac{1}{2}$
Ser. 16.	Dalle ſette all' ultima poll. .	2	
Ser. 20.	Dalle ſette all' ultima poll. . . .		$1\frac{1}{2}$
Ser. 17.	Dalle otto all' ultima poll. .	3	
Ser. 21.	Dalle otto all' ultima poll. . . .		$2\frac{1}{2}$
Ser. 18.	Dalle nove all' ultima poll. .	2	
Ser. 22.	Dalle nove all' ultima poll. . . .		$2\frac{1}{2}$

Totale . . Poll. $8\frac{1}{2} : 7 = 17 : 14$

E componendole ſono come 288 : 75, proſſimamente = 4 : 1.

7. Onde benchè i rapporti delle diſtanze, e del numerico valore de' termini non comprendano ſe non in parte le vere proporzioni delle due ſpecie di elettricità; ciò non pertanto in qualſivoglia calcolo delle loro ragioni riconoſciamo la reſinoſa maggiore della vitrea. Non altro pertanto ci rimane, che di raccogliere ne' ſeguenti teoremi le funzioni di tutti i termini, che a compiere quella maggior ragione concorrono.

TEOREMA XX.

Raccogliendo inſieme le combinazioni di punte, e di ſuperficie a vicenda oppoſte riſultano le punte, e ſuperficie di reſinoſa elettricità ſuperiori alla vitrea 1. nelle ſemplici ragioni delle diſtanze ; 2. nel confuſo valore della numerica loro eſpreſſione ; 3. e nelle complicate funzioni de' fenomeni.

1. Primieramente nelle combinazioni di punte, e di ſuperficie oppoſte a punte (*teor. XIV. n. 3.*) ſono le diſtanze nella ſomma de' termini corriſpondenti dalla reſinoſa alla vitrea elettricità di pollici . . . . 53 : 32

E nelle combinazioni di ſuperficie a vicenda oppoſte ſecondo le ragioni degli ultimi cenni di luce, e delle ultime ſcoſſe della boccetta, e del quadro (*teor. 19. n. 1.*) ſono poll. . . . . 13 : 12

E nelle ſomme de' termini corriſpondenti all' ultima ſcoſſa della boccetta, e del quadro (*ivi n. 5.*) compoſte inſieme ſono . . . . 48 : 25

E ſommate (*ivi*) ſono poll. . . . . 14 : 10

E nel confronto de' termini corriſpondenti alternamente ſommati inſieme (*ivi n. 6.*) ſono poll. 8 ½ : 7, oſſia . . . . 17 : 14

Onde nelle ſemplici ragioni delle diſtanze ſono le ſomme . . . . 145 : 93

2. E nuovamente nelle combinazioni di punte ſono nel confuſo valore della numerica loro eſpreſſione (*teor. XIV. n. 4.*) come . . . . 225 : 144

E nelle combinazioni di ſuperficie ſono (*teor. prec. n. 2.*) come . . . . 52 : 29

E perciò ſommate inſieme ſono . . . totale 277 : 173

Le quali ridotte a minimi termini ſono proſſimamente come . . . . 27 : 17

3. Ed eſprimendone il valore con le complicate funzioni di fenomeni ſi riduſſe la reſinoſa tanto ſuperiore alla vitrea nelle combinazioni di punte (*teor. XIV. n. 5.*), quanto lo è una carica eſpreſſa con 225 ad altra eſpreſſa con 144 di quelle unità.

E fu ſimilmente nelle ſuperficie (*teor. prec. n.* 3.) la reſinoſa tanto ſuperiore alla vitrea, quanto una carica equivalente a 52 lo è ad altra equivalente a 29 di quelle unità.

Quindi ſommando e riducendo come ſopra a minimi termini ſono come 27 : 17.

4. E ſiccome non ſi cerca qui ſe non la complicata funzione de' fenomeni, ſi combineranno i precedenti numeri inſieme colla moltiplicazione, invece della ſemplice ſomma; indi ſi eſprimerà la proporzione loro in fenomeni di cariche equivalenti ai numeri 225 × 52, e 144 × 29 = 11700 : 4176 che è più di dupla.

TEOREMA XXI.

Che ſe inſieme ſi compongono le ſemplici ragioni delle diſtanze col confuſo valore della numerica eſpreſſione, e colle complicate funzioni de' fenomeni, riſultano in tutte le precedenti combinazioni vie più inſigni le varie ragioni di ſuperiorità della reſinoſa ſopra la vitrea elettricità.

1. Per raccogliere inſieme le precedenti ragioni ſommando ſarebbero nel precedente Teorema n. 1, 2, e 3. . 145 : 93
27 : 17
27 : 17
Totale 199 : 127

2. Ora moltiplicando le ſemplici ragioni delle diſtanze pel confuſo valore della numerica eſpreſſione ridotta ſarà 145 × 27 : 93 × 17 = 3915 : 1581.

Che ſe queſto ſi moltiplichi per l' eſpreſſione de' fenomeni ridotta ſimilmente in numeri 27 : 17; riſultano i prodotti 105705 : 26677.

I quali ſono proſſimamente in ragione quadrupla.

3. Se poi quel primo prodotto . . . . . 7840 : 2697
ſi ſommi col prodotto de' fenomeni (*teor. prec. n.* 4.) . . . . 11700 : 4176
ſarà la ragione delle ſomme . . . . 19540 : 6883
cioè proſſimamente tripla.

Onde e ſommando, e moltiplicando riſultano vie più inſigni, e varie le indicate ragioni.

TEOREMA XXII.

Non meno queſte ſemplici ragioni ſommate, che i loro prodotti ſi approſſimano colle corriſpondenti proporzioni, che dedotte abbiamo nella prima Parte, e ſi ragguagliano inſieme.

1. Se nella prima Parte (*teor. 1.*) ſommiamo le ſole prime ragioni delle diſtanze di piena carica, di metà, e dell' ultimo termine della ſcoſſa ſenza verun riguardo alle ſeconde ragioni dell' iſolamento, colle quali ſurono compoſte, abbiamo le ragioni . . . . 4 : 2

8 : 6

7 : 6

Totale 19 : 14

Similmente ſe nel Teor. XIV. n. 3., e nel Teor. XIX. n. 1, 5, e 6 ſi ſommino le ſemplici diſtanze, e ſi laſci ſuori la ragion compoſta di 48 : 25, abbiamo . . . . 53 : 32

13 : 12

14 : 10

17 : 14

Totale 97 : 68

Sommando colla precedente . . . . 19 : 14

abbiamo l' intera ſomma . . . . 116 : 82

la quale diviſa per due ci ſomminiſtra la ragguagliata ragione . . . , ... = 58 : 41

e ridotta a minori termini dividendo per tre reſta = $19\frac{2}{3} : 13\frac{2}{3}$. poco diverſa dalla prima.

2. Fu nel Teorema I. colla moltiplicazione delle diſtanze per l' inverſa degl' iſolamenti dedotta la ragione di que' fenomeni quadrupla.

E ſimilmente nel precedente Teorema n. 2. per la moltiplicazione delle diſtanze colla numerica eſpreſſione de' fenomeni ridotti ſi ebbe la compoſta ragione proſſimamente quadrupla; nel che ſi trovano ragguagliate quelle ragioni.

3. In fine del Teorema III. ſi calcolò la ragione loro, ſecondo diverſi riguardi, meno di quadrupla, e più di dupla.

E nel precedente Teorema n. 3, ſiccome pure nel Teorema

rema XX. n. 4. ſi calcolò ſimilmente in adequato poco meno di tripla.

Onde tanto nelle ſomme, che nei prodotti concordano con quelli della prima i riſultati della ſeconda Parte, e vengono proſſimamente a ragguagliarſi.

TEOREMA XXIII.

Le confuſe ragioni, che dai ſenomeni dedotte abbiamo tanto nella prima, che nella ſeconda Parte, ſi riſolvono in ragioni diſtinte riducendone ſecondo le nuove tavole del Teorema XVIII a comune miſura i termini corriſpondenti di tutte le premeſſe induzioni.

TEOREMA XXIV.

E con queſte diſtinte ragioni ſi ragguagliano le proporzioni tutte corriſpondenti alle diverſe preparazioni in ciaſcuna ſpecie di elettricità

TEOREMA XXV.

E quelle diſtinte ragioni, ed il ragguaglio loro con le proporzioni di reſinoſa, e di vitrea elettricità nelle diverſe preparazioni di ciaſcuna ſpecie, e nelle corriſpondenti oppoſte, riducono a piena evidenza gli elementi d' ogni elettrica azione, che fra le punte diſtinti abbiamo nella prima Parte, e ci porgono prevj lumi, e fondamenti ſtabili della nuova teoria, che andiamo rintracciando.

OSSERVAZIONE 8.

Dei tre ultimi Teoremi non ſoggiungo veruna dimoſtrazione. In due aſpetti può concepirſi la dimoſtrazione loro, o generalmente, o particolarmente; e nell' uno, e nell' altro aſpetto giudico meglio di ommetterla. Poichè nel primo, ſono abbaſtanza evidenti per sè ſteſſi come canoni di ampiſſime induzioni diſtinte, che tutte comprender debbono, ed eſaurire le ragioni d' ogni elettrico ſenomeno. Dalla enumerazione, e dal compimento di quelle induzioni verranno que' teoremi più efficacemente comprovati, che non con generiche eſpreſſioni di raziocinio. Ed appunto l' eſtenſione ſteſſa, e la moltiplicità di ſimili prove non ci laſciano qui luogo d' intraprendere nel ſecondo aſpetto a dimoſtrarli particolarmente. Sono alla terza Parte riſervate le ragioni delle cariche, e ſcariche elettriche, ed alla ſteſſa ſi aggiungono altre Memorie ſulle ragioni della adeſione, e dei moti elettrici, e ſopra ogni maniera di eccitamento, e di eſtinzione delle elettriche potenze. Ma quanto ai fenomeni dell'elettrica luce cercherò di ridurli a diſtinte ragioni nel ſeguente Capo terzo, con cui fin da principio propoſi di por termine alla ſeconda Parte della preſente Introduzione.

CAPO III.

Dei Fenomeni dell' elettrica luce.

PRima delle luminoſe ſperienze di *Hauksbee*, *Gray*, *Du-Fay*, e *Boſe* non diſtinſero comunemente i Fiſici l'elettrica dalla foſforica luce; e reſtò tuttavia dopo quelle tanta prevenzione per la ſuppoſta mancanza di calore nell' elettrica del pari, e nella foſforica luce, che fredde ſi credettero perfino le metalliche fuſioni fatte con elettrica ſcintilla; nè vi andò meno de' nuovi, e palpabili cimenti di *Kinnersley*, e di *Prieſtley* per concludere in fine, che ſono eſſe infuocate, ed ardenti.

Non iſfuggirono a *Du-Fay*, e a *Boſe* quelle differenze di figura, di grandezza, e di colore ne' fiocchi, o raggi luminoſi, che brillano nelle tenebre agli ſpigoli, o alle eſtremità degli elettrici condottori; e ne traſſero indi argomento per diſtinguere le due oppoſte ſpecie di elettricità, che nominarono *vitrea*, e *reſinoſa*; le quali furono da *Kinnersley*, e da *le Roy*, e da *Symmer* con piena evidenza dimoſtrate meglio colla reciproca loro eſtinzione, e colle leggi dei moti loro, che non colle ſemplici varietà di luce.

Deſcriverò io pertanto l' impreſſione dell' elettrica luce ſecondo la realità de' fenomeni preſcindendo per quanto ſia poſſibile da qualſivoglia eſpreſſione di ipotetico linguaggio, o di ſiſtematico criterio. E cominciando a ridurre ſotto certi capi le circoſtanze, che coſtantemente, e generalmente producono, o accompagnano qualunque apparenza di elettrica luce, paſſerò indi a diſtinguerne ordinatamente la varietà, e le differenze di figura, di grandezza, e di colore; e dal compleſſo in fine delle generali, e particolari leggi di que' ſenomeni tenterò di dedurne alcun lume di teorica applicazione.

ARTICOLO I.

Leggi de' generali ſenomeni della elettrica luce.

NIuno pensò fin ora a diſtinguere i generali dai particolari ſenomeni dell' elettrica luce, non che a fiſſarne diſtinte leggi. Spererò io d' incominciarne, e di compierne in un ſol tempo l' impreſa? Son certo d' incominciarla; e ſia nel rimanente libero ad altri il giudizio o di riconoſcerla compiuta, o di compierla più felicemente.

Legge Prima. Non v' ha elettrica luce, ſe non in quanto ſuſſiſte, cioè o ſi eccita, o ſi rinnova il moto della ſteſſa elettricità.

1. Or queſto moto può farſi in due modi, o ſeparando l' una dall' altra le oppoſte ſpecie, che ſtanno inſieme unite, e ſpente, ovvero riunendo inſieme l' una coll' altra le due ſpecie, che furono previamente diviſe, e ſciolte. Si chiamò quel primo da' Frankliniani *turbamento di equilibrio*, come l' altro ſi appella *reſtituzione, o ritorno all' equilibrio naturale*.

2. E quanto al modo primo a niuno è ignoto, che nei lembi della mano, o del cuſcinetto, con cui ſi ſtroffina il cilindro, o il diſco dell' elettrica macchina, appariſce luce, finchè colla rotazione di queſti ſi mantiene vivo il moto della elettricità eccitata. Sprizzano ſimilmente or più, or meno, finchè tal moto ſuſſiſte, dagli ſpigoli, o dalle punte del condottore certe lucide ſiammelle. Ma ceſſa ogni luminoſa apparenza ceſſando la rotazione, che quel moto produce.

E nel ſecondo modo, ſe al condottore elettrico ſi preſenta altro corpo capace d' indurre moto in quella elettrica potenza, ſi ha ſecondo la proporzione del moto ſteſſo l' elettrica luce.

3. Ma qui d'uopo è rilevare un capitale errore, che è comunemente invalſo per mera illuſione del Frankliniano linguaggio. Tra quel condottore e un corpo reſiſtente appreſſato non vi è luce ſecondo i Frankliniani, perchè in queſto non può ſpanderſi ad equilibrio il fluido condenſato in quel primo; vi è bensì luce tra quello e un nuovo condottore, che ſi appreſſi, perchè in queſto quel fluido più denſo ſi ſpande, e ſi divide.

4. Il fatto nella prima ſua parte è ordinariamente vero, ma falſa è la ragione, da cui ſi ripete. E con queſta falſità appunto ſi adottò per contraria ragione come un fatto la ſeconda parte, mentre queſta è falſa in fatto, quanto falſe ſono e quella prima, e queſta contraria ragione, d'onde ſi derivò. Dico dunque, che una sfera metallica, che non oltrepaſſi il diametro di due pollici, purchè bene ed eſattamente iſolata ſi appreſſi fino a minima diſtanza a quel condottore comunque elettrico, non ammette il menomo cenno di luce, come ritirandola dopo tale approſſimamento non ritiene la menoma ombra di elettricità. Io l'ho provato più e più volte, e ne' tempi propizj alla ingenuità degli elettrici fenomeni mi è coſtantemente riuſcita la coſa appuntino, come l'aſſeriſco; e ſono certiſſimo che non riuſcirà mai altrimenti a chi vorrà debitamente convincerſene colla propria eſperienza.

5. Troppo mi ſcoſterei dal propoſto argomento ſe proſeguir voleſſi gli accidenti, che in ſimil foggia di ſperienze occorrono variando l'iſolamento, e la grandezza, e la figura de' corpi, che ſi preſentano. Saranno quelli più opportunamente diſtinti in altre Memorie; ed avvertirò frattanto, che brilla talvolta manifeſta luce nel condottore elettrico, o nel corpo iſolato, che ad eſſo ſi preſenta. Ma ben lungi che ciò accada come i Frankliniani la diſcorrono per ſemplice trapaſſo, ed eſpanſione del primo fluido, ſi riconoſce all' oppoſto per tal atto nel corpo preſentato l'elettricità contraria alla prima del condottore; quando dovrebbe pur trovarſi l' omologa in proporzione della luce, ſe naſceſſe queſta, o ſi eccitaſſe per ſemplice moto e diſtribuzione d' un fluido ſolo.

Legge ſeconda. Ed è del pari neceſſario il moto della elettrica potenza, acciò luce ſi manifeſti. 1. ne' condottori; 2. ne' reſiſtenti riſpettivamente fra loro; 3. ovvero fra gli uni, e gli altri alternamente.

1. Nella conſueta macchina elettrica tra il condottore e il dito, o altro condottore non iſolato, che ſi avvicini, brilla continuo ſplendore, o ſcintillazion, finchè ſi gira il diſco; cioè finchè la cauſa ſuſſiſte di moto dell' elettrica potenza fra l' uno e l' altro condottore. Ceſſando i giri del diſco non brilla tra il condottore e il dito altra luce, o ſcintilla, ſe non in proporzione del moto, che nella elettricità reſidua s' induce col ſucceſſivo accoſtamento d' un eſterno condottore.

Simili fenomeni ſi rendono più compoſti, ed inſigni, ſe a proporzionate diſtanze del primo condottore ſi collochi una ſerie di condottori iſolati di figure diverſe, e s' induca indi, o ſi tolga la capacità, e ſucceſſione di moto della elettrica potenza fra tutti, o parte di que' condottori preſentando or all' ultimo, or agli intermedj la mano. Poichè nell' atto ſteſſo, che s' interrompe, o ſi apre l' adito al moto della loro elettricità, ſi rende nullo, o ſi manifeſta, e ſi accreſce ne' medeſimi l' elettrico ſplendore.

In quella ſerie di macchinette attraverſo delle quali io traggo la ſcarica di qualſivoglia elettrica batteria (*Nuove ſperienze elettriche n.* 43, *e ſeg.*) non compariſce mai luce, ſe non in proporzione del moto, che s' induce tra le elettriche potenze, che ſono previamente frenate a vicenda ſulle oppoſte facce armate di quella batteria.

2. A rendere poi manifeſta la neceſſità del moto delle elettriche potenze, acciò luce ſi ottenga fra i reſiſtenti, niun genere di ſperienze cade più in acconcio, quanto quelle, che brevemente deſcriſſi nell' opera ora citata al capo ultimo *Della elettricità ne' fogli di carta bianca*. Gioverà qui combinarne ſu quel guſto alcune più convincenti.

(*a*) Prendo due ſottili, ed eguali laſtre di criſtallo armate al ſolito da ambe le facce; e ſovrapponendole in modo, che ſi adattino egualmente e le laſtre, e le interne armature l' una ſull' altra, le carico in un ſol atto preſentandole, come ſe foſſero una ſola, al condottore elettrico. E così come ſono caricate le ſeparo l' una dall' altra, e le riuniſco ſenza vederne la minima luce; purchè nel ſepararle, e nel riunirle non tocchi l' una, o l' altra delle loro armature, e per tal modo non rivolga eſteriormente alcun moto tra le oppoſte elettricità, che a vicenda ſi frenano nelle oppoſte facce di quelle reſiſtenti lamine, e non hanno perciò tra l' una e l' altra ſufficiente commercio di moto, quanto ſi richiede per renderne ſenſibile la luce.

(*b*) Frappongo alle ſteſſe laſtre ancor cariche due fogli di carta bianca; e finchè ſeguo a riunirle, e a ſepararle in guiſa, che non s' introduca notabile moto tra le oppoſte loro elettricità, non appariſce in tali atti veruna luce.

(*c*) Che ſe mentre ſono riunite con fogli di carta bianca frappoſti io tocco o l' una, o l' altra, o ambedue in un ſol tempo le oppoſte armature, come in tal atto ſento colla ſcoſſa, e vedo nella ſcintilla l'eſterior impreſſione del moto delle oppoſte elettricità, così nella ſucceſſiva ſeparazione d' una laſtra dai frappoſti fogli appariſcono ſegni di luce corriſpondenti all' interiore moto, che in tal atto ſuccede tra le oppoſte potenze; e ſeguono ſimili ſegni nella ſeparazione del ſuperiore foglio dall' inferiore, e poi di queſto dall' ultima laſtra.

(*d*) Spoglio quelle laſtre di criſtallo d' ogni armatura, e frappongo più fogli di carta bianca tanto larghi, quanto ſono le intere laſtre, e le cuopro eſteriormente di fogli eguali. Indi o ſi ecciti collo ſtrofinamento aſſai viva elettricità tra quelle laſtre, e que' fogli, ovvero ſi carichino tutti inſieme alla macchina con applicare al ſolito eſteriormente due oppoſte armature, abbiamo in ſeguito nella ſeparazione di ciaſcun foglio, e di ciaſcuna lamina manifeſte ſtriſcie di luce ne' ſucceſſivi lembi, o limiti, che ſi ſeparano in proporzione del moto, che in tal atto s' induce fra le oppoſte elettricità delle facce, che previamente ſono a contatto.

(*e*) Cercai ſe quel moto ſemplicemente, e direttamente ſi compia attraverſo il mezzo reſiſtente fra le oppoſte potenze previamente eſiſtenti in quelle vicine facce, che ſi ſeparano, e perciò il mezzo frappoſto non faccia altro officio, che di meccanico impedimento; ovvero ſe ciaſcuna di quelle potenze eſſendo poſta per tale ſeparazione piuttoſto in neceſſità di azione coll' aria, che in moto coll' oppoſta, per tale nuova azione ſmuova nella vicina faccia dell' aria altre elettricità, le quali nel riunirſi inſieme alle prime raddoppino quel moto come ſi raddoppiano le azioni. Imperciocchè (diſſi meco ſteſſo) ſtando quelle facce a contatto non è ſe non ſemplice, e immediata l' azione dell' una coll' oppoſta potenza, d' onde ne naſce la coeſione. Eſſendo queſta vinta per la forza con cui ſi diſtruggono, e ſi ſeparano quelle facce reſiſtenti, non acquiſtano perciò le contrarie potenze maggiore facilità di moto, ſe non nel caſo, che ſi frapponeſſe un condottore; ma frapponendoſi un mezzo reſiſtente, come l'aria, non altro accade, ſe non che ciaſcuna ſulla vicina faccia dell' aria eſercita l' azione ſteſſa, che ſull' oppoſta eſercitava. Ora con queſta raddoppiata azione ſi ſmove nelle oppoſte facce dello ſtrato d'aria la nativa elettricità con doppia direzione, l'una fra le due ſpecie riſpettivamente oppoſte verſo le vicine facce ſeparate, l' altra fra le due ſimilmente oppoſte, che indirettamente reſtano libere, e s' incontrano nell' interiore groſſezza dell' aria frappoſta. Mi parve adunque, che in queſto doppio sforzo diretto, e indiretto delle contrarie potenze doveſſe preſentarſi tale groſſezza del frappoſto mezzo, per cui veniſſero eſſe determinate al moto di riunione; e ciò maſſimamente, perchè il mezzo ſteſſo paſſa ſucceſſivamente per tutte le miſure di groſſezza, e per la ſomma ſua mobilità ſi preſta a convertire que' moltiplici sforzi in vera azione di moto. E perciò concluſi ragionando, che non nel primo, ma nel ſecondo modo, che da principio indicai, ſi compiono que' moti, che a certi intervalli di tale ſeparazione fanno le ſtriſcie luminoſe.

(*f*) Nè dal raziocinio ſembrommi diſcorde l' oſſervazione, e l'eſperienza. 1. Se naſceſſe tal luce per ſemplice, e diretto moto delle oppoſte potenze, nell' aria più ſecca, che a tal moto maggiormente reſiſte, dovrebbe apparir meno luce, che nell'aria umida, che è meno reſiſtente: eppure ſi oſſerva tutto l' oppoſto. 2. Nell' aria ſecca, per cui ſi fa più viva luce, dovrebbero indebolirſi tanto più le oppoſte elettricità che ſi ſuppongono ſole, e direttamente riunite per riſplendere; al contrario nell' aria umida quanto meno vi è luce, tanto dovrebbero trovarſi meno indebolite. Il che nuovamente è contrario all' oſſervazione, eſſendo incredibilmente più vivi, e inſieme più durevoli que' fenomeni nell' aria ſecca, che nell' umida. 3. E quanto è più viva la luce, non ſolo tanto maggiormente, e più preſto dovrebbero indebolirſi quelle contrarie potenze; ma nell' aria ſteſſa più ſecca dovrebbero eſtendere a minori diſtanze l' azione loro laterale, e laſciar nell' aria minori reſidui di elettricità. Poichè quanto più direttamente ſi uniſſero, tanto meno potrebbero agire lateralmente, e tanto minor porzione non unita rimarrebbe nell' aria. Ora in tali eſperienze e i laterali effetti, e le reſidue elettricità diviſe, e ſparſe per l' aria ſono ſenza paragone maggiori nella ſecca, che nell' umida. E ciò baſti per ora, mentre ci occorrerà di parlarne alquanto più eſteſamente nella Legge ſeſta qui appreſſo.

(*g*) Comunque però immediato ſia, o indiretto ſiffatto moto non naſce certamente quella luce, ſe non pel moto ſteſſo, e per mutua unione delle oppoſte elettricità ne' limiti di ſeparazione di que' ſogli. E di ciò ne abbiamo manifeſto incontro nella riunione de' medeſimi; poichè preſentati nuovamente ad uno ad uno fra loro, o alle ſteſſe laſtre in proporzione, che ſi rinnova il moto, o la mutua unione fra le reſidue oppoſte potenze rendono manifeſta luce nei ſucceſſivi limiti di riunione; ma non ſi attraggono, nè ſi comprimono l' uno ſull' altro, ſe non tanto meno, quanto minore è il reſiduo delle oppoſte elettricità, che in tal atto non paſſano a riunirſi.

(*h*) E ſe fra quelle facce finitime non ſi rinnovi il moto delle contrarie potenze (poichè eſſe come da principio oſſervai (*a. b.*) a vicenda ſi frenano fralle oppoſte facce di ciaſcun foglio, e di ciaſcuna laſtra, e perciò non poſſono far moto eſteriormente) come non ſi eccita ſe non tenue attrazione, così niuna luce fra quelle ſi manifeſta.

(*i*) Or mentre que' fogli, e quelle laſtre ſtanno così finitime, e ſovrappoſte con niuna, o con tenue adeſione, ſe con nuovo ſtrofſinamento, o col contatto delle oppoſte armature, io rinnovo, o rivolgo eſteriormente fra le vicine loro facce alcun moto di contrarie potenze, ſiccome più ſopra accennai (*c*), ſi ſpianano e ſi ſtringono in quell' atto l' une ſulle altre, ed in proporzione del moto ſteſſo ſi rinnovano nella loro ſeparazione, o accoſtamento quelle ſtriſcie, o lembi luminoſi.

3. Per dimoſtrare in fine, che tra i condottori e i reſiſtenti luce non naſce altrimente ſe non per moto, o mutua unione delle elettriche potenze, ſono nati fatti que' molti eſperimenti, che narrai ne' *Dubbj, e penſieri ſulla teoria degli elettrici fenomeni* cominciando dal numero 127, e ſeguenti. Poichè in tutti i caſi, nei quali fra lo ſcudo e la ſottopoſta

faccia

faccia di criſtallo s' introduce colla ſeparazione, o coll' accoſtamento, o col contatto, o collo ſtroffinamento alcun notabile moto delle elettricità, ſi manifeſta in eſſi proporzionata luce. E niuna ſe ne manifeſta giammai ſenza tale modo, che il freno ſciolga, e il moto determini delle elettriche potenze.

Legge terza. Nè tal moto, che per l' elettrica luce è neceſſario, ha luogo mai altrimenti ſe non fra le oppoſte potenze, o contrarie ſpecie di elettricità.

1. Benchè ſembri queſta un immediato corollario delle precedenti, meglio però ſia dichiararla con dirette ſperienze. E primieramente coll' apparato deſcritto nell' opera in ultimo luogo citata al numero 127, come luce ſi oſſerva ogni volta che s' introduce moto fra le contrarie potenze, o ciò ſi faccia colla ſeparazione, o colla reſtituzione, o col contatto dello ſcudo ſul criſtallo; così niuna luce appariſce qualunque volta ſi ſepara lo ſcudo, o ſi reſtituiſce ſull' elettrico criſtallo, quando quello è ſpogliato di elettricità (*ivi n.* 133. 138.), e quando non è fornito, che di omologa alla ſottopoſta faccia del criſtallo (*ivi n.* 121. 136.), finchè in ſomma niun moto ha luogo tra le contrarie potenze.

2. E qui con maggiore diſtinzione ripiglierò quell' eſperimento, che ivi in fine ſemplicemente come un paradoſſo accennai (*ivi n.* 168.). L' eſperimento è queſto. Sta ſul diſco di criſtallo uno ſcudo, che nel ſepararlo diſpiega la virtù contraria a quella del diſco. Se prima di ſepararlo io ſcarico ſullo ſteſſo una, o più bocce aſſai cariche, e per tal modo accreſco altamente la forza eſplodente di quel diſco, quattro fenomeni in propoſito noſtro appariſcono principalmente degni di oſſervazione. 1. Lo ſcudo ſteſſo ſtando a ſuo luogo moſtra eſteriormente elettricità omologa alla faccia ſteſſa del diſco; 2. ed omologa ſegue a dimoſtrarla anche dopo che da queſta viene ſeparato; 3. ma tanta è l' adeſione tra il diſco e lo ſcudo, che per ſepararlo vi vuole forza tripla, o quadrupla, che non ne' caſi precedenti; 4. nè ſi fa mai quella prima ſeparazione ſenza forte ſtridore, e viva luce di ſcintille tra lo ſcudo e il diſco, da cui ſi ſtacca.

3. L' analiſi di ſimile eſperimento avrà luogo in altre Memorie, e ci guiderà a reconditi principj della teoria. Sembra in vero a prima viſta contrario alla ſteſſa legge, che ora

dichiariamo dell' elettrica luce. Poichè ſe nello ſcudo e prima, e dopo la ſeparazione, altro non riſiede, che elettricità omologa alla vicina faccia del diſco; d' onde mai nella ſeparazione naſcono quelle ſtridenti ſcintille per opera delle contrarie potenze, che a tal uopo ſi eſigono? Ma per poco che ſi rifletta anzichè contrario ſi troverà più che altro mai conforme alla ſtabilita legge. Naſce in queſto, come in ogni altro compleſſo di fenomeni, la contraddizione, e il paradoſſo dalla incapacità di ben comprenderli, o dalla imperfetta, e tronca forma di eſprimerli, non mai dall' ingenuo linguaggio della natura.

4. Per verità ſe nella ſeparazione dello ſcudo l' ultimo fenomeno di luce e di ſcintille non ſi riferiſca che al primo, e ſecondo di omologa elettricità, naſce il paradoſſo; ma ſvaniſce toſto che ſi fa ragione al terzo fenomeno, e tutto ſi comprende l' eſperimento nella ſua integrità. D' onde tanta adeſione, ſe non per mutua efficacia delle oppoſte potenze? Se dunque tali e tante ſono nel diſco, e nello ſcudo, quanto più forti ſi moſtrano colla maggior reſiſtenza nel ſepararli; perchè col moto delle ſteſſe, che in tal atto ſi determina, non faranno luce, e ſtrepito corriſpondente?

5. Eſſendo adunque che coll' eſteriore comparſa di virtù omologa a quella del diſco, ciò non oſtante acquiſta lo ſcudo con eſſo maggior adeſione, non v' ha dubbio, che nello ſcudo ſteſſo non ve n' abbia tanta copia di contraria, quanta neceſſariamente per la ſteſſa adeſione ſi richiede. Proverò altrove con ogni genere di ſperienze, che ſempre e per neceſſità l' una inſieme all' altra s' incontrano le contrarie elettricità non ſolo nelle oppoſte facce degli ſtrati, o lamine reſiſtenti, ma in ciaſcuna faccia di qualſivoglia corpo reſiſtente, o condottore; che ove non ha luogo tale ſimultaneo incontro, ivi non ha luogo nè lo ſviluppo, nè la raccolta, nè verun ſegno di elettricità; che qualſivoglia elettrico ſegno non è ſe non l' immediato effetto di tale ſimultanea preſenza, ed incontro delle oppoſte potenze. Ma ſiccome ſiffatte induzioni ai generali principj appartengono della teoria, perciò riſervandole per altre Memorie, mi reſtringerò qui a conſiderarne ſoltanto i modi, e le circoſtanze, che l' elettrica luce immediatamente riguardano.

Diſtinſi ſul bel principio (*legg.* 1. *n.* 1.) due modi nel moto delle elettriche potenze, che luce producono. Or que' due modi vogliono più intimamente conſiderarſi, e ridurſi a più eſatta eſpreſſione. Due ſono realmente, e diverſi fra loro i modi, e gli atti, che il moto fanno di ſeparazione, o di riunione delle elettriche potenze, un ſolo però è il moto che in que' diverſi modi eccita l' elettrica luce. Non è il moto di ſeparazione diverſo dal moto di riunione, anzi non è quella che la riunione ſteſſa d' una parte di quelle potenze nell' atto che ſi ſciolgono, e ſi dividono.

6. Imperciocchè niuna ſpecie può ſuſſiſtere ſenza certa, e determinata azione, oſſia ſenza l' eſercizio della propria forza. Or queſta finchè immediatamente ſi eſercita con proporzionata doſe di contraria ſpecie, non dà, nè può altrimenti dare eſteriori indizj di azione nè ſu i ſenſi noſtri, nè ſu i corpi ambienti; eſſendo che quella interiore, ed immediata loro azione non ha altro rapporto nè coi ſenſi noſtri, nè coi corpi ambienti, ſe non in ragione delle differenze, che tra quell' interiore conflitto, e mutua colliſione direttamente, o indirettamente s' introducono. Acciò eſteriormente ſi manifeſti, un atto vi vuole, che alteri l' oppoſizione, o l' eguaglianza di quelle forze, e ne ſcomponga così quell' immediata unione; ed in tal atto conſiſte il primo eccitamento dell' elettrica virtù; del quale non è queſto il luogo di far altre parole.

Dirò ſoltanto, che a ſcomporre quella previa, e naturale unione (dico *naturale* per eſſer quella, da cui comincia, e in cui finiſce naturalmente ogni fenomeno di elettricità) d' uopo è di concepire un corpo, o il concorſo di più corpi, o di più moti inſieme, che una di quelle forze traggan fuori dall' altra con eccesſo, e predominio di azione. E queſt' eccesſo, e predominio con una di quelle ſpecie ſopra l' oppoſta o è coſtante, ovvero non è che paſſaggero, e momentaneo. Nel primo caſo entrerà la ſpecie ſteſſa in nuova compoſizione con que' corpi, d' onde tale eccesſo proviene, e indurrà in eſſi mutazione corriſpondente al nuovo acquiſto, o modo di unione. Nel ſecondo ſarà quella ſpecie pronta a trapaſſare in altri corpi, che per poco ſuperino quel primo eccesſo; ovvero ſcemando in que' primi in qualſivoglia modo quel compleſſo, d' onde tale eccesſo nacque, reſterà per naturale virtù la ſpecie ſteſſa pronta, e ſpinta a riunirſi colla ſua prima oppoſta, e ſarà perciò ſino al compimento di tale unione capace di dar ſegni, e prove eſteriori della ſua forza.

7. Nè deve traſcurarſi frattanto, nè porſi in dimenticanza l' oppoſta ſpecie, da cui fu ſeparata, e tratta fuori la prima. Poichè quella diſpiega in tal atto eſteriormente tutta l' energia delle proprie forze, e ne fa prova o con altri corpi, come nel caſo precedente, o immediatamente con altra elettricità preeſiſtente nella naturale ſua quiete, e unione, colla quale s' incontra. Non ſarebbe al certo quella capace di ſciorre la naturale unione di queſta, ſe l' incontro loro non foſſe, che in eguaglianza di particelle, o di maſſe le une ſciolte, le altre fiſſe, ed unite. Ma vi è la differenza, che continuando gli atti del primo eccitamento, le particelle, o maſſe, che indi ſono ſciolte, creſcono inceſſantemente con progreſſione a quegli atti proporzionata, e in oltre acquiſtano momento per la figura de' condottori; e perciò inveſtono, e attaccano da ogni parte in un ſol tempo ad una ad una le quiete particelle, e non poſſono far meno di non ſmoverle, e ſepararle. Ed in ciò conſiſte il giuoco di continuo ſmovimento, e ſoluzione di nuova elettricità, che ſuccede ad ogni atto del primo eccitamento, e che proſegue, e creſce, o ſcema in proporzione, che quello continua, e prende vigore, o ſi rallenta.

8. Abbiamo dunque in ogni atto, o eccitamento di elettricità due ſerie, o vie d' azioni; la prima diretta, come nel numero 6 ſpiegai; indiretta l' altra, ſiccome diſſi in ultimo luogo. E ciaſcuna di queſte ſerie diretta, o indiretta, immediata, o mediata preſenta due oppoſti andamenti, uno di aumento colla ſucceſſiva, e continua ſoluzione di quelle ſpecie, che coſtituiſcono per tal via l' intenſità dell' elettrica potenza; l' altro di decremento colla riduzione delle ſpezie ſteſſe a mutua riunione, la quale coſtituiſce il degradamento de' ſegni, oſſia le reſiſtenze, che ad ogni ſpecie di elettrica potenza ſi oppongono. Talchè ſiccome non creſcono i ſegni, ſe non per l' eceſſo di elettrica virtù, che ſi eſterna; così non decreſcono ſe non pel ſucceſſivo ritorno della virtù ſteſſa alla interiore direzione: e in ſomma come l' intenſità di que' ſegni riſulta dagli eceſſi di una ſola ſpecie, che rimane ſciolta, e forzata di

accumularſi inſieme; così la degradazione, e le reſiſtenze, che ſi oppongono a quella intenſità, non dipendono, ſe non dalla oppoſta ſpecie, che ſimilmente ſciolta, e forzata di accumularſi reſtituiſce gradatamente, e compie in fine la priſtina loro riunione.

9. E riſtringendo queſte conſiderazioni all' elettrica luce, dico, che qualſivoglia azione, o moto tanto della prima ſola, come dell' oppoſta ſpecie di elettricità colle parti di qualſivoglia genere de' corpi ſi riconoſce affatto inetto a dar ſegni di luce; nè queſta ha luogo altrimenti, ſe non pel moto di riunione d' una ſpecie colla ſua oppoſta, comunque poi ſi faccia tal riunione o per la prima diretta, o per la ſeconda indiretta via, che più ſopra ho diviſato. Onde non v' ha luce altrimenti, finchè la prima ſcorre nella paſſeggera unione de' condottori, e finchè la ſeconda non è in tale eccesſo da ſmoverne altra, e indi trarre a sè la contraria; e finchè per fine non ſi riducono all' atto di vicendevole riunione le parti della prima con altre della ſeconda: nel che conſiſte l' unità del moto, che più ſopra accennai (*n.* 5.) in mezzo alla varietà dei modi, e delle vie che al moto ſteſſo diſpongono, o conducono.

Legge Quarta. E le contrarie potenze, che nella riunione loro fanno l' elettrica luce, riſiedono ſenza luce inſieme non meno ne' condottori, che ne' reſiſtenti; e ſecondo varj rapporti or tutte, ora in parte ſoltanto ſi frenano, o ſi determinano al moto di riunione.

1. In principio a ſiffatto moto ſi oppone e la paſſeggera unione d' una ſpecie con altri corpi, e la tenue quantità dell' oppoſta, che non è capace di vincere con prevalente forza la naturale unione delle due ſpecie ſparſe ne' corpi ambienti: come per oppoſto a ſiffatto moto di riunione conduce tutto ciò, che o libera la prima da quella paſſeggera unione, o accreſce la ſomma della ſeconda; e rende così e l' una, e l' altra capace di ſmoverne intorno a sè, ed unirſi riſpettivamente all' oppoſta; ovvero di riunirſi a parte a parte direttamente fra loro.

Ma in progreſſo a queſti unicamente non ſi riſtringono i modi, che o ſi oppongono, o riconducono a quel moto di elettrica luce. Ben diverſi, e molti ſono altri modi che frenano le elettriche potenze, comunque accreſciute, e le ritengono in mero ſforzo, e preſſione; e molti che per oppoſto le rendono capaci di moto, e di riunione, ſiccome altrove dirò più opportunamente.

2. Or come non vi è luce, nè altro ſegno di elettricità, quando immediatamente ripoſano nella nativa loro unione le oppoſte ſpecie (*legg. 3. n. 6. in principio*); così quando le ſpecie ſteſſe comunque diviſe ſi frenano a vicenda per frappoſti oſtacoli, e non eſercitano le forze loro ſe non in continuo sforzo, o preſſione, poſſono bensì far moti, e adeſione fra i corpi, che le ritengono, e le dividono, ma non fanno mai luce, ſe non in proporzione dell' effettivo loro moto, e riunione. E qui più che in altre conſiderazioni è indiſpenſabile non ordinaria diſtinzione d' idee, e ſagacità d' intelletto per ben diſcernere i varj rapporti delle potenze, che ſi frenano, e degli oſtacoli, che le riducono a ſemplice preſſione; e per riconoſcere in oltre ſecondo que' rapporti le parti, che or ſolitarie, ora inſieme, or con lenta, or con rapida ſucceſſione paſſano a riunirſi. Sono adunque in più modi intralciate, e miſte inſieme le oppoſte elettricità, ora ſaturate a parte a parte in ciaſcuna particella, e ſi dicono *ſpente*, nè danno perciò verun ſegno; ora con tendenza mutua, o *preſſione*, e fanno inſenſibile unione fra le loro particelle, onde non inducono ſenſibile luce, ma ſoltanto manifeſtano ſenſibili moti, e adeſione; ora per fine s' incontrano con notabile moto di riunione, e fanno luce, e ſcoppio; ed è ciò appunto, che al preſente ſtiamo dichiarando.

3. In fatti nell' eſperimento, che nella precedente legge narrai (*n.* 2.), ſi manifeſtano per sè ſteſſe evidentemente tre porzioni diſtinte, oſſia tre diverſi rapporti di vicendevole freno, e preſſione. Il primo fra lo ſcudo e l' aria ambiente. Il ſecondo tra lo ſcudo e la vicina faccia del diſco. Il terzo tra le oppoſte facce del diſco. Quanto al primo fra la potenza dello ſcudo e dell' aria ambiente ſi manifeſta nello ſcudo ſteſſo e prima, e dopo della ſua ſeparazione con moti, che dimoſtrano la ſua ſpecie omologa alla vicina faccia del diſco, e ſi conſerva in eſſo finchè non ſia ſpenta. Si ſpegne queſta con preſentare un condottore immerſo nell' aria ambiente allo ſcudo; poichè fra queſti per la condottrice loro na-

tura ſi muovono per ogni verſo quelle oppoſte potenze, e perciò giunti a certa diſtanza ne facilitano il moto, e ne compiono la riunione con proporzionata luce, e ſcintilla.

4. Segue il ſecondo rapporto tra l' altra porzione di elettricità dello ſcudo oppoſta a quella della vicina faccia del diſco; le quali porzioni finchè ſi frenano fanno l' adeſione, e colla ſeparazione del diſco ſi pongono in moto, e ne danno corriſpondenti ſegni di ſcintilla, e di luce (*legg.* 3. *n.* 4. 5). Ma per intendere e come ſi frenino finchè lo ſcudo è a contatto col diſco, e come ſi pongano in moto, quando lo ſcudo vien rimoſſo a certa diſtanza, ſi rifletta, che nel primo caſo ciaſcun punto della faccia del diſco immediatamente agiſce contro il ſovrappoſto punto dello ſcudo, e perciò l' azione di queſto reſtando così diviſa, e diffuſa egualmente non fa notabile, nè prevalente moto contro l' uno o l' altro de' ſottopoſti punti, benchè ſieno dotati di contraria elettricità. Rimovendoſi poi dal contatto lo ſcudo, due mutazioni accadono nella ſua elettricità, le quali debbono qui partitamente eſaminarſi. Le mutazioni ſono queſte. 1. L' elettricità omologa di ciaſcun punto nella faccia dello ſcudo diventa col rimoverſi di queſto più vicina fra di sè, che non colla contraria de' ſottopoſti punti del diſco; 2. la faccia ſteſſa in tale ſeparazione non reſta più neceſſariamente piana, e parallela ſulla faccia del diſco, ma preſenta, o prende qualche inclinazione, o prominenza più verſo una, o alcune, che verſo le altre parti.

5. E in primo luogo nel rimoverſi lo ſcudo ciaſcun punto dell' inferiore ſua faccia ritiene la primiera ſua poſizione, e vicinanza per rapporto alla ſua ſpecie di elettricità, ma quanto più ſi rimove, tanto più ciaſcuno di que' punti ſi allontana dai corriſpondenti della faccia del diſco, ne' quali riſiede la contraria. Quindi tanto queſti della faccia del diſco, quanto quelli dello ſcudo non eſercitano più gli uni cogli oppoſti immediatamente la loro azione, ma bensì per mezzo dell' aria, che fra loro ſubentra. Frattanto però ritenendo la relativa loro poſizione per rapporto alle ſpecie di elettricità, che in ciaſcuna faccia riſiedono, rimane l' azione di quelle nella ſua integrità; e perciò quanto più lo ſcudo ſi ſcoſta dalla faccia del diſco, tanto meno l' una coll' altra ſi frenano quel-

le oppoſte potenze, e tanto maggior vigore ciaſcuna prende per sè ſteſſa, e lo eſercita contro l' aria frappoſta, e contro i corpi in eſſa immerſi.

6. E benchè ciò ſi riconoſca apertamente dagli elettrici moti, che in ſimile apparato altrove deſcriſſi (*loc. cit. n.* 161. 162.), mi piace di confermarlo direttamente con fenomeni di elettrica luce. Dopo che ſi è ſpenta nello ſcudo la omologa virtù coll' opportuno accoſtamento d' un condottore (*n.* 3.), ſtacco lo ſcudo dal diſco, ma con tale avvertenza, che ſi ſcoſti egualmente dalla ſua faccia appena una linea; e fermandolo in tale poſizione, la prima volta che accoſto il dito per toccarlo ne ho una ſcintilla tenue di luce, ma ſtridente, e pungente; e comunque ſegua poi a toccarlo, finchè ſi mantiene a quella diſtanza non riporto più mai altro ſenſo di luce, nè di ſcintilla. Che ſe alzo prontamente di più lo ſcudo dalla diſtanza di una linea fino ai quattro o ſei pollici, al primo accoſtamento del dito ne riporto una nuova ſcintilla più lucida, e meno pungente della prima. Se in un ſol atto inalzo da principio lo ſcudo a queſt' altezza, ne riporto col dito una ſcintilla equivalente per sè ſola alle due, nelle quali col precedente modo fu diviſa.

Nel che è manifeſto, che le oppoſte potenze fra lo ſcudo e la vicina faccia del diſco, ſiccome interamente ſi frenano col mutuo contatto, così proſeguono a frenarſi in parte a certa diſtanza; e in fine tanto meglio per sè ſteſſe ſi diſpiegano, quanto l' una dall' altra ſi allontana.

7. Paſſa ciò non oſtante tra lo ſcudo e il diſco la differenza, che in quello come condottore ha facile moto per ogni verſo l' elettricità della ſua faccia; il che per oppoſto non accade nella faccia del diſco per eſſere di reſiſtente natura. Quindi è, che combinandoſi queſta differenza colla ſeconda mutazione, che nella ſeparazione accade (*n.* 4.), e conſiſte in qualſivoglia inclinazione, o prominenza della faccia dello ſcudo verſo la ſottopoſta faccia del diſco, per queſta via ſi toglie l' eguaglianza delle diſtanze, e del vicendevole freno fra ciaſcun punto di contraria potenza nelle oppoſte facce; e perciò quella elettrica forza, che per ragione delle diſtanze e per la conducente natura dello ſcudo ſi trova in eſſo mobile, paſſa per quella inclinazione, o prominenza coll' eccesso ſuo

ſuo a riunirſi con l' oppoſta ne' ſottopoſti punti dello ſcudo, e fa in tal atto luce, e ſcintilla.

8. Ciò che direttamente diciamo delle potenze dello ſcudo, e della ſottopoſta faccia del diſco, in ſimil modo s' intenda dello ſtrato d' aria frappoſto nella loro ſeparazione ſecondo le reciproche, e indirette azioni previamente dichiarate nella Legge ſeconda (*ivi n.* 2. *e.f.*). Nè fra queſte e quelle conſiderazioni paſſa altra differenza, ſe non che tutte ivi ſono di reſiſtente natura le facce ſeparate, mentre qui già oſſervammo eſſere lo ſcudo un condottore. Onde pel raddoppiamento, e l' interpoſizione del mezzo, che oltre alle corriſpondenti differenze di groſſezza, e di figura, e di varia capacità reſiſtente nelle ſue parti, introduce la mobilità ſomma delle medeſime, ne riſultano indi nuove combinazioni di moto fra le oppoſte potenze per far luce, e ſcintille.

9. Dipende il numero di tali ſcintille dal numero de' caſi, che nella ſeparazione introducono qualche eccesſo di forza fra le finitime potenze. La grandezza di ciaſcuna ſcintilla corriſponde alla quantità, e mobilità di quegli eccesſi di forze. Ed è in ſimili eccesſi da notarſi una reciproca proporzione colle reſiſtenze del mezzo frappoſto. Poichè quanto maggiore ſi fa la diſtanza fra le contrarie forze nelle facce del diſco, e dello ſcudo, tanto creſce la grandezza del frappoſto mezzo reſiſtente. Onde da queſta ſteſſa reciprocità naſcono altre varietà nel numero, e nella grandezza delle ſcintille; e in conformità di tali variazioni ſono nuovamente varj i reſidui di elettriche potenze, che ſi trovano nello ſcudo, e nel diſco ſeparati in fine a prima diſtanza.

10. Che ſe queſte colle oſſervazioni ſi confrontino eſpreſſe in fine della precedente Legge (*ivi n.* 6. 7. 8. 9.) comprendiamo univerſalmente il modo d' ogni luce, e ſcintilla, che dalla elettricità dipende. Poichè i condottori, che ad un corpo elettrico ſi preſentano, asſomigliare ſi debbono allo ſcudo or appreſſato, or rimoſſo dalla faccia del diſco; e non altrimenti, che queſto le ſteſſe vicende ſubiſcono di elettricità omologa, e contraria; e ſimilmente ſecondo il diverſo loro ſtato d' iſolamento, diſtanza, e figura contraggono tale moto di contrarie elettricità, quale per l' elettrica luce ſi richiede. Troppo mi dipartirei dallo ſcopo preſente, ſe ciò imprendesſi

a dimoſtrare più eſteſamente, che avrà luogo nell' analiſi del premeſſo eſperimento.

11. Ma per compiere al propoſito noſtro que' rapporti, che nell'eſperimento ſteſſo da principio accennai (*n.* 3.) non rimane che l' ultimo rapporto fra l' elettricità delle oppoſte facce del diſco. Fra le quali s' introduce moto coll' arco, o con altra ſomigliante via, che dall' una all' altra armatura ſi applichi, o ſi frapponga. L'arco però è ſopra ogni altro modo attiſſimo per la ſua figura a dar cominciamento al moto di vicendevole unione, ed a continuarlo con tale rapidità, che ſi manifeſta colla ſcintilla, e collo ſcoppio.

12. Si diſtinguono evidentemente l' uno dall' altro queſti tre rapporti, e partizioni di elettricità non meno nel precedente eſperimento, che in ogni altra maniera di elettrica luce, purchè in debita figura, e diſtanze, e iſolamento ſi preſentino i corpi, e ſi eſplorino le loro vicende con ordine conveniente. Poichè qui per eſempio, ſe cominciate dal terzo rapporto, confondete con queſto inſieme il primo, e non diſtinguete più, ſe non il ſecondo. Se incominciate dal ſecondo, confondete queſto col primo, e indebolite frattanto ad ogni atto vie più anche il terzo. Al contrario riconoſciuta la prima porzione nello ſcudo poſto a ſuo luogo, e ſpenta queſta col contatto, paſſate colla ſeparazione a riconoſcere la ſeconda; indi ripoſto lo ſcudo, e appreſſando allo ſteſſo l' arco procedente dall' oppoſta faccia, riconoſcete la terza porzione, ed in tal atto rinnovate il ſecondo rapporto nelle ſucceſſive ſeparazioni.

13. A rendere in fine ſenſibile con facilità, e coſtanza l' elettrica luce due circoſtanze principalmente concorrono, e ſono 1. certa quantità di elettriche potenze, 2. e certo intervallo fra l' una e l' altra. E' neceſſaria la diſtanza, o la diviſione d' intervallo perchè l' una, e l' altra ſi ponga in libertà di moto, come più ſopra ſpiegai (*n.* 1. 6. 7.); ed è neceſſaria del pari certa quantità, acciò coll' eceſſo ſuo direttamente, o indirettamente quel moto determini, che ivi pure dichiarai (*n.* 8. 9.); ed è pur neceſſaria in fine tale grandezza d' intervalli, e di azioni, che faccia notabile impreſſione ſu i noſtri ſenſi. Poichè le indicate circoſtanze nella facilità, e coſtanza loro a produrre l'elettrica luce ſoggiacciono

a molte vicende non meno per la grandezza, ſigura, e qualità de' corpi, che per le qualità del mezzo reſiſtente, e per lo ſtato dei ſenſi, onde gioverà conſiderarle alquanto più diſtintamente nelle ſeguenti Leggi.

Legge Quinta. Nè in qualſivoglia moto di riunione delle contrarie potenze è viſibile l' elettrica luce, ſe non fra certi intervalli, entro, e oltre de' quali il moto ſteſſo ſi compie ſenza altro ſenſo di luce.

1. Primieramente per le ſuperficie de' condottori, come ſono i tubi, gli archi, e ſimili, ſi riuniſcono le contrarie elettricità ſenza verun ſenſo di luce, benchè tali ſuperficie abbiano innumerabili pori, che altro non ſono, ſe non tenui intervalli, che ne interrompono la continuità. Si caricano per via di tubi, o archi, che ſiano a contatto con le alterne armature, più bocce, o quadri ſucceſſivi, e ſi ſcaricano ſimilmente ſenza luce, ove non s' incontrino le oppoſte elettricità a certe diſtanze fra l' una e l' altra eſtremità, o finitima ſuperficie di que' condottori, e delle armature.

2. E per dimoſtrare, che tanto nelle ſuperficie de' condottori, come nelle armature de' quadri ſi fa tal moto di riunione, il quale non rende ſenſibile impreſſione di luce per la indicata tenuità de' loro pori, o intervalli, abbiamo in pronto alcuni facili artifizj per rendere quegl' intervalli gradatamente capaci di porre in viſta la luce delle contrarie potenze, che ne' medeſimi ſi riuniſcono. Soſtituite al tubo, o all' arco di unita ſuperſicie una catena di ſottil filo metallico, la quale non ſia punto teſa, e faccia perciò intorno al tenue contatto de' ſuoi anelli ogni varietà d' intervalli ſucceſſivamente maggiori; ed oſſerverete tra l' uno e l' altro anello in certa grandezza di quegli intervalli manifeſta luce. Applicate dopo ciò ſucceſſivamente alcuni peſi a quella catena, i quali rendendola grado grado più teſa accreſcano il contatto de' ſuoi anelli, e ſcemino il numero, e la grandezza di que' primi intervalli, e vedrete nella proporzione ſteſſa ſcemarſi, e in ſine ſparire que' punti luminoſi, che tra eſſi brillavano.

3. Se poi vi piaccia più vago, e grande ſpettacolo di lucidi punti, in luogo della foglia di ſtagno, di cui ſi fa l' ordinaria armatura de' quadri, ſoſtituite nella faccia ſuperiore uno ſtrato uniforme, e molto raro di limatura metallica, tal-

chè vi ſormi tra que' briccioli un teſſuto d' intervalli di ogni grandezza; e nell' atto che ſi ſcarica il quadro in moltiſſimi intervalli di tutta quella ſaccia comparirà viva luce di riunione. In una faſcia della faccia ſteſſa accreſcete lo ſtrato di limatura, ſicchè non laſci ſe non pochi, e tenuiſſimi intervalli; e reſterà per la tenuità loro quella ſola faſcia priva di luce. Rarefate in un' altra faſcia aſſai più quella limatura, ſicchè tra que' briccioli non reſtino, che intervalli vie più grandi de' primi; e vedrete in queſta faſcia ſteſſa ſcemare, e mancar in fine ogni luce per ſoverchia grandezza di quegli intervalli.

4. Che ſe in fine l' intera faccia ſi cuopre di tanta limatura, che equivalga nella tenuità de' ſuoi intervalli ad una ordinaria ſuperficie metallica, ſi avrà per eſſa la piena ſcarica con tenuiſſima, o niuna luce. Che ſe all' oppoſto nell' intera faccia ſi renda rariſſima quella limatura, ogni volta che ſi tenta di aver la ſcarica, non ſi avrà ſe non in parte; ma a queſta parte non corriſponderà giammai altrettanta luce per eſſere quegli intervalli di ſoverchio grandi per non renderla abbaſtanza ſenſibile.

5. Nè ci mancano dirette ſperienze per confermare queſt' ultimo aſſunto, cioè, che oltre certa miſura d' intervalli ſi compie ne' medeſimi ſenza notabile ſenſo di luce la riunione delle contrarie potenze. Qualunque volta tentiate di cavar la ſcarica tra le oppoſte facce d' una boccia, o d' un quadro carico, preſentando lentamente l' eſtremità dell' arco a certa diſtanza ſuori dei limiti dello ſcoppio, s' indeboliſce ad ogni atto la forza della carica; nè per tale indebolimento, che pur ſi fa colla riunione d' una parte delle contrarie potenze, appariſce verun indizio di luce, purchè tra l' eſtremità dell' arco e l' armatura reſti certa diſtanza conveniente alla reſidua forza di carica; talchè con ſimili atti con qualche pratica replicati reſterà in fine eſaurita l' intera carica ſenza aver dato ſenſo di luce. Ma in tutte le diſtanze alquanto minori cominciano tra l' arco e l' armatura a comparire ad ogni atto ſoffj, e ſprizzi di luce, i quali poi a diſtanze ancor minori ſcoppiano in fine in piena ſcintilla.

6. Che ſe queſte, e ſomiglianti ſperienze per ſe ſteſſe la neceſſità dimoſtrano di certa grandezza d' intervalli, perchè il moto delle elettriche potenze ſi manifeſti con fenomeni di

luce ; ſe poi ſi compongano colle oſſervazioni premeſſe nella Legge quarta (*ivi n.* 5. 6. 7. 8. 9.) ci ſanno univerſalmente conoſcere con qual legge in que' diverſi intervalli il moto ſteſſo ſi determina fra le oppoſte potenze , che previamente ſi frenano a vicenda con mutua tendenza , e preſſione. Imperciocchè ſiccome la *preſſione* ſuſſiſte , finchè tutti i punti d' una ſpecie ſono più vicini ad altrettanti della ſpecie oppoſta , che non ſono molti inſieme d' una ſpecie ſteſſa vicini fra loro ; così la preſſione ſi cangia in *moto* toſtochè per qualſivoglia cauſa o di mutate diſtanze , o di mutate figure molti inſieme i punti d' una ſpecie ſono più vicini fra loro , che non con altrettanti dell' oppoſta ſpecie : onde ne riſulta l' eccesſo , e preponderanza di ſorze libere da oſtacoli , e per conſeguenza il moto.

7. E fra le indicate differenze richiamiamo qui diſtintamente quella fra i condottori e i reſiſtenti ; per cui in quelli ciaſcun punto , che per mutate diſtanze reſta libero dalla contraria potenza , può per la condottrice ſoſtanza muoverſi in ogni verſo inſieme agli altri punti ſimili , e liberi egualmente ; ne' reſiſtenti al contrario , benchè ciaſcun punto reſti libero dalla contraria potenza , non ha perciò libertà di moto inſieme agli altri per la reſiſtente natura della ſoſtanza , in cui riſiedono , la quale è incapace di condurli , e di raccoglierne inſieme l' azione. Quindi niuno v' è , che non intenda , come ſi abbia più viva e forte luce dai condottori , che dai reſiſtenti non armati ; e come per la ſteſſa ragione in quelli tanto più preſto , che in queſti , ſi eſtingua la facoltà di dar luce , mentre ne' primi in un ſol atto ſi compie ciò che ne' ſecondi non ſi eſauriſce talvolta neppur con ſei , nè con dieci.

8. E per la differenza medeſima tra le particelle di qualſivoglia reſiſtente ſia fluido , o ſolido , e tra le facce di reſiſtenti diverſi a tenuiſſime diſtanze reſtano frenate le contrarie potenze , eſſendo queſte così diviſe , e ſeparate per la natura ſteſſa di quelle ſoſtanze in minimi punti quaſi ſolitarj , e incapaci di coſpirare in un ſol atto , o momento. All' oppoſto i condottori immerſi in quelle fluide particelle , o applicati ſu quelle facce reſiſtenti ne raccolgono intorno a sè le parti diviſe , e ne compongono i momenti di maggior azione. On-

de la preponderanza di momento, e perciò il moto tra quelle contrarie potenze procede d' ordinario, e ſi determina per la via de' condottori.

9. Ma per dedurre con qual legge progrediſcono que' moti, e come ſi compiono or con niuno, or con tenue, or con vivido ſenſo di luce, d' uopo è unire inſieme varie conſiderazioni, 1. tanto della attività, e uſo degli occhi, e dello ſtato di oſcurità previa e preſente in ogni particolare oſſervazione; 2. quanto della quantità ſteſſa di elettricità, che in tal atto ſi pone in moto; 3. e in fine della qualità, e reſiſtenza de' mezzi frappoſti. La prima conſiderazione ſarebbe eſtranea al noſtro propoſito, appartenendo all' Ottica, e alla teoria della viſione, onde baſterà qui averla accennata, nulla potendoſi aggiungere alle cautele già deſcritte da *Newton* per la ſolare, e da *Beccari* per la fosforica luce; e delle due ultime proſeguiamo a dire nella ſeguente Legge.

Legge Seſta. E gl' intervalli di elettrica luce non dipendono infine, che dalla quantità delle contrarie potenze, che per quelli ſi muovono, e dalla qualità delle ſoſtanze, che que' mezzi coſtituiſcono.

1. Dal compleſſo d'ogni genere di ſperienze, che ne' precedenti capi tentate abbiamo per rapporto agli intervalli di elettrica luce, riſulta, che ſeguono eſſi certa diretta proporzione colla quantità delle elettriche potenze, che per que' medeſimi intervalli prendono moto. Poichè ſiccome nelle ſerie di que' capi notai diligentemente le diſtanze corriſpondenti alla grandezza delle cariche impreſſe; così del pari oſſervai, che colla grandezza ſteſſa delle cariche progrediſcono a maggiori intervalli le apparenze di luce, talchè come ne' più grandi intervalli ſi eſtendono con accreſcere la ſomma, e la mobilità delle contrarie potenze, così ne' minimi ſi rende la luce ſteſſa inſenſibile con diminuire la ſomma, e la mobilità delle medeſime.

2. E quanto alla ſomma ſi riconoſce eſſa, e ſi miſura col numero de' giri elevato a certa potenza, e moltiplicato pel valore di ciaſcun giro. E la mobilità non meno dipende dalle ſpecie loro, e dalla qualità, e forma de' corpi, ne' quali eſſe riſiedono, che dalla qualità de' mezzi, pei quali ſi uniſcono. Della ſpecifica loro mobilità, e della forma de' corpi

oltre a ciò, che detto ne abbiamo ne' precedenti capi, diremo più opportunamente nell' articolo ſeguente rintracciando le particolari leggi di que' fenomeni. E circa la qualità dei mezzi ſi diſtinguono queſti comunemente in condottori, e reſiſtenti, e a tenore di ſimile partizione ſi ſtabiliſcono gli ultimi unicamente idonei a proccurar elettrica luce, e inetti que' primi. Simili concluſioni però non ſembrano dedotte che per illuſione di vocaboli, e per mal concepite ſperienze; aſſumendoſi troppo di leggeri, che non naſca elettrica luce, ſe non per denſità di un fluido cagionata dagli oſtacoli, o per attrito dello ſteſſo, o per altro ſomigliante giuoco contro le reſiſtenze.

3. Più ragionevole ſarebbe di ripeter tal luce dalla accenſione cauſata nell' unione delle contrarie potenze, ſecondo che più plauſibilmente a' noſtri tempi ſi ſpiegano ſimili apparenze lucide in ogni altro genere di combuſtione. Che così entrando l' elettrica luce nella propria, e più vera teoria della combuſtione, rimarrebbe ſincera ogni altra eſpreſſione di elettrica teoria, nè ſaremmo forzati di moltiplicare in queſta le contraddizioni, e gli errori cogli avanzi di antiche prevenzioni erronee dell' altra. E per tal modo conſiderando la mutua azione delle elettriche potenze tanto fra di loro, quanto colle parti de' corpi, ne' quali s' incontrano, ſiccome accennato abbiamo a ſuo luogo (*legg.* 2. *n.* 2. *legg.* 3. *n.* 6. 7.) non reſterebbe altra principale differenza tra i condottori e i reſiſtenti, ſe non che in quelli ſi fa la ſemplice, o diretta azione delle elettriche potenze già ſciolte, e diffuſe; in queſti ſi fa doppia per l' indiretto ſmovimento, e ſoluzione di ſimili potenze, che ne' medeſimi s' incontrano. Onde ne' primi non reſiſte, nè ſi oppone alla loro riunione, ſe non la paſſeggera, e parziale combinazione delle ſteſſe colle parti de' condottori; ne' ſecondi al contrario incontrandoſi l' elettriche potenze già ſciolte invece d' impiegare a vicenda le mutue forze ſi trovano forzate ciaſcuna dalla ſua parte a ſmoverne altre, colle quali non ſi riuniſcono ſe non per raddoppiamento di quella prima diretta azione.

4. Ed a queſto raddoppiamento ſi riduce la diſtinzione de' reſiſtenti da' condottori; e naſce indi in que' primi la difficoltà di porgere immediato, e diretto paſſaggio alle contrarie potenze,

nel che conſiſte la reſiſtente natura, e la maggior ſomma, e rapidità di effetto, quando in fine tal paſſo ſi apre con ſimile raddoppiamento di azioni, e la capacità di raccogliere, e dividere nelle facce di lamine reſiſtenti le cariche, ſiccome più diſtintamente vedremo nella Teoria delle elettriche ſcoſſe. Ne' condottori all'oppoſto vi è pure qualche grado di reſiſtenza, ma per diverſa ragione, che non tende, ſe non a ſcemare in parte la mutua diretta azione delle elettriche potenze, nè può mai accreſcerla, o raccoglierla con partirne indirettamente gli effetti.

5. Quindi ſuſſiſterebbe la diſtinzione di gradi varj tanto ne' reſiſtenti, come ne' condottori; ma nella varietà de' loro gradi procederebbero eſſi in ſerie contraria. Talchè la ſteſſa doſe di elettriche potenze darebbe tanto meno luce nel riunirſi fra la ſoſtanza d'un condottore, quanto queſto foſſe condottor più eccellente; e per oppoſto luce tanto maggiore nel riunirſi tra la ſoſtanza d'un reſiſtente, quanto queſto foſſe nel più alto grado di reſiſtente natura. Il che ſi troverà coerentiſſimo alle ſperienze, quando in queſte di propoſito ci occuperemo.

6. Sarebbe poi in manifeſta contraddizione coi fatti più inſigni, e coſtanti, chi non conoſcendo altro, che ſperienze inadequate, e confuſe perſiſteſſe tuttavia nell'errore che le elettriche potenze, quando pel mezzo de' condottori ſi riuniſcono, non facciano in eſſi veruna luce. Riſplende viviſſima l'elettrica ſcintilla attraverſando l'acqua, e il vapore, corpi condottori, come attraverſo dell'olio, e dell'aria, che ſono reſiſtenti. E nel riſplendere trasforma ſimili ſoſtanze in altre ſinora non oſſervate, nè conoſciute. Nel vapore poi, e nell'aria, quando è ridotta a tale rarità, che incapace ſia di frenare una carica naſcente, ſi riuniſcono le oppoſte potenze a grandi intervalli, ed empiono di luce tutta la capacità di grandi tubi, o globi di vetro, nei quali l'aria ſia opportunamente rarefatta per preſtarſi a quel facile raddoppiamento di azione, ed a queſto ſi riducono i fenomeni di elettrica luce da *Canton*, e da *Wilſon* deſcritti, i quali furono poi chiamati *atmosfere*, *o condottori luminoſi*.

7. Ma ritornando ai condottori delle elettriche potenze con grandi ſcariche s'infuocano, e ſi fondono, e ſi diſperdono in

in ſine con viviſſima luce i metallici fili, non altrimenti che i ſottili ſtrati di reſina, o di vetro. Conobbe *Prieſtley* con particolari cimenti, che maggior carica vi vuole ad inſuocare, e fondere quel metallo, che è più condottore, come maggior forza vi vuole per rompere un ſottile ſtrato di vetro, che non un eguale di reſina. Onde accreſcendo con certa legge la ſomma delle ſorze, oſſia la carica reciprocamente colla condottrice ſacoltà de' metalli, e direttamente colla reſiſtente natura delle reſine, e de' vetri, avremo luce in tutti i gradi de' condottori del pari, che in tutti i gradi de' reſiſtenti pel moto delle contrarie potenze; e pel ſolo aumento di queſte ſi ragguaglieranno i ſenomeni di elettrica luce attraverſo quelle differenti ſoſtanze. E ſarà per tal modo la differenza loro ridotta a ſoli gradi, come la proporzione loro non conſiſte, che nel diverſo modo di reſiſtere.

8. Le elettriche potenze adunque e quando ſono tenui, e quando ſono grandiſſime, e quando ſciolte, e accumulate ſi trovano in condottrici ſoſtanze, e quando intralciate reſtano, e diviſe fra i punti, o ſtrati delle ſoſtanze reſiſtenti, non ſanno luce giammai, finchè ſi frenano a vicenda o l' una coll' altra, o colle particelle di altre ſoſtanze. Naſce qui naturalmente la queſtione, *ſe riſplendano eſſe quando ſono ſolitarie, cioè l' una dall' altra diſtinte, e indipendenti?*

Prima di entrare in tale queſtione più, e più altre ſi ſuppongono previamente definite, e ſono:

(*a*) Se ſia la *luce* ſemplice effetto d' una ſola ſoſtanza, ovvero riſulti da mutua, e compoſta azione di più ſoſtanze.

(*b*) Se poſſa l' una, o l' altra *ſpecie* di elettricità ſuſſiſtere, o raccoglierſi diſtinta, e indipendente dall' altra, e quali ſieno i mezzi di ottenere ſiffatta ſeparazione.

(*c*) E quanto ai *mezzi condottori*, ſe non concorrano eſſi che paſſivamente con mera permeabilità meccanica, oſſia col preſtare libero paſſo pei loro pori.

(*d*) Se concorrano in oltre con mutua azione permanente, o momentanea.

(*e*) Se la loro preſenza, o figura, o azione concorra a modificare l' azione delle reſiſtenti particelle, o ſoſtanze frappoſte, o ambienti.

(*f*) E quanto ai *mezzi reſiſtenti*, ſe la loro influenza ſulla elettricità non ſia che di meccanica impermeabilità, oſſia di mero impedimento di trapaſſo.

(*g*) Se in oltre influiſcono con mutua azione.

(*h*) Se queſta ſi faccia colle particelle ſteſſe componenti di quelle reſiſtenti ſoſtanze, ovvero con altre per eſſe ſparſe.

(*i*) E per comporre tutte inſieme le conſiderazioni delle elettricità, e dei mezzi, ſe tal ſorta di azione ſi diſtingua dall' azione mutua colle condottrici ſoſtanze.

(*k*) Quali mutazioni naſcano e nelle condottrici, e nelle reſiſtenti ſoſtanze per ſimili azioni.

(*l*) Se le mutazioni ſteſſe non conſiſtano che in differenze de' gradi.

(*m*) Se queſti gradi ſieno principj di trasformazione, talchè ogni elettrica azione cominci a ſciorre, e ad alterare le ſoſtanze, colle quali ſi eſercita; e perciò tali alterazioni accreſciute in fine riſolvano, e diſtruggano non meno le condottrici, che le reſiſtenti ſoſtanze. Onde non ſia l' eccitamento di elettricità, ſe non l' incominciamento di alterazione, e diſtruzione delle ſoſtanze, che a tal atto concorrono.

(*n*) Se tali riſoluzioni per elettrica virtù naſcano da maggiore, o da minore affinità colle prime parti riſolventi, cioè ſe più facile ſia la riſoluzione, e trasformazione delle reſiſtenti, o delle condottrici ſoſtanze.

(*o*) E per fine ſe, e come ciò concorra ad accreſcere, o a ſcemare, e ſpegnere gli eſteriori ſegni di elettricità.

9. Ad altre Memorie la diſcuſſione appartiene di tante queſtioni; e ſi riducono in eſſe a preciſa eſpreſſione que' comuni termini troppo confuſi *di dare*, *e ricevere*; *condurre*, *e reſiſtere*; *condenſare*, *e rarefare*; *frenare e muovere*; *eccitare*, *e ſpegnere*; *torre*, *e reſtituir l' equilibrio*. Nè previamente poſſiamo dir nulla in propoſito della queſtione da principio accennata. E perciò ritenendo la conſiderazione della elettrica luce, come un fenomeno, concludiamo dal compleſſo de' fatti eſpreſſi nelle precedenti leggi, che non ha eſſa luogo altrimenti, ſe non nell' atto, e pel moto, con cui l' una all' altra ſi riuniſcono le contrarie elettricità. Comunque poi diretto, o indiretto, ſemplice, o duplicato ſia quel moto nella varia natura, e forma de' mezzi, o intervalli frappoſti, non vi è altra differenza per rapporto alla loro quantità, cioè

quando ſono grandi, o raccolte, e quando ſono tenui, o intralciate, ſe non che nel primo caſo molte inſieme delle oppoſte particelle ſi rivolgono, e ſi muovono in fuori, o attraverſo le reſiſtenze, e gli oſtacoli, e perciò fanno vivo ſenſo di ſcintilla; nel ſecondo caſo per oppoſito non ſono capaci che di moto lento, e diviſo, il quale perciò ſi compie ſenza notabile impreſſione di ſcintilla, e di luce.

ARTICOLO II.

Leggi de' particolari fenomeni della elettrica luce.

NEl precedente articolo non incontrai veſtigio di altrui pedate; qui molte ſi preſentano, ma piuttoſto a ſalti, e a paſſi confuſi, che per traccia di previa direzione. Gioverà pertanto andar circoſpetto, e ſenza trattenerci di ſoverchio in qualche ſentieruolo più trito, e ſenza paventar l'acceſſo delle più ardue, ed inoſpite vie.

Legge Prima. Occorrono nella ſteſſa ſpecie di vitrea elettricità apparenze di luce, che ſono varie in grandezza, figura, ſuono, e colore.

1. Oltre alle ſcintille, che ſcoppiano brillanti in pieno e tra gli elèttrici condottori, e tra i limiti delle elettriche ſcariche, ſi manifeſtano nelle tenebre con maggior diſtinzione le differenze di elettrica luce. Benchè tra quelle prime non manchino differenze d' ogni genere, ſiccome ne' precedenti Capi notai, e dovrò più diſtintamente notare nella terza Parte; ciò non oſtante le ultime ſole ſembrano proprie del preſente articolo sì perchè nelle tenebre più compiutamente ſi diſcernono i lucidi fenomeni, sì ancora perchè le ultime, e non le prime d' ordinario s' introducono come prove, e criterj delle oppoſte ſpecie di elettricità, e ſi producono per definirne la diverſa natura.

Cominciando adunque dal condottore di vitrea elettricità è certo, che ſulla metallica punta da eſſo procedente, a cui ſi preſenti a certa diſtanza altra sferica, o piana ſuperficie condottrice, compariſce nelle tenebre un faſcio di lucidi raggi 1. ampiamente divergenti in forma conica coll' apice alla punta metallica, 2. inſtabili con vago ſtridore, o croſcio errante verſo l' eſteriore baſe, 3. di colore non candido, ma di varie tinte fra il giallo, roſſo, e violetto.

Al contrario ſulla metallica punta, che dal ſuolo ſi preſenta allo ſteſſo condottore, ſplende una luce 1. riſtretta di sferoidea figura, 2. coſtante nella ſua forma con un ſibilo, e quaſi ronzio continuo all' apice della punta ſteſſa, 3. di candido, vivo colore.

Quel primo faſcio ſi chiamò *pennello*; queſta ſeconda luce ſi diſſe *ſtelletta*.

2. Sarà quello adunque il criterio di vitrea; e queſta il criterio di reſinoſa elettricità? ed anche ciò ſuppoſto, ſarà il pennello ſufficiente prova di un fluido ſolo, che eſce; e la ſtelletta argomento dello ſteſſo fluido, che entra per quelle punte? Non laſcierebbe di eſſere un gran ſalto dalla prima alla ſeconda concluſione. Ma innanzi di miſurar la conneſſione di queſte illazioni, chiederò in ordine alla prima, ſe per fiſſare un criterio di ſpecie diverſe baſti un fatto iſolato comunque certo, e coſtante? ovvero ſe d' uopo ſia di accertare, ed eſtendere il fatto ſteſſo del pari coſtante in tutte le varietà di modi, e di circoſtanze? Poichè ſe ad un ſolo modo ſi riſtringe, ſarà criterio di quel modo, e non mai della ſpecie, nè degli altri modi. E dovrà perciò rintracciarſi tale criterio della ſpecie, che adequato ſia per iſpiegare non meno quel modo, che gli altri quanti ſono diverſi, e del pari certi, e coſtanti. Altrimenti a quante ſpecie non andiamo incontro, ſe per ciaſcun modo s' induce un criterio di ſpecie diverſa? Rintracciamo dunque le principali differenze de' modi prima d' ingolfarci ne' criterj, e nella ſpecie.

3. A quella punta, che dal condottore procede, altra ne preſento direttamente in diſtanza più di due piedi, e comincia a comparir in quella una ſtelletta; indi un tenue pennello non altrimenti, che quando ſi preſentano alla ſteſſa in minori diſtanze le sferiche, o piane ſuperficie. Ma appreſſando paſſo paſſo la punta preſentata direſte, che la ſtelletta di queſta divora l' oppoſto pennello. Poichè ſi contrae eſſo notabilmente, e preſto ſi riduce a non moſtrar di pennello altro veſtigio, che i colori. E la ſtelletta coll' avvicinarſi ingroſſa,

e toglie infine anche i colori a quell' *avanzo di pennello*, talchè ſi confondono l' una coll' altra le loro apparenze.

Abbiamo dunque ſulla punta procedente da vitreo condottore per lungo tratto un tenue avanzo di pennello, ed in principio, e in fine la ſtelletta in tutto pari all' oppoſta.

4. Tolgo via ogni punta, nè altro pongo in opera, che globi di varie grandezze, e piane ſuperficie. (*a*) Preſento al globo grande terminante il condottore la piana armatura del quadro, come nella preparazione della ſerie 19. nè mai da eſſo, nè dall' oppoſta armatura appariſce pennello. (*b*) Soſtituiſco al più grande gli altri globi ſucceſſivamente minori; e da queſti parte un vero pennello contro l' oppoſta armatura. (*c*) Quanto il globo è minore ſegue a dar pennello, e ad imprimere carica nell' oppoſto quadro in diſtanza maggiore.

Non naſce pertanto il pennello dalle punte ſole, ma anche dai globi terminanti il vitreo condottore. Soltanto dipende da certa grandezza de' globi, e da certe diſtanze dell' oppoſta ſuperficie.

5. Collo ſteſſo apparato ora ſcemo, ora accreſco la doſe, oſſia quantità di eccitamento a ciaſcun giro del diſco. (*a*) Scemando ceſſa in fine il pennello anche ne' globi più piccioli; (*b*) accreſcendo compariſce il pennello ne' globi ſucceſſivamente più grandi; (*c*) e lo ſteſſo ne' più piccoli ſuſſiſte anche rimoſſo il quadro a diſtanze tanto maggiori.

Onde il pennello ne' globi procedenti dal vitreo condottore non ſolo da certe grandezze, e diſtanze dipende, ma in oltre da certa quantità di elettrica potenza.

6. Preſento or al globo grande, or ai fianchi dello ſteſſo condottore un globo groſſo mezzo pollice (*a*) nè mai da quel globo grande, nè dal condottore vedo pennello: (*b*) all' oppoſto ſu queſto globetto preſentato ſplende, e ſtride più dell' ordinario fino alla diſtanza di due pollici un ampio pennello; (*c*) ed ho ſimile pennello con globi preſentati anche groſſi due pollici a diſtanze minori.

Quindi il pennello non è proprio ſoltanto de' globi di vitrea elettricità, ma anche de' globi oppoſti.

7. Sul giogo dello ſteſſo condottore fiſſo un globo groſſo mezzo pollice, e preſentando a queſto verticalmente or l'uno, or l' altro de' globi precedenti, (*a*) non ſolo in que-

ſti, che ſi oppongono, ma inſieme nel primo, che ſul condottore fiſſai, brillano a certe diſtanze ampj, ed oppoſti pennelli,(*b*) nè vi è differenza, ſe non che nel globo di vitrea ſono anzi meno vivaci, e meno ſtridenti, e non ſcompariſcono, che a minori diſtanze.

E ſi raddoppia così in un ſol atto nelle oppoſte ſpecie, ed in ciaſcuna inſieme il pennello.

8. Cangiai l' apparato, e feci terminare il condottore in ſuperficie piana coll' armatura di quarto oppoſta al quadro verticale, come nella preparazione 20, e preſentando globi di varia grandezza al tubo, e all' armatura di quarto (*a*) non mai compariſce pennello nè da queſta al quadro, nè da queſta, o dal condottore verſo i globi preſentati; (*b*) e sbuſſa, e frigge per oppoſto ſtrepitoſamente a diſtanza fino di tre pollici il pennello dai globi ſteſſi, che ſi preſentano.

Ed è così invertita la ſede, e l' eſpreſſione del pennello.

9. Ritorno alle punte non più acute, ma ſmuſſate, e ſcabre. Per raccoglierne in breve i riſultati, vedo ampj pennelli non ſolo in quelle, che dal condottore procedono, ma dalle ſteſſe preſentate a varie diſtanze or al globo, or ai fianchi, or a ſimili punte del condottore. Inſigni oltre modo ſono, e ſtridenti i pennelli ſulla punta di uno, o anche di più diti, che diſgiunti ſi preſentano (*a*) all' armatura di quarto deſcritta nel numero precedente; (*b*) ovvero alla piana ſuperficie del diſco in quella parte, che girando eſce fuori dei cuſcini, quando è aſſai viva l' elettricità.

Non è in ſomma il pennello ſoltanto proprio delle punte di vitrea elettricità, ma anche delle oppoſte.

10. E quanto alla ſtelletta ben lungi di eſſere unicamente addetta alle punte, che al vitreo condottore ſi preſentano, riduco io ai caratteri, ed alle apparenze di ſemplice ſtelletta ogni luce, che dal vitreo condottore procede, purchè opportunamente (*a*) o ſi ſcemi la doſe di elettricità; (*b*) o ſi accreſca il numero, lo ſmuſſamento, e la ſcabrezza delle punte da eſſo procedenti; (*c*) o infine or più, or meno ſi accoſtino i condottori preſentati, e ſi variino così i limiti, e la perfezione del mezzo iſolante.

Nè la ſtelletta è altrimenti propria delle ſole punte, o ſcabrezze preſentate, ma delle punte ancora, e ſcabrezze ſpettanti al condottore di vitrea elettricità.

Legge Seconda. Nella ſteſſa vitrea elettricità ſi tolgono, s' invertono, e ſi raddoppiano le apparenze di pennello col variare 1. la figura, 2. o la grandezza de' condottori, 3. o la quantità di eccitamento, 4. o gli intervalli, e la perſezione del mezzo ambiente.

In ſomma tutto ciò, che ſcema la prevalenza del momento in qualſivoglia preparazione, e ne accreſce il momento nell' oppoſta preparazione, o nel mezzo ambiente, tutto coſpira a trasformare in quella prima la ſtelletta in pennello.

Legge Terza. E con ſomiglianti modi nella ſpecie ſteſſa s' invertono, ſi tolgono, e ſi raddoppiano le apparenze di *ſtelletta*.

1. Queſta, e la precedente legge riſultano ad evidenza dalla dimoſtrazione della prima. Ed in ciò che riguarda la varia proporzione di elettrica potenza per torre, o raddoppiare, o invertere le apparenze di pennello, e di ſtelletta, lo verificai non ſolo nella preparazione 4 e 5, ma ſimilmente in tutte le corriſpondenti.

2. E per rapporto alla perfezione del mezzo ambiente debbono qui richiamarſi le oſſervazioni premeſſe nell' Art. 1. Legg. 6. n. 5. e 7. Poichè ſiccome per la diverſa perfezione dei mezzi variano le generali apparenze di elettrica luce, così riconobbi nelle particolari ſorme della luce ſteſſa le mutazioni corriſpondenti.

3. Onde per trasformare il pennello in ſtelletta non altro ſi richiede, che accreſcere il momento nei reſpettivi condottori, o diminuirlo nel mezzo ambiente.

Legge Quarta. Nè minori ſono le varietà dei modi di togliere, invertere, e raddoppiare le differenze di luce, per le quali ſi vorrebbe diſtinguere la reſinoſa dalla vitrea elettricità.

1. La punta procedente da condottore di reſinoſa elettricità preſenta nel ſuo apice la *ſtelletta*; e per oppoſto la punta al condottore ſteſſo oppoſta eſtende innanzi a sè il *pennello*. E queſte differenze, che ſi oppongono alle prime di vitrea elettricità (*legg.* 1. *n.* 1.) ſono al pari di quelle certe, e coſtanti nel modo loro. Non baſta però un modo ſolo per caratterizzare la ſpecie, maſſime quando in tutti gli altri modi ſi tolgono, s' invertono, e ſi raddoppiano le differenze del primo. Indicano al certo le differenze di ciaſcun modo qualche differenza nella ſpecie, d' onde quel modo procede, e

ben lungi dall' indebolire queſto canone di fiſica inveſtigazione, ammetto anzi, e ſtabiliſco generalmente, che per rintracciare le ſpecifiche differenze delle coſe non ha il Fiſico altre vie ſicure, ſe non per le differenze dei modi loro. Ma dico infine, che per fiſſarne in un ſol modo il criterio della ſpecie ſorza è, che quell' unico modo ſia tanto coſtante, quanto lo è la ſpecie medeſima; e che unico ſuſſiſta in tutte le altre varietà, alle quali la ſpecie ſteſſa ſoggiace. Or come ciò non ebbe punto luogo nella vitrea, vediamo qual coſtanza ſerbi nella reſinoſa.

2. Alla punta, che dal condottore di reſinoſa elettricità procede, oppongo un' altra punta procedente dal quadro, come nella preparazione della ſerie 6. E cominciando dalle più rimote diſtanze (*a*) ſulla punta del quadro, che alla reſinoſa ſi oppone, non vedo il minimo indizio di luce, non che di pennello, finchè non arriva quella punta a diſtanza dell' altra circa d' un piede. (*b*) Quindi comincia ſu quella a comparire una tenue ſtelletta, che va lentamente accreſcendoſi mentre più ſi appreſſa, ſenza però mai prendere il minimo cenno di pennello appreſſandoſi perfino al contatto della prima. (*c*) Al contrario ſulla punta di reſinoſa elettricità brilla, benchè il quadro ſia diſtantiſſimo, una viva ſtelletta con ſibilo già notabile, quando l' oppoſta è ancor più diſtante d' un piede, ed imprime così a queſta diſtanza nell' oppoſto quadro notabile carica. (*d*) Ed appreſſandoſi vie più l' oppoſta punta col rinvigorirſi in queſta la ſtelletta, direſte, che trae fuori dalla reſinoſa un' *orditura di pennello*, che tale ſi manifeſta in fine colla figura, benchè non tanto grande, collo ſtridore, e colla varietà de' colori.

Abbiamo dunque la punta oppoſta alla reſinoſa ſenza veruna apparenza di pennello, e colla ſola ſtelletta dai primi fino ai minimi intervalli; e per oppoſto nella punta reſinoſa coll' appreſſarſi di quella prende vigore l' orditura di pennello.

3. Tralaſcio per brevità altre analoghe combinazioni di punte; e paſſo ai globi di varie grandezze, e alle piane ſuperficie. Oppongo al condottore terminante in groſſo globo il quadro verticale come nella preparazione della ſerie 15. (*a*) Talvolta dal centrale punto oppoſto dell' armatura sbuſſa da principio un pennello verſo il globo; ma il più delle

volte

volte nel ſucceſſivo accoſtamento dal globo ſteſſo ſtride, e ſi eſtende dal globo reſinoſo verſo l' oppoſta armatura un ampio pennello. (*b*) Preſento al globo del tubo un globo groſſo due pollici, e poi altri minori; e da queſti più di raro, e più breve, e ſoltanto a data minor diſtanza ſprizza il pennello; ſprizza all' oppoſto più frequente, e più continuo, e in maggiori diſtanze dal globo grande reſinoſo. (*c*) Adatto ſul giogo del condottore un globetto di mezzo pollice, come nella Legge I. n. 7., e preſentando a queſto altri globi di varia grandezza non mai in queſti, e ſempre in quello a varie diſtanze appariſce il pennello.

Si ha pertanto il pennello non ſolo dalle punte, ma dalle piane ſuperficie, e da' globi oppoſti alla reſinoſa elettricità. E viceverſa da' globi di reſinoſa elettricità parte con più coſtanza, e a maggiori diſtanze il pennello, che non dagli oppoſti. Ma nell' uno e nell' altro caſo dipendono quelle apparenze da certa diſtanza, e grandezza di que' globi, e delle ſuperficie.

4. Collo ſteſſo apparato, e nelle ſteſſe combinazioni ſe rendo or più, or meno vivo l' eccitamento di elettricità in ciaſcun giro del diſco, riconoſco, che non dalle ſole grandezze, e diſtanze di que' globi, ma da certa quantità di elettrica potenza il pennello, e la ſtelletta dipendono.

Talchè tutto ciò, che accreſce momento in una preparazione, coſpira a tener in eſſa la ſtelletta.

5. Faccio terminare il condottore in piana ſuperficie colla armatura di quarto oppoſta al quadro verticale, come nella preparazione della ſerie 16, e dal contorno di quella ſtridono lunghi, e ampj pennelli eſteſi verſo l' oppoſto quadro anche a diſtanza di due pollici; nè mai ſi vede orma di pennello procedente dall' armatura del quadro.

Ed abbiamo così i pennelli procedenti dalle ſole reſinoſe ſuperficie, e non dalle oppoſte.

6. In vece d' intertenermi in altre combinazioni di punte ſmuſſate, e di apparenze or di ſtelletta, or di pennello, che io induco non meno ne' reſinoſi, che negli oppoſti condottori con le cautele, e preparazioni ſomiglianti a quelle, che in fine della Legge I. indicai; raccoglierò alcuni termini più coſtanti delle proporzioni di figura, grandezza, diſtanza, e quantità, che influiſcono in que' modi varj di elettrica

luce. Poichè in tante varietà non altro, che le giuſte proporzioni guidar ci poſſono a ſpecifici criterj, e a diſtinte illazioni. Dirò adunque nelle ſeguenti Leggi ordinatamente della figura, e delle grandezze de' condottori; indi delle diſtanze, e delle quantità delle elettriche potenze confrontando nella identità di ſpecie diverſe preparazioni, e colla identità di preparazione le ſpecie diverſe.

Legge Quinta. Nelle diverſe preparazioni di figure, e di grandezza de' condottori colla ſteſſa ſpecie di elettricità prevale l' azione della punta acuta alla ſmuſſata, e queſta ai globi minori; e in genere prevalgono ordinatamente le minori conveſſe, o piane ſuperficie alle maggiori.

1. Prevale, come in ogni genere di potenze, così nelle elettriche quella, che determina il moto. Ora nella ſteſſa ſpecie la prevalenza di azione non può d'altronde ripeterſi, che per momento acquiſtato dalla ſteſſa potenza. E ſiccome la luce naſce dal moto ſteſſo delle elettriche potenze, non v' ha dubbio, che ove comincia a manifeſtarſi luce, ivi non ſia prevalente il momento dell' elettrica potenza.

2. Si diſtinguano adunque i condottori di vitrea, e di reſinoſa elettricità, e riſpettivamente gli oppoſti a ciaſcuna con ordine di punte acute, e ſmuſſate, e di globi minori, e maggiori; e di piane ſuperficie ſimilmente minori, e maggiori. Comincerà in tutti la luce, e perciò il moto ordinatamente dalla punta acuta prima, che non dalla ſmuſſata, e così in ſeguito prima dalla minore, che non dalla maggiore conveſſa, o piana ſuperficie.

Legge Seſta. Nella indentità di preparazione colle diverſe ſpecie di elettricità prevale alla vitrea l' azione della reſinoſa.

1. Queſta colla precedente Legge ſono corollarj de' Teoremi della prima, e ſeconda Parte; poichè con ſimili proporzioni s' imprimono le cariche a diſtanze tanto maggiori con punte, e coi condottori terminanti in minore conveſſa, o piana ſuperficie; e ſimilmente più colla reſinoſa, che colla vitrea elettricità ſi eſtendono le cariche impreſſe.

2. Si provano in oltre direttamente coi fenomeni di luce. E in ordine alla quinta Legge tanto il pennello, come la ſtelletta compariſcono a diſtanze tanto maggiori dalle pun-

te acute, che non dalle ſmuſſate, e da queſte che non dalle conveſſe, o piane ſuperficie; e ciò non meno ne' condottori di reſinoſa, o di vitrea elettricità, che nei condottori a queſte riſpettivamente oppoſti.

3. E quanto alla ſeſta non meno dalle punte, o ſuperficie reſinoſe, che dalle oppoſte alla vitrea ſi hanno i ſegni di luce a diſtanze aſſai maggiori, che non da ſimili punte, o ſuperficie vitree, o riſpettivamente oppoſte alla reſinoſa.

Legge ſettima. E nella identità di preparazione, e di ſpecie prevalgono gli ecceſſi di eccitamento, o di maſſe ſopra le ſpecifiche forze della reſinoſa, o della vitrea elettricità.

1. Con minore eccitamento ſi hanno ſegni di luce nella reſinoſa elettricità, e nei condottori oppoſti alla vitrea, che non colle ſteſſe preparazioni, ed eguale eccitamento nella vitrea, e ne' condottori oppoſti alla reſinoſa.

2. Per ottenere ſegni di luce a pari diſtanze dai condottori di vitrea, o dagli oppoſti alla reſinoſa elettricità d' uopo è di accreſcere in proporzione l' eccitamento, oſſia la maſſa, che a ciaſcun giro corriſponde nella riſpettiva ſpecie.

3. Ed appunto perchè più pronti, e vivi compariſcono i ſegni di luce colla reſinoſa, che non colla vitrea elettricità, quella più prontamente di queſta s' indeboliſce, e ſi diſperde; non altro eſſendo que' ſegni, ſe non l' atto ſteſſo della ſua diſperſione, oſſia il moto di riunione coll' oppoſta.

4. L' eccitamento maggiore, o ecceſſo di maſſe neceſſario per rendere a pari diſtanze viſibile la luce con vitrea elettricità, che non colla reſinoſa, compenſa la minore forza ſpecifica della vitrea; e l' aumento neceſſario nella reſinoſa per rendere a pari diſtanze viſibile la luce nell' oppoſto condottore compenſa la minore mobilità dell' oppoſta, che da quello procede.

5. E nell' uno e nell' altro caſo ſi eſige quel maggiore eccitamento per ridurre a riunirſi intorno a que' condottori tanta doſe di elettricità o dall' ambiente, o dall' oppoſto mezzo, quanta è neceſſaria per far ſenſo di luce più o meno vivo, ed eſteſo.

Legge ottava. E confrontando le ſpecie fra loro nelle diverſe preparazioni 1. la punta acuta vitrea corriſponde alla reſinoſa ſmuſſata; 2. la punta ſmuſſata vitrea ad un piccolo globo reſinoſo; 3. e il piccolo globo vitreo alle maggiori conveſſe, o piane ſuperficie; e così ordinatamente.

1. Quegli eceſſi di eccitamento per rendere in diſtanze pari alla reſinoſa viſibili i ſegni di luce, che nella precedente Legge oſſervai neceſſarj e nella vitrea elettricità in sè ſteſſa, e nella reſinoſa per rapporto agli oppoſti condottori, che non nella vitrea per rapporto ai ſuoi condottori oppoſti, dimoſtrano direttamente nella identità di preparazione e la maggiore efficacia della reſinoſa, e la maggiore mobilità della oppoſta alla vitrea. Nella preſente Legge ſi confermano le ſteſſe verità in tutte le diverſe preparazioni dell' una e dell' altra ſpecie, e nei condottori, che a ciaſcuna riſpettivamente ſi oppongono; poichè ſi riduce queſta in ciaſcuna parte ad evidenza di fatto.

2. E quanto alle ſemplici apparenze di luce ciò è manifeſto in due modi. In primo luogo la punta acuta reſinoſa, e l' oppoſta alla vitrea come riſplendono a maggiori diſtanze, che non la vitrea, o l' oppoſta alla reſinoſa, così certo ſmuſſamento di quelle prime rende in eſſe il cominciamento di luce a diſtanze eguali delle ſeconde acute. Queſte adunque hanno biſogno del momento, o prevalenza di punta acuta per corriſpondere alle reſinoſe ſmuſſate (*legg.* 5.).

3. In ſecondo luogo nei globi, e nelle ſuperficie vitree non ſplende mai luce ſe non a diſtanze minori (*legg.* 1. *n.* 4. 6. 7. 8.), che non da ſimili globi, o ſuperficie reſinoſe (*legg.* 4. *n.* 3. 4.); e per oppoſto i globi, e le ſuperficie maggiori reſinoſe hanno luce, quando ancor non ne hanno i globi, e le vitree ſuperficie aſſai minori (*ivi*). Lo ſteſſo accade ne' globi, e nelle ſuperficie riſpettivamente oppoſte. Onde vi vuole nella vitrea, e nell' oppoſta alla reſinoſa il momento, o la prevalenza di minore conveſſa, o piana ſuperficie (*legg.* 5.) per ragguagliarne gli effetti.

4. E quanto alle differenze di lucide forme dalle precedenti citazioni è del pari manifeſto l' indicato ragguaglio di punte acute colle ſmuſſate, e delle minori colle maggiori ſuperficie per ottenere eguali forme di luce. Così per trasformare il pennello della punta vitrea al fine in vera ſtelletta, baſta diminuire il momento del mezzo appreſſando in vece di conveſſa, o piana ſuperficie (*legg.* 1. *n.* 1.) una punta acuta (*ivi n.* 3.).

5. All'oppoſto per avere pennello ſu i reſinoſi condottori d' uopo è accreſcere la reſiſtenza del mezzo con dilatare i termini , e le eſtremità de' condottori ſteſſi , e ſcemare per tal modo inſieme il momento e la prevalenza di punte acute, o di minori ſuperficie (*legg.* 4. *n.* 3. 5.). Nè ſulla punta acuta reſinoſa altro ſi vede mai, che una tenue orditura di pennello (*legg.* 4. *n.* 2.) perchè in qualſivoglia confronto di punte acute vitree, e in qualſivoglia diminuzione del mezzo reſiſtente prevale ſempre la ſpecifica forza della reſinoſa.

Legge nona . Nella comparazione delle ſpecie fra di loro non ſi deve indiſtintamente confrontare la reſinoſa colla oppoſta alla vitrea , nè colla vitrea confondere l' oppoſta alla reſinoſa; ma e ciaſcuna ſpecie coll'altra direttamente , e le oppoſte a ciaſcuna riſpettivamente fra loro debbono paragonarſi nelle particolari preparazioni.

1. Benchè in realtà la ſpecie oppoſta alla vitrea ſia reſinoſa, e l' oppoſta a queſta ſia vitrea; ciò non oſtante, quando ſi tratta di proporzioni, non poſſono alla rinfuſa compararſi, mentre non è la ſpecie, ma la quantità, e il momento di ciaſcun termine col ſuo omologo, e oppoſto, che cade in confronto. Ora è manifeſto per la Legge prima, e quarta , che di gran lunga prevalgono i termini di vitrea , e di reſinoſa ai termini, che a ciaſcuna ſi oppongono in qualſivoglia preparazione . Ed è ciò coerente alla natura ſteſſa delle coſe; poichè que' primi riguardano le potenze già ſciolte, eccitate, e raccolte; e gli ultimi non riguardano ſe non le potenze ſteſſe appena ſmoſſe , e nell' iniziale loro eccitamento, e capacità di raccoglierſi. In ſomma nei primi termini ſi confronta l' efficacia, e la forza di ciaſcuna ſpecie, e nei ſecondi la loro mobilità.

2. Somma è l' importanza di queſta Legge non ſolo per ovviare le vane contraddizioni, e i paradoſſi, che naſcer potrebbero dal confuſo paragone di que' termini, ma perchè ci ſomminiſtra vera, e piana ſpiegazione delle contrarietà oſſervate fra i corollarj del Capo primo, e del diverſo andamento di decadenza fra i primi e gli ultimi termini delle cariche impreſſe, che furono calcolate nel Teor. XIV. al n. 7., e nel Teor. XIX. al n. 4., ſiccome altrove dimoſtrerò, maſſimamente ſe con queſta ſi aggiungano le conſiderazioni della ſeguente Legge.

Legge decima. E in queſte combinazioni d' identità, o diverſità di ſpecie, di oppoſte a ciaſcuna, di preparazione, o eccitamento influiſcono le differenze de' mezzi condottori, o reſiſtenti con tali proporzioni d' intervalli, i quali come per i condottori più perfetti ſi eſtendono ai limiti indefiniti, così cominciano a riſtringerſi in certi limiti ne' condottori meno perfetti, e ſi fanno que' limiti ſempre minori, quanto gradatamente i mezzi frappoſti ſi ſcoſtano dalla perfezione di condottori, e paſſano per ſucceſſivi gradi a maggior perfezione di reſiſtenti.

1. Se le elettriche potenze eccitare, e raccogliere ſi poteſſero indipendenti dalle modificazioni del mezzo, ſi ridurrebbero non meno i fenomeni di luce, che gli altri ſegni loro, a ragioni coſtanti de' ſemplici elementi di ſpecie, di oppoſizione, di quantità, e di preparazione. Ma tanta è nelle coſe elettriche l' influenza del mezzo, che lungi dal poterſene preſcindere giammai, ſembra piuttoſto che ogni elettrica ricerca debba in fine riſolverſi in più intime conſiderazioni del mezzo ſteſſo, e delle ſue modificazioni. Naſcono d' ordinario le falſe induzioni per *errore di relazione*, quando da fenomeni, e fatti veriſſimi ſi conclude il falſo, perchè ſi riferiſcono a ſoggetti, o cauſe non vere, o almeno non adequate, nè ſolitarie. Ora non vi è in Fiſica altro capo, quanto l' elettrica materia, in cui ſi cada più comunemente in ſimili errori; perchè appunto ſi vuol preſumere ſemplice ciò, che è compoſto, e ſi vuole introdurre qual mero oſtacolo, o reſiſtenza il mezzo, che in mille forme regge le elettriche potenze, e l' azione ſua con eſſe compone.

2. Siccome però del mezzo già molte coſe notai e ne' Capi precedenti, e nell' articolo primo di queſto Capo, perciò baſterà qui richiamarne ſoltanto la memoria. Agiſce dunque il mezzo come veicolo ne' condottori, e come oſtacolo nei reſiſtenti, e ſegue nell' azion ſua una inverſa ragione della perfezione de' primi, e diretta de' ſecondi (*art.* 1. *legg.* 6. *n.* 5. *e* 7.).

3. Ma queſte azioni, e queſte ragioni di condottrice, e reſiſtente natura non ſi preſentano mai nè ſemplici, nè ſolitarie; ma ſi compongono cogli elementi delle elettriche potenze, che diſtinti abbiamo nella prima Parte. E viceverſa

queſti ſteſſi elementi non debbono preciſamente riſtringerſi a certe elettriche potenze eccitate, o moſſe quaſichè eſſe per sè ſole compieſſero la loro azione; ma d' uopo è riflettere, che non ſi compie l' azione di quelle ſe non componendoſi con ſimili elementi di nuove porzioni, e potenze elettriche eccitate, e moſſe nel mezzo ſteſſo reſiſtente. Talchè qualſivoglia elettrico fenomeno benchè ſembri più ſemplice, e piano non ſegue mai la ſola ragione o dei condottori, o dei reſiſtenti, o d' una ſpecie, o quantità di elettrica potenza eccitata; ma riſulta dal compleſſo di tutte le ragioni di condottori, e reſiſtenti, e di contrarie, ed omologhe ſpecie, e quantità eccitate intorno a quella prima.

4. L' arte di riconoſcere ciaſcuna di quelle ſemplici ragioni conſiſte in renderne l' azione, quanto più ſi può, prevalente ſopra gli altri elementi, ſicchè per l' eceſſo ſuo ſi conoſca, giacchè non può ſola aſſolutamente conoſcerſi.

5. E nel caſo noſtro le acute punte condottrici ſono la più prevalente via di porre in moto le elettriche potenze, e di render minima l' influenza dei mezzi reſiſtenti ſopra di loro, e perciò con ſimili punte ſi ha luce alle maggiori diſtanze.

6. All' oppoſto le ampie ſuperficie condottrici preſentano maggior influenza al frappoſto mezzo reſiſtente non ſolo di ſemplice oſtacolo, ma di nuove ſoluzioni; le quali ſi frenano a vicenda, finchè la prevalente azione dell' una o dell' altra ſuperſicie non ne determini il moto (*artic.* 1. *legg.* 4. *n.* 4., *e ſeguenti*).

7. Ed è appunto queſta l' influenza de' mezzi, per cui i limiti del moto divengono tanto minori, e all' oppoſto tanto maggiori divengono le quantità di contrarie potenze a vicenda frenate, quanto ſono più ampie, ed eguali fra loro le oppoſte ſuperficie condottrici, e quanto è più perfetto il frappoſto mezzo reſiſtente.

Legge undecima. E le apparenze di pennello, e di ſtelletta 1. non naſcono da veruna ſpecie particolarmente più che dall' altra, 2. ma provengono da certa ſomma di azione, o da certo momento di ciaſcuna contro le frappoſte, ed oppoſte reſiſtenze.

1. La prima parte di queſta è immediata conſeguenza delle precedenti Leggi, e principalmente della prima, quarta,

ſettima, e ottava. Onde non reſta che di ſoggiungere qualche dichiarazione della ſeconda parte. Per intendere che coſa ſia *certa ſomma di azione*, *o certo momento*, da cui il pennello, o la ſtelletta proviene, d'uopo è formarſi chiara idea dell'uno e dell'altra. La ſtelletta ſibila ſtabilmente ſull'apice della punta, in cui ſplende; il pennello ſtride inſtabilmente verſo la ſua baſe, cioè in parte oppoſta, e in fuori della punta, o dalla ſuperficie, da cui procede (*legg.* 1. *n.* 1.). Ora e il ſibilo, e lo ſtridore non ſono altro, che vibrazioni impreſſe nell'aria ambiente in ciaſcun punto, ove la riunione, e lo ſcoppio ſuccede delle contrarie elettricità; nè quel ſibilo, e ſtridore è differente dallo ſcoppio ſtrepitoſo delle grandi ſcariche, ſe non in proporzione di quantità. Nella ſtelletta adunque ſi riuniſcono le contrarie potenze ſtabilmente, e continuamente ſull' apice della punta; e nel pennello non ſi riuniſcono, che vagamente in varj punti più eſterni, e nella baſe del medeſimo.

2. Il moto poi fra le contrarie potenze comincia, e ſi mantiene dalla parte prevalente (*art.* 1. *legg.* 5. *n.* 6.). E l' ordine, e la progreſſione delle parti prevalenti già è fiſſato nelle precedenti Leggi quinta, ſeſta, ſettima, e ottava. Quindi quella certa *ſomma di azione*, *o momento* non altro ſignifica, ſe non il numero de' punti, e la diſtanza de' medeſimi dalla eſtremità degli oppoſti condottori, fra i quali a preferenza ſi determina, e ſi compie l' incontro, e la riunione delle contrarie potenze.

3. E perciò non è la ſtelletta ſe non l' effetto di quell' incontro, che ſi mantiene raccolto, e riſtretto per prevalente coſtanza di azione ſull' apice delle punte, e degli ſpigoli de' condottori; e non è il pennello ſe non l' effetto del moto ſteſſo, che comincia, e progrediſce incoſtantemente diviſo, e ſparſo in più punti, e in varie diſtanze dalla eſtremità de' condottori, fra i quali di continuo ſi mutano i limiti di azione prevalente. Il numero de' punti ne dilata la figura; la continua varietà delle diſtanze rende que' punti per la loro celerità ſimili a ſtriſcie, o raggi lucidi. E perciò non è il pennello, che una partizione di ſtelletta in continuo moto.

4. E quanto alle reſiſtenze, nell' aria più rara ſi fa tanto

to minore il ſibilo, e lo ſtridore di que' ſegni; e per oppoſto ſi fa ne' medeſimi tanto più eſteſa, e diviſa la luce.

Legge duodecima. Nè in tutte queſte differenze ha veruna influenza la ſuppoſta contrarietà nella ſemplice direzione di un fluido ſolo.

1. In vano tentarono abiliſſimi Fiſici di ſcorgere la direzione dell' elettrica luce. Per quanto ſia facile di travedere, quando s' immagina prima di oſſervare, tanta però è l' evidenza del fatto, che niuno portò l' illuſione fino a tal ſegno di aſſerire definita, e viſibile la direzione coſtantemente più da una, che dall' altra parte. I lucidi pennelli, e i condottori luminoſi furono ſoltanto poſti in opera per dimoſtrarne la preſenza dalla parte di vitrea elettricità; ma in mezzo alle prevenzioni, e alle induzioni incautiſſime non ſi produſſero mai come viſibili prove di luce procedente da quella ſteſſa parte.

2. Ora non rimane più verun dubbio dopo le induzioni diſtinte, che compiute abbiamo nella Legge prima, e quarta, che le ſteſſe apparenze non ſi preſentino del pari dalla parte di elettricità reſinoſa; mentre tutto quel giuoco non dipende, ſe non dalla varia combinazione di preparazioni per ragguagliare i momenti di quelle potenze (*legg.* 8.). Onde nulla in quelle differenze influiſce nè la ſemplice direzione invano ricercata, nè la contraria apparenza fallacemente prodotta di un ſuppoſto fluido ſolo.

Legge decimaterza. Nella varietà, e incoſtanza della ſua direzione ha l' elettrica luce coſtantiſſima legge di cominciare dalla parte prevalente.

1. Comincia, come vedemmo nella ſeconda parte della Legge decimaprima, l' elettrica luce dalla parte prevalente. E perciò ſe queſta prevalenza ſia ſtabile ſull' una, o ſull' altra metallica punta, o ſopra ambedue inſieme, ſu quelle compariſce in forma di viva ſtelletta; ed ivi ſi mantiene immobile, finchè non naſce progreſſione di quel moto dall' una, o dall' altra parte. Che ſe tale prevalenza ſi eſtende tra i limiti delle metalliche punte, o ſuperficie, ivi ſimilmente comincia l' elettrica luce; ma per la mobilità del mezzo, e per la varietà, che in que' limiti prevalenti naſce coll' atto ſteſſo, che comincia la luce, mutano eſſi di continuo ſede, e

alternano con incredibile celerità le diſtanze in punti ſempre varj or più, or meno diſcoſti dalle metalliche punte, o ſuperficie, e formano colla loro rapidità, e moltiplicità quella ſimultanea impreſſione di luce degradata in tanti colori, ed incoſtante nella ſua grandezza, come è il pennello.

2. Conſiſte adunque il pennello nella continua mutazione dei limiti di prevalenza fuori delle metalliche punte, o ſuperficie. E perciò finchè que' limiti cadono entro le metalliche punte, o ſuperficie, non può ſe non mantenerſi immobile ſulle loro eſtremità quella impreſſione di luce, che alla quantità corriſponde delle elettriche potenze in moto di riunione.

3. Ma que' limiti prevalenti vogliono conſiderarſi in due modi, ſiccome diſtinti abbiamo due modi nella mutua azione, e nel moto delle elettriche potenze. Primieramente vi è un limite tra la ſpecie, che in ciaſcuna punta, o ſuperficie riſiede, e le finitime potenze del mezzo ambiente; e quindi ne riſulta quel moto di contrarie elettricità, che ſpiegammo nell' articolo 1. Legge ſeconda n. 2. lett. *e*, ed ivi Legge terza, e ſeſta. In ſecondo luogo poi vi è un limite tra le due ſpecie ſteſſe, che nelle oppoſte punte, o ſuperficie riſiedono, le quali per la via ſteſſa del mezzo, e delle frappoſte elettricità a vicenda tendono a riunirſi; e nuovamente in queſte cade altra diſtinzione, per la quale ora in parte, ora pienamente ſi determinano al moto di riunione, ſecondo che nell' articolo ſteſſo dichiarammo nella Legge quarta.

4. Ora tanto il primo di queſti modi, come la prima parte del ſecondo non determinano mai la piena unione di quelle contrarie potenze, nè l' intero ſcoppio fra i limiti delle oppoſte punte, o ſuperficie, nelle quali eſſe riſiedono, ma non producono ſe non ſoffj, o ſprizzi luminoſi in proporzione o delle parti ſmoſſe nel frappoſto mezzo per azione delle oppoſte, o delle parti di queſte, che cominciano a riunirſi. Del pieno ſcoppio, e de' ſuoi limiti fra quelle oppoſte potenze diremo più opportunamente nella terza Parte; e qui proſeguiremo a conſiderare que' modi, che finiſcono in ſoffj, o ſprizzi luminoſi, e in varie forme di ſtelletta, e di pennello ſi manifeſtano.

5. Sarà pertanto il ſoffio uniforme come ſibilo, o ronzio,

e ſarà la luce ſtabile ſull' eſtremità delle punte, o degli ſpigoli de' condottori, ſinchè entro queſti ſi conſervano i limiti prevalenti, che quel ſoffio, e quella luce producono. E ſarà per oppoſto in continuo moto a foggia di ſtridore, e di luce incoſtante, quando que' limiti per eſſere eſternati in fuori de' condottori ſoggiacciono a continue mutazioni, ſiccome da principio notato abbiamo (*n.* 1, *e* 2).

6. Rimane in oltre da inveſtigare in quale delle due parti a preferenza ſi eſternino fuori de' condottori que' limiti prevalenti, dai quali prende cominciamento l' elettrica luce. Poichè ſe per eſſere que' limiti entro i condottori ſi mantiene alla loro eſtremità la ſtelletta, così non comincerà queſta a trasformarſi in apparenza di pennello ſe non da quella parte, nella quale que' limiti s' inoltrano più prontamente nel frappoſto mezzo fuori de' condottori.

Legge decimaquarta. I limiti prevalenti, che il moto determinano della elettrica luce, cominciano prima, e ſi mantengono più coſtanti entro le punte, o ſuperficie de' condottori di reſinoſa; cominciano all' oppoſto più tardi, e più prontamente finiſcono con eſternarſi in fuori a preferenza dalle punte, o ſuperficie de' condottori di vitrea elettricità.

1. Riſulta queſta dai fenomeni deſcritti nelle precedenti Leggi ſeſta, ſettima, e ottava. Poichè in parità di preparazioni la punta, o ſuperficie reſinoſa è ſempre la prima a ſplendere con luce di ſtelletta, ed è poi l' ultima a prender forma, o cominciamento di pennello; e viceverſa la punta, o ſuperficie vitrea comincia più tardi a dar luce di ſtelletta, ma più prontamente paſſa alle forme di lucidi pennelli. Lo ſteſſo con proporzione ſi verifica nelle punte, o ſuperficie oppoſte alla vitrea, e reſinoſa elettricità, che a quelle ſono corriſpondenti.

2. E rapportando queſti fenomeni ai diverſi modi, che diſtinti abbiamo nella precedente Legge (*n.* 3. *e* 4.) debbono que' prevalenti limiti conſiderarſi non meno fra le riſpettive potenze di ciaſcun condottore, e del mezzo ambiente, che fra le porzioni ſpettanti agli oppoſti condottori. Talchè non ſi eſterna giammai in fuori di uno di que' condottori l' apparenza di pennello, ſe non per diminuito momento nella preparazione, che al condottore ſteſſo appartiene, e per ac-

creſciuto momento o nel mezzo ambiente, o nell' oppoſto condottore (*legg.* 5. *e* 7.).

3. E quando quell' oppoſto momento creſce a tal ſegno da comporſi colle frappoſte potenze, e introdurre pel mezzo ſteſſo un libero, e continuo moto fra quelle degli oppoſti condottori, allora ſi ha ſcintilla piena fra loro e lo ſcoppio corriſpondente alle ſomme delle intere potenze, che in que' condottori, e nel frappoſto mezzo riſiedono. Che ſe per qualunque freno, o reſiſtenza ſia quel momento riſtretto o fra i limiti della riſpettiva faccia del mezzo frappoſto, o ſoltanto in parte determini i moti dell'oppoſta, non ſi ha mai piena ſcintilla, nè intero lo ſcoppio, ma brillano nei termini dell' uno e dell' altro condottore quelle lucide forme, che fin qui abbiamo diſtinte.

4. Onde ſi può in fine dedurre la progreſſione de' momenti, che atti ſono a cominciare, e ſoſtenere ne' loro termini l' elettrica ſtelletta; ed eſtenderla poi, e dividerla in forma di pennello oltre i loro termini nel mezzo frappoſto, finchè arrivino ai limiti dell' intero ſcoppio, ed accreſciute per oppoſto le diſtanze, o le eſteſe ſuperficie ſi rende quella luce tenuiſſima e inſenſibile alla viſta; nè altrimenti è notabile, ſe non direttamente al tatto pel ſenſo di *aura*, o *venticello*, e indirettamente alla viſta *pel moto di leggeri corpicelli* nel mezzo ſteſſo immerſi, come eſponiamo nella ſeguente, ed ultima Legge.

Legge decimaquinta. Naſce la ſtelletta ne' termini de' condottori per momento prevalente di moto colla contraria elettricità del mezzo ambiente; e in que' termini ſi mantiene, finchè entro que' condottori s' inchiudono i limiti di quella prevalente azione. Scema queſta gradatamente nelle maggiori diſtanze, e ceſſa in fine di far luce. Ma nelle diſtanze minori ſi eſterna in varj punti del mezzo frappoſto, e ſi eſtende, e divide per eſſo in apparenza di pennello, finchè non arriva ai limiti d' intero ſcoppio colla piena unione delle oppoſte potenze.

1. Tutto ciò che creſce i momenti di azione d' un condottore, come ſono le punte, o gli ſpigoli, la ſpecifica forza, o il maggiore eccitamento, o il diminuito momento nel mezzo ambiente tutto coſpira a far comparire, e ſoſtenere ne'

termini di eſſo la ſtelletta (*legg.* 3. *legg.* 4. *n.* 4. *legg.* 8. *n.* 4.) . All' oppoſto tutto ciò , che ſcema il momento di qualſivoglia preparazione , e lo accreſce nell' oppoſta , o nel mezzo ambiente, tutto coſpira a trasformare la ſtelletta in pennello (*legg.* 1. *n.* 3. *e* 9. *legg.* 2. *legg.* 4. *n.* 5. *legg.* 8. *n.* 5.).

2. Che la ſtelletta ſia effetto di prevalente , e coſtante momento, lo manifeſta la vivacità , e l' integrità della ſua luce non mai diviſa in varietà di colori, come lo è il pennello; in oltre il ſibilo, o ronzio continuo ſull' apice della punta è ſempre più notabile, che non nella corriſpondente baſe del pennello ; di più la maggior forza di carica , che nell' oppoſto quadro s' imprime colle apparenze di ſtelletta , che non di pennello; e viceverſa s' indeboliſce aſſai più, qualunque eccitamento, o ammaſſo di elettricità quando la ſtelletta , che quando il pennello da eſſa procede . E in fine per eſſere la ſtelletta ſempre il primo, e l' ultimo termine d' ogni elettrica luce, mentre non è il pennello, che un modo inſtabile , e d' una intermedia combinazione , ed eſpanſione della ſteſſa .

3. In due modi poi quel prevalente momento di azione va degradandoſi nelle ſucceſſive maggiori , o minori diſtanze degli oppoſti condottori . E quanto al primo nelle diſtanze ſucceſſivamente maggiori di condottori oppoſti ſi rende a grado a grado più tenue la mutua loro azione , e diventa in fine incapace di ſmovere nel frappoſto mezzo tanta elettricità da far ſenſo di luce . Ed anche nelle minori diſtanze , ſe molto ſi eſtenda la ſuperficie degli oppoſti condottori, e creſca la perfezione del mezzo frappoſto, ſi frenano le elettriche potenze in proporzione che ſi ſmuovono; nè perciò ſono capaci di fare attraverſo lo ſteſſo tanto moto per dare impreſſione di luce (*legg.* 7. *n.* 6. *e* 7.).

4. Queſte potenze però o ſmoſſe in tenue quantità, o frenate nell' ampiezza delle condottrici ſuperficie ſecondo la perfezione del frappoſto mezzo , benchè non ſi manifeſtino con lucidi ſegni , producono altri effetti di moto inteſtino fra le parti del mezzo ; i quali effetti ſecondo la ſolida, o fluida , opaca , o traſparente natura dello ſteſſo , ſi rendono or più, or meno ſenſibili *con adeſioni*, *con mutazioni di figura*, *con moti*, *e con venticello* , come a ſuo luogo diremo .

5. Reſta che qui diciamo del ſecondo modo, e degradamento, con cui quel prevalente momento ſi eſterna in fuori de' condottori nel mezzo ambiente. Qualunque volta ſi paragonano due forze in mutua oppoſta azione ſi trova fra di loro un punto, in cui i loro momenti ſi equilibrano, fuori del quale l' una o l' altra neceſſariamente prevale. Ora ſe quel punto, in cui ſarebbero equilibrio, ſi trovi entro i termini di un condottore, anche i punti, che fuori di quel punto comincino a coſtituire i momenti prevalenti dall' una e dall' altra parte, proſeguiranno per maggiori diſtanze a trovarſi entro que' termini, e ſaranno così entro del condottore iſteſſo i limiti di prevalente azione. In parità di preparazioni ſi conſerva più coſtantemente il prevalente momento entro i termini dei condottori di reſinoſa, che non di vitrea elettricità (*legg.* 14.). Onde per ragguagliare que' termini d' uopo è reciprocare gli eceſſi de' momenti nelle riſpettive preparazioni. E perciò qualora nel ſucceſſivo accoſtamento degli oppoſti condottori nelle ſteſſe, o diverſe preparazioni s' inducono i limiti di prevalente momento fuori de' termini dell' uno, o dell' altro, o di ambedue i condottori nel mezzo frappoſto, ſi trasforma così ne' modi, che già diviſati abbiamo nell' uno, o nell' altro, o in ambedue inſieme la ſtelletta in apparenza di pennello; e ſi mantiene queſto, finchè tutti inſieme que' momenti non coſpirano a compiere l' unione delle oppoſte potenze nei limiti della piena ſcintilla, o dello ſcoppio fulminante, del quale propoſto abbiamo di trattare nella terza Parte.

ARTICOLO III.

Applicazione delle generali e particolari Leggi precedenti alla elettrica Teoria.

RIducendo a generali, e particolari Leggi diſtinte la varietà delle apparenze di elettrica luce non altro io feci ne' precedenti articoli, che una continua, e fedele applicazione ai fenomeni ſteſſi di que' principj, ed elementi d' ogni elettrica azione, che previamente ſtabiliti furono ne' Teoremi della prima, e ſeconda Parte della preſente Analiſi. Avrei in tal modo per rapporto all' elettrica luce cominciata quella dimoſtrazione degli ultimi teoremi, che rimandai alle ſingolari induzioni, e alle ragioni proprie d'ogni capo d'elettrica dottrina, ſe in molti de' più recenti Scrittori delle coſe elettriche non dominaſſero ſulla ſignificazione di que' lucidi ſegni quelle ſiniſtre interpretazioni, e prevenzioni fallaci, che accennate abbiamo, e delle quali ragion vuole che diciamo alquanto più diſtintamente. Così d'ordinario accade nelle vie della verità, che ſi rendano piane, e ſicure non meno con fiſſarne la direzione, e ſtabilirne i fondamenti, che con troncare i bivj, e ſpianare gl'inciampi, che per eſſe s'incontrano.

Gioverà pertanto riandare fedelmente con brevità per la ſtoria di que' lucidi ſegni, quali a mano a mano ſi preſentarono all'ingenua oſſervazione de' più gravi, e ſagaci Maeſtri. Conobbe quelle differenze di luce *Boſe*, e le diſtinſe coi nomi di luce maſchia, e luce femmina, per illuſione di aver creduta più debole queſta, che anzi più potentemente ſi diſperde, e perciò laſcia minor reſiduo; e più forte l' altra, appunto perchè meno ſi diſperde, e indeboliſce meno l' eccitamento, o l' ammaſſo della riſpettiva potenza. Cadde *Nollet* nella ſteſſa illuſione; e indi ſtimò quelle diverſe apparenze inſufficienti a ſtabilire le differenze di ſpecie, che già erano ſtate indicate da *Gray*, e *Du-Fay*, e diſtinte coi nomi di reſinoſa, e di vitrea elettricità. Preſe in fine *Le Roy* a dimoſtrare con ampia diſcuſſione la differenza di codeſte ſpecie, e deſcriſſe la ſtelletta per criterio della reſinoſa, come il pennello della vitrea.

Di quanta ſede ſien degni ſimili criterj ciaſcuno lo comprende dall' analiſi de' medeſimi riferita nella prima, e quarta Legge del precedente articolo. Ma in propoſito noſtro niuno fra tanti Oſſervatori vi fu, che riconoſciuto abbia in que' diverſi ſegni ragionevole indizio di contrarietà nella direzione della materia, onde ſono prodotti. *Watſon* medeſimo, che prima, e più d' ogni altro s' inoltrò colla ſcorta della eſperienza a rintracciare le direzioni delle elettriche potenze, non ne riconobbe giammai veruna direzione conforme o all' uno, o all' altro di que' ſegni; nè in conto alcuno gl' induſſe per teſtimonj di contrarietà.

Fu il primo *Franklin*, che dopo di aver precariamente adottata la ſua prima idea di *poſitiva*, e di *negativa* natura delle oppoſte elettriche potenze, azzardò coerentemente l'altro penſiero ſulla eſpreſſione di que' ſegni; e ſoſpettò, che il pennello procedeſſe da eſito, o emanazione, e la ſtelletta da ingreſſo, o aſſorbimento di quell' unico fluido, che egli preſuppoſto avea qual ſola cagione, e baſe d' ogni elettrico effetto. Vero è, che egli non propoſe ſimili idee, che a foggia di mere poſſibilità, o di ſemplici ſoſpetti; e proteſtò eſpreſſamente, che quanto a fior di pelo ſono eſſe luſinghiere, e ſembrano a primo lancio plauſibili, altrettanto poi ſi trovano infide, e diſcordi coll' evidenza de' fatti particolari, e ben diſtinti, qualora ſi ha la pazienza per internarſi di propoſito ne' loro confronti (*). Tale in ſomma è di que' lucidi ſegni la ſtorica deduzione dai primi tempi, che cominciarono a coltivarſi gli elettrici ſtudj, fino all' epoca di *Franklin*.

Preſero voga le Frankliniane idee, e diventò *Franklin* Capo ſcuola, e duce di ſiſtematica Setta, e tanto baſtò perchè tutte le ſue congetture, e per fino i ſuoi più azzardati ſoſpetti veniſſero dai Frankliniani Settarj traſformati in dogmi, e propoſti, e difeſi con linguaggio di fanatica perſuaſione. Si definì pertanto *la luce di partenza*, *e la luce di ritorno*; *ſi deciſe*, *che il pennello dà*, *e la ſtelletta riceve*; e ſi ſtabilì quello quaſi preſidente all' *eſito*, queſta all' *introito* d'ogni elettrica ſoſtanza. In mezzo però a tante definizioni, e tanti ſtabilimenti non acquiſtò l' elettrica ſcienza, che ampie parafraſi de' primi fatti indicati da *Franklin*, pronunciate con altrettanta confidenza, e perſuaſione, quanta fu la perpleſſità, e l' incertezza del loro Autore.

Non

(*) *Franklin Oevres* Vol. I. pag. 59. Ces explications du pouvoir, et de l' operation des pointes lorſqu' elles ſe preſenterent a moi pour la premiere fois, et qu' elles rouloient dans mon eſprit, me parurent ſatisfaire parfaitement à tout. Mais depuis que je les ai miſes par ecrit, et rappellées à un examen plus ſévere, et reflechi, j' avoue de bonne foi qu' il me reſt quelques doutes a cet égard. Mais n' ayant rien de mieux pour le preſent à vous offrir à la place, je ne les rejette pas abſolument; car c' eſt ſouvent utile de lire même une mauvaiſe ſolution ecc.

Ibid. pag. 150. Ces penſées, mon cher ami, ne ſont que hazardées, et ébauchées pour la plupart; e ſi je n' avais que l' ambition de me faire quelque réputation dans la philoſophie, je le garderois par devers moi juſqu' a ce qu' elles fuſſent perfectionnées, et rectifiées par le tems, et par des nouvelles expèriences. ecc.

Non ſarebbe pregio dell'opera d'intertenermi qui nella diſamina di ſimili prevenzioni. Un errore finchè non diventa pubblico, e non turba il libero andamento della verità, non merita di eſſere ſolennemente conteſtato. Ma quando pubblicamente ſi produce ſotto le diviſe della verità, e ne confonde le ingenue ſembianze, non ſi può far meno di non ſegnarlo a dito, e sfatare quegli incanti, coi quali nella ricerca del vero ai meno accorti fa illuſione, e l'incauta moltitudine ſeduce. Non è punto neceſſario, nè opportuno di aſſociare all'errore i nomi degli Autori, che hanno contribuito a propagarlo; maſſimamente quando i loro nomi non influiſcono nella realità delle coſe; e tanto meglio quando, come ebbero eſſi l'ingenuità di confeſſare di aver errato nel definir la luce di partenza, così è ſperabile, che con più matura diſcuſſione de' fatti poteſſero egualmente riconoſcere il loro abbaglio nella luce di *ritorno*, ed in ogni altra ſomma d'*introito*, e di *eſito* delle elettriche azioni.

Sarebbe un vero morale paradoſſo, che illuſtri Autori, i quali la vita loro conſumano negli ſtudj delle ſcienze naturali, ſi ſcorgeſſero in fine dominati piuttoſto dall'intrattabile fanatiſmo di partito, o di ſetta, che animati dal tranquillo, e docile ſpirito della verità. Non è mai ſenza pericolo, ed è ſenza fallo perfettamente inutile intraprender diſputa con teſte di partitante, o di ſettario. Per nulla d'immiſchiarmi intendo con ſiffatti Diſputatori; e come nulla oſſervo, o ſcrivo per eſſi, così alle opinioni, e ai giudizj loro io nulla attendo. Ai pacifici ſeguaci del vero, che ſoli meritano il nome, e il pregio di Filoſofi, preſento di buon grado le precedenti mie rifleſſioni per avvertirli nei bivj, e negli inciampi, che indur potrebbero traviamento, o ritardo nelle elettriche ricerche, ed ai medeſimi propongo le analitiche mie produzioni per dirigermi inſieme con eſſi a qualche ſicuro termine di elettrica Teoria.

Ed in ciò, che i moltiplici fenomeni riguarda dell'elettrica luce ne riſtringerò per ultimo i riſultati delle precedenti generali, e particolari Leggi nel ſeguente

TEOREMA. XXVI.

L' elettrica luce nei comuni rapporti colla generale teoria della luce, e della viſione non ha maggiore eſpreſſione delle già note induzioni, e incertezze degli Ottici principj; e nei generali rapporti cogli elettrici ſenomeni naſce al pari degli altri ſegni per certa proporzione di moto delle contrarie elettriche potenze; e ne' particolari ſuoi accidenti di figura, grandezza, ſtrepito, e vivacità, o varietà di colori ſi riduce alle combinazioni de' moltiplici elementi, che modificano, e compiono i momenti d' ogni elettrica azione.

SOPRA L' EQUAZIONE

D' UNA CURVA,

Sopra la falſità di due famoſi Teoremi ; e ſopra le ſerie armoniche a termini infinitamente piccioli.

Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie, Pubblico Profeſſore delle Matematiche Superiori nella Regia Univerſità di Pavia.

AL SIGNOR......

Eccomi a mantener la parola. Io le promiſi di voler penſare ne' momenti, che mi laſciano di libertà le ordinarie mie occupazioni, alla Curva, di cui ella mi parlò nel Carnovale ſcorſo, invitandomi a ricercarne l'equazione ad effetto di poterla in qualche modo deſcrivere per una ſerie continua di punti quanto ſi voglia vicini, e quindi determinare quelle proprietà, che poſſono renderla degna della curioſità degl' intendenti, e raccomandabile ai Geometri. E ſiccome parvemi, che ella allora mi diceſſe, che qualora aveſſe in ſuo potere l' equazione di una tal curva, non piccioli vantaggi poteva riprometterſi nell' applicazione, che diviſava di farne ad alcuni principj della Scienza Armonica eſpoſti nell' opera, che intorno a queſto argomento da molto tempo ella ſta preparando per le ſtampe; perciò tanto più volentieri mi ſono fatto premura di compiacerla, applicandomi con qualche ſorta d' impegno a queſta difficile e laborioſa ricerca. Io mi poſi da principio al lavoro con poca ſperanza di riuſcita; maſſime dopo avere da lei compreſo, che molti altri di me più eſperti avevano tentato di rompere queſto iſtmo, ma ſempre inutilmente. Pare in fatti ſulle prime, che le condizioni del Problema eſcludano quella ſerie continua di punti, la quale coſtituiſce il carattere di ogni linea curva, la di cui equazione, qualunque ella ſia, indica ſempre in ogni ramo della Curva o un' aſſoluta e rigoroſa continuità, o per lo meno una tal vicinanza fra due punti qualunque conſecutivi, che la loro diſtanza ſia minore di ogni dato piccioliſſimo intervallo. La Curva richieſta all' oppoſto ſembra a prima viſta dover ammettere una vera interruzione nelle ſue parti, ed una diſtanza aſſegnabile da un punto all' altro ſucceſſivo; nel qual caſo i ſuoi punti a maggior ragione ſi direbbono *punti diſcreti*, che non ſi dicono quelli delle Curve eſponenziali rappreſentate dall' equazione $y = (-a)^x$, dove una quantità negativa viene elevata ad un eſponente indeterminato e variabile. Ma il fatto ſta che queſta prima apparenza ſvaniſce poi ſubito per poco che uno s' interni nell' indole della quiſtione, offrendoſi allora allo ſpirito del Geometra inveſtigatore quella perſetta continuità che da prima non ſi aſpettava, e le condizioni del Problema non parevano promettere. Ma ella già mi dimanda, *queſta Curva è ella algebraica, oppur traſcendente?* Io vorrei poterle riſpondere, che la Curva è del genere delle *algebraiche o geometriche*, ma ſono coſtretto a dirle, che eſſa appartiene alla ſublime *famiglia* delle *hypergeometriche* o *traſcendenti*. E' però vero, che in compenſo di ciò ella è d' altra parte così pellegrina e ſingolare, e nel tempo ſteſſo la ſua equazione è così ſemplice ed elegante che non ſi potrebbe deſiderare di più.

Per altro la coſa per me più inaſpettata nel maneggiare un tal ſoggetto non è già ſtata quella di eſſermi imbattuto in un' equazione tanto ſemplice e facile, ma bensì di aver riſcontrato nella forma di tal equazione quella Curva medeſima, che io ora ſono circa tre anni avea già pubblicata nelle mie *Diſquiſitiones Phyſico-Mathematicæ* nel Problema II della *Diſquis. IX*, dove cerco la Curva, cui percorre il centro di gravità della circonferenza d' un cerchio, qualora da queſta ſi va levando di mano in mano un arco, e poi l' altro ſino a che non reſti più alcun reſiduo. Certamente non è ſtata picciola la mia meraviglia nell' oſſervare, che due curve a prima viſta tanto diverſe non ſono poi altro in fine che una medeſima curva, e nel trovarla dotata della bella proprietà meccanica conſiſtente nell' eſſer quella il luogo geometrico de' centri di gravità degli archi circolari ſminuiti ſucceſſivamente dall' intera circonferenza ſino all' arco evaneſcente. Venghiamo pertanto al Problema.

PROBLEMA.

In una retta indefinita MQ *dato un punto* A, *e fuori di eſſa un punto qualunque* B, *ſicchè la retta* AB, *e l' angolo* BAQ *rieſcano noti, ſi meni ad* AB *la perpendicolare* BC; *e ſi divida l' angolo* BAQ *per metà colla retta* AC, *la quale incontra in* C *la detta perpendicolare* BC: *parimente guidata ad* AC *la perpendicolare* CD, *ſi divida per metà l' angolo* CAQ *colla retta* AD, *che ſomminiſtra un altro punto d' interſezione* D, *e così guidata alla* AD *la normale* DE, *e dividendo colla* AE *per mezzo l' angolo* DAQ, *ſi avrà un terzo punto d' interſezione* E. *Procedendo di queſto tenore all' infinito, ſempre con la perpendicolare all' ultima retta, e bipartizione eguale dell' angolo rimanente, ſi avranno infiniti punti ſino all' ultimo punto* H, *che viene a caſcare ſulla retta indefinita* MQ, *ed è l' ultima interſezione della perpendicolare, e della biſecante l' angolo reſiduo. Ciò ſtante ſi dimanda* 1. *La poſizione di queſto punto* H *ſulla indefinita* AQ, *ovvero il modo di ſubito determinarlo.* 2. *L' equazione o algebraica, o traſcendente, qual più ella ſarà, della Curva, che paſſa pe' punti* B, C, D, E, F, H.

SOLUZIONE.

Un raggio vettore indefinito AD della Curva facciaſi $= z$, e l' angolo pur indefinito DAQ compreſo da eſſo e dalla AQ dicaſi $= u$, o piuttoſto ſia u l' arco di cerchio deſcritto col raggio arbitrario 1, e miſurante il detto angolo. Ciò fatto, è manifeſto dalle condizioni del Problema, che nel triangolo DAE rettangolo in D, l' angolo AED, che è complemento di DAE, è pur complemento di $\frac{1}{2} DAQ$: onde il coſeno di $\frac{1}{2} DAQ$ ſta al ſeno tutto, come DA ad AE, ovvero

$\text{coſ.}\,\frac{1}{2}u : 1 :: z : \frac{z}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}u} = AE$. Per ſimil modo nel triangolo rettangolo AEF ſta il coſeno di EAF, ovvero di $\frac{1}{2}EAQ$, ovvero di $\frac{1}{4}DAQ$ al ſeno tutto, come AE ad AF, vale a dire $\text{coſ.}\,\frac{1}{4}u : 1 :: \frac{z}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}u} : \frac{z}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{4}u} = AF$. Così il raggio vettore conſecutivo ad AF troverebbeſi $= \frac{z}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{4}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{8}u}$, il conſecutivo a queſto verrebbe $= \frac{z}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{4}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{8}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{16}u}$, onde per fine ſi ottiene l' ultimo $AH = \frac{z}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{4}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{8}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{16}u\ldots\ldots\text{coſ.}\,\frac{1}{2^n}u}$ preſo per n un numero infinito.

Ora è noto dalla teoria delle funzioni circolari, che $\text{ſen.}\,u = 2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}u$, $\text{ſen.}\,\frac{1}{2}u = 2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{4}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{4}u$, $\text{ſen.}\,\frac{1}{4}u = 2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{8}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{8}u$, $\text{ſen.}\,\frac{1}{8}u = 2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{16}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{16}u$, e così diſcorrendo: dunque fatta nella primitiva equazione $\text{ſen.}\,u = 2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}u$ la ſoſtituzione del valore di $\text{ſen.}\,\frac{1}{8}u$, e così appreſſo degli altri, naſcerà $\text{ſen.}\,u = 2^n\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2^n}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{4}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{8}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{16}u\ldots\text{coſ.}\,\frac{1}{2^n}u$, ovvero $\frac{\text{ſen.}\,u}{2^n\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2^n}u} = \text{coſ.}\,\frac{1}{2}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{4}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{8}u\,\text{coſ.}\,\frac{1}{16}u\ldots\ldots\text{coſ.}\,\frac{1}{2^n}u$, dove n indica un numero qualunque. E di qui ſi vede, che il prodotto d' un numero qualunque di fattori eſpreſſi da' coſeni di angoli decreſcenti in progreſſione dupla è uguale al quoziente, che naſce, ſe il ſeno dell' angolo primitivo ſi divide pel numero ultimo, a cui ſi vuol arreſtare la progreſſione, moltiplicato pel ſeno dell' ultimo angolo corriſpondente.

Che ſe in vece de' coſeni ſi voleſſe far uſo delle ſecanti, allora per eſſere il coſeno eguale al quadrato del raggio diviſo per la ſecante, ſi fa manifeſto, che ſi preſenta

$$\frac{2^n \text{ ſen. } \frac{1}{2^n} u}{\text{ſen. } u} = \text{ſec. } \frac{1}{2} u \text{ ſec. } \frac{1}{4} u \text{ ſec. } \frac{1}{8} u \text{ ſec. } \frac{1}{16} u \ldots\ldots \text{ſec. } \frac{1}{2^n} u \,.$$

Tornando pertanto al valore del prodotto de' coſeni, cioè $\dfrac{\text{ſen. } u}{2^n \text{ ſen. } \frac{1}{2^n} u}$, e riflettendo, che il ſeno di un arco infiniteſimo non differiſce dall' arco ſe non per una quantità infiniteſima riſpetto all' arco medeſimo, ne viene in conſeguenza, che quando ſia n un numero infinito, come lo è nel preſente Problema, diventa ſen. $\frac{1}{2^n} u = \frac{1}{2^n} u$, e quindi 2^n ſen. $\frac{1}{2^n} u = u$. Perlochè ſarà $\dfrac{\text{ſen. } u}{u} = \text{coſ. } \frac{1}{2} u \text{ coſ. } \frac{1}{4} u \text{ coſ. } \frac{1}{8} u \text{ coſ. } \frac{1}{16} u \ldots\ldots$ coſ. $\frac{1}{2^n} u$. E poichè ſi è trovato il raggio vettore ultimo

$$AH = \frac{z}{\text{coſ. } \frac{1}{2} u \text{ coſ. } \frac{1}{4} u \text{ coſ. } \frac{1}{8} u \text{ coſ. } \frac{1}{16} u \ldots\ldots \text{ coſ. } \frac{1}{2^n} u},$$

fatta la ſoſtituzione di $\dfrac{\text{ſen. } u}{u}$ in luogo del denominatore, ſi raccoglie

$$AH = \frac{zu}{\text{ſen. } u}.$$

Quindi è manifeſto, che il punto H ricercato ſi determina col pigliare da A ſopra la indefinita AQ una quarta proporzionale AH dopo il ſeno dell' arco di cerchio, che miſura l' angolo compreſo da un raggio vettore qualunque e dalla AQ, dopo queſt' arco iſteſſo, e dopo il detto raggio vettore. Se pertanto il dato raggio vettore *AC* ſi farà $=\theta$, e l' arco, che miſura il dato angolo *CAQ*, ſi porrà $=\phi$, ſe ne ritrarrà per *AH* il valore tutto noto $\frac{\theta\phi}{\text{ſen.}\,\phi}$. Dal che appariſce, che l' invenzione del punto H dipende dalla rettificazione del cerchio, ma ne dipende in un modo così poco complicato, che non può cagionare a chicheſſia il minimo imbarazzo, maſſime avendoſi alla mano le Tavole calcolate delle lunghezze di tutti gli archi circolari in parti del raggio, come ſono per eſempio quelle, che pubblicò ultimamente il Sig. *Schulze* in Berlino.

Il ſecondo punto del Problema, concernente l' equazione della Curva, non ammette più ora veruna difficoltà. Imperciocchè eſſendoſi trovato generalmente $AH=\frac{zu}{\text{ſen.}\,u}$, ſe ſi prende la ſteſſa *AH* uguale alla quarta proporzionale dopo le tre date quantità, come ſi è avvertito, diviene ancor eſſa nota e determinata, e però uguale ad una quantità data, che diraſſi per eſempio *a*. Laonde l' equazione *polare* della Curva ſarà $\frac{zu}{\text{ſen.}\,u}=a$, ovvero $z=\frac{a\,\text{ſen.}\,u}{u}$, equazione di tal ſemplicità ed eleganza, che ben poche curve traſcendenti godono di queſto vantaggio. E queſta equazione è poi quella ſteſſa, che io trovai già competere alla Curva, la quale rappreſenta il viaggio, che va facendo il centro di gravità della circonferenza del cerchio deſcritto col raggio $=a$, quando dalla medeſima ſi vanno togliendo ſucceſſivamente altri, ed altri archi fino a ridurla al nulla, ſiccome ho eſpoſto nel Libro citato.

Intanto dalla detta equazione ſi raccoglie immediatamente, che i raggi vettori della Curva ſtanno tra loro nella ragione compoſta della diretta de' ſeni degli archi, che miſurano gli angoli formati da eſſi colla retta indefinita data di poſizione, e dell' inverſa degli archi iſteſſi. Così i due raggi vettori *AD*, *AF* ſtanno tra sè direttamente come i ſeni degli archi miſuranti gli angoli *DAQ*, *FAQ*, ed inverſamente come i detti archi. Si raccoglie pur anco, che ſvanendo l' angolo del raggio vettore e dell' indefinita *AQ*, e però diven-

tando

tando $\text{ſen.}\, u = u$ (poichè il ſeno dell' arco evaneſcente è ſempre uguale all' arco, come è noto dalla Geometria Infiniteſimale); ſi otterrà $y = a$, vale a dire il raggio vettore indeterminato acquiſta la poſizione della indefinita *AQ* cadendo ſopra eſſa, e ſi cangia nella retta dianzi trovata *AH*.

La deſcrizione di queſta Curva per punti quanto ſi voglia vicini ſi effettua ſpeditamente, conceſſa la rettificazione degli archi circolari, la lunghezza de' quali in parti del raggio ſi trova già calcolata nelle Tavole di Berlino da 1 ſino a 360 gradi. Condotta per eſempio ſotto qualunque angolo con *AQ* una retta indefinita *AN*, ſi determina ſu di eſſa il punto *D* ſpettante alla Curva con prendere *AD* quarta proporzionale dopo l' arco, che miſura l' angolo *DAQ*, dopo il ſuo ſeno, e dopo la retta già prima determinata *AH*. In tal modo ſi troveranno quanti altri punti della Curva ci piacerà.

Per poco, che ſi conſideri l' equazione, ſi vede pur anco, che la Curva ſarà compoſta di due rami perfettamente ſimili ed uguali di qua e di là dalla *AH*, la quale li divide per metà. Imperciocchè la medeſima coſtruzione, che ſi è fatta alla ſiniſtra di *AH*, ſi fa parimenti alla deſtra, dove gli angoli negativi de' raggi vettori colla *AH*, e gli archi pur negativi, che ne ſono la miſura, non alteran punto nell' equazione $z = \frac{a\,\text{ſen.}\, u}{u}$ i valori di z, i quali ſotto angoli uguali da una parte e dall' altra di *AH* ſi ritrovano riſpettivamente gli ſteſſi a motivo del valor negativo così dell' arco, come del ſuo ſeno alla deſtra di *AH*, il che rende ſempre poſitivo anche da queſta parte il valore di z, e ſempre uguale al ſuo corriſpondente ſotto il medeſimo angolo dalla parte oppoſta.

La forma di queſta Curva ha una gran ſomiglianza alla figura d' un cuore, ed è evidente, che reſta diviſa per metà dall' aſſe *AH*, il quale ſcuopreſi eſſere il *maſſimo* fra tutti i raggi vettori: in fatti ſe il differenziale dell' equazione $z = \frac{a\,\text{ſen.}\, u}{u}$ ſi fa uguale a zero, riſulta

$$dz = \frac{audu\,\text{coſ.}\, u - adu\,\text{ſen.}\, u}{u^2} = 0\text{, vale a dire } u = \frac{\text{ſen.}\, u}{\text{coſ.}\, u} =$$

tang. u, dal che è facile l' inferire $u = 0$, cioè il raggio vettore allora diviene *maſſimo* quando cade ſopra la retta indefinita AQ.

E' pur facile il vedere, che l' aſſe AH taglia la curva perpendicolarmente in H; il che ſi ſcuopre anche col calcolo differenziale, giacchè ſe nella formola $\frac{z^2 du}{dz}$ per la ſottangente delle curve riferite al fuoco ſi ſoſtituiſcono i valori opportuni ricavati dall' equazione della Curva, trovaſi la ſottangente $= \frac{a \text{ ſen. } u^2}{u \text{ coſ. } u - \text{ſen. } u}$, che nel ſuppoſto di $u = 0$ diventa $= \frac{0}{0}$; e ſe per evitare queſto valore indeterminato ſi uſa il noto ripiego di prendere il differenziale del numeratore, e dividerlo pel differenziale del denominatore, ſicchè abbiaſi

$$\frac{2adu \text{ coſ. } u \text{ ſen. } u}{du \text{ coſ. } u - udu \text{ ſen. } u - du \text{ coſ. } u} = \frac{2a \text{ coſ. } u \text{ ſen. } u}{- u \text{ ſen. } u} = \frac{2a \text{ coſ. } u}{- u},$$

naſce nel caſo di $u = 0$ la ſottangente $= \frac{- 2a \text{ coſ. } u}{u} = \infty$. E però la ſottangente, cioè la perpendicolare condotta da A al raggio vettore AH, ed incontrata dalla tangente, che ſi guida da H, riſultando infinita, ſi fa manifeſto, che la tangente in H è parallela alla ſottangente, e conſeguentemente perpendicolare al raggio vettore AH, che è quanto dire il raggio vettore AH, oſſia l' aſſe della Curva è ad eſſa normale in H.

Si rende inoltre manifeſto, che l' aſſe iſteſſo AH, che da una parte taglia perpendicolarmente la Curva in H, dall' altra rieſce tangente di ambedue i rami della Curva in A, ciò che appariſce dal valore della ſottangente $\frac{a \text{ ſen. } u^2}{u \text{ coſ. } u - \text{ſen. } u}$, che nel caſo di u eguale alla ſemicirconferenza del cerchio ſi annulla, e moſtra in conſeguenza eſſere AH tangente de' due rami della Curva in A.

La forma della Curva indica fralle ordinate ortogonali all' aſſe AH doverſene trovare una *maſſima* IO, e queſta ſi determina facilmente nel modo ſeguente: Eſſendo $AI = z$,

$IAQ = u$, ne viene $IO = z\ \text{ſen.}\, u = \frac{a\ \text{ſen.}\, u^2}{u}$, e l'aſciſſa $AO = z\ \text{coſ.}\, u = \frac{a\ \text{ſen.}\, u\ \text{coſ.}\, u}{u}$. Preſo pertanto il differenziale del valore di IO, ed uguagliato a zero; riſulta $\frac{2audu\ \text{ſen.}\, u\ \text{coſ.}\, u - adu\ \text{ſen.}\, u^2}{u^2} = 0$, e quindi $u = \frac{\text{ſen}\, u}{2\ \text{coſ.}\, u} = \frac{1}{2}\ \text{tang.}\, u$. Laonde il punto della Curva, al quale corriſponde l'ordinata maſſima, reſta determinato con guidare un raggio vettore AI, il quale faccia coll'aſſe un tal angolo IAH, che l'arco miſuratore di queſt' angolo ſia uguale alla metà della ſua tangente. Che ſe il valore di $u = \frac{\text{ſen.}\, u}{2\ \text{coſ.}\, u}$ viene ſoſtituito ne' valori dell' ordinata OI del raggio vettore AI, e dell' aſciſſa AO, appariſce $OI = 2a\ \text{ſen.}\, u\ \text{coſ.}\, u$, $AI = 2a\ \text{coſ.}\, u$, $AO = 2a\ \text{coſ.}\, u^2$, valori tutti ſempliciſſimi e dipendenti dall' arco u. Ora il ritrovare un angolo IAH, il di cui arco miſuratore u ſia la metà della tangente, è un Problema di facile indagine, il quale ſi ſcioglie coll'ordinaria regola di falſa poſizione nel ſeguente modo.

Suppoſto, che non ſi abbiano alla mano le Tavole di Berlino degli archi ridotti in parti del raggio, ſi può ſubito ſupplirvi mediante la formola $u = \frac{n\pi}{\gamma}$, nella quale π indica la lunghezza della ſemicirconferenza del cerchio deſcritto col raggio $= 1$, u la lunghezza dell' arco propoſto, n il numero de' gradi, minuti, ecc. di queſt' arco, γ il numero de' gradi, minuti, ecc. della ſemicirconferenza π. Imperciocchè nella formola $u = \frac{n\pi}{\gamma} = \frac{n}{\gamma : \pi}$ dopo aver ridotti n e γ in numeri omogenei, cioè ambedue in minuti primi, o in ſecondi, o ecc. baſta ſottrarre il logaritmo di π, cioè $0,4971499$ dal logaritmo del numero γ, e ſottrarre nuovamente queſto reſiduo dal logaritmo del numero n, e ſi ottiene il logaritmo della lunghezza dell' arco propoſto u. Ciò premeſſo, paſſo a fare le ſeguenti ipoteſi per giugnere all' equazione $2u$ = tang. u, preſo ſempre n per eſprimere il numero di gradi, ecc. dell' arco u:

IPOTESI I.

$n = 60^\circ$
log. $2n$ = 2, 0791812
— log. $\frac{\gamma}{\pi}$ = 1, 7581226
log. $2u$ = 0, 3210586
log. tang. n = 0, 2385606
Err. + 0, 0824980

IPOTESI II.

$n = 70^\circ$
log. $2n$ = 2, 1461280
— log. $\frac{\gamma}{\pi}$ = 1, 7581226
log. $2u$ = 0, 3880054
log. tang. n = 0, 4389341
Err. — 0, 0509287

IPOTESI III.

$n = 66^\circ$
log. $2n$ = 2, 1205739
— log. $\frac{\gamma}{\pi}$ = 1, 7581226
log. $2u$ = 0, 3624513
log. tang. n = 0, 3514169
Err. + 0, 0110344

IPOTESI IV.

$n = 67^\circ$
log. $2n$ = 2, 1271048
— log. $\frac{\gamma}{\pi}$ = 1, 7581226
log. $2u$ = 0, 3689822
log. tang. n = 0, 3721481
Err. — 0, 0031659

Facendo adunque come la ſomma di queſti due ultimi Errori ad uno di eſſi, così la differenza delle Ipoteſi al quarto proporzionale, ſi giugne pel valore di n ai due limiti più vicinl $66^\circ. 46'$, e $66^\circ. 47'$. Pianto quindi due altre ipoteſi:

IPOTESI V.

$n = 66^\circ. 46' = 4006'$
$2n = 8012'$
log. $2n$ = 3, 9037409
— log. $\frac{\gamma}{\pi}$ = 3, 5362739
log. $2u$ = 0, 3674670
log. tang. n = 0, 3672499
Err. + 0, 0002171

IPOTESI VI.

$n = 66^\circ. 47' = 4007'$
$2n = 8014'$
log. $2n$ = 3, 9038493
— log. $\frac{\gamma}{\pi}$ = 3, 5362739
log. $2u$ = 0, 3675754
log. tang. n = 0, 3675985
Err. — 0, 0000231

Laonde facendo come la ſomma 0, 0002402 degli Errori all' Errore 0 , 0002171 , così la differenza 1′ , ovvero 60″ delle Ipoteſi al quarto proporzionale, queſto ſi trova = 54″, 14‴ , che aggiunto a 66°, 46′ fa conoſcere l'angolo ricercato di 66°, 46′, 54″, 14‴, e la ſua tangente = 2, 3311220, oſſia due volte e un terzo il raggio, o ſeno tutto.

Finalmente l' equazione $z = \frac{a \text{ ſen. } u}{u}$ eſaminata a dovere ci fa toſto ſcorgere , che la Curva aver dee un numero infinito di Foglie intorno al punto *A* , una ſempre minore dell' altra ſenza fine , le quali vanno per ultimo a terminare e concentrarſi in un ſolo punto . Ciò ſi deduce dagl' infiniti valori dell' arco *u* , incominciando da zero ſino all' infinito tanto dalla parte de' poſitivi, che da quella de' negativi, coſicchè denominati *u* gli archi che non ſorpaſſano la prima periferia 2π , i detti valori vengono eſpreſſi dalla ſerie $\pm u$, $\pm 2\pi \pm u$, $\pm 4\pi \pm u$, $\pm 6\pi \pm u$, $\pm 8\pi \pm u$, $\pm 10\pi \pm u$, ecc. *in infinito*.

Una Curva, che per la ſomiglianza colle figure d'un Cuore, viene denominata *Cardioide*, trovaſi deſcritta nell' Enciclopedia Ingleſe all' articolo *Cardioid*, ma eſſendo eſſa algebraica, come la ſua equazione lo dà a divedere, differiſce eſſenzialmente dalla noſtra.

Deſcriveſi quella con prolungare fuori del cerchio le corde , che partono tutte dal medeſimo punto della ſua circonferenza, e con prendere le parti eſterne ſempre uguali al diametro del cerchio . Le eſtremità delle corde con tal legge prolungate coſtituiſcono il perimetro della *Cardioide*. Da una coſtruzione così ſemplice ſi ricava con eſtrema facilità l'equazione algebraica di queſta Curva , la quale aſcende al quarto grado.

Vengo ora all' altra dimanda, che ella mi fa intorno alle due famoſe Propoſizioni , che nella dottrina delle Serie Infinite , e nel Calcolo Integrale trovanſi da molti o ſemplicemente enunciate, o anche dimoſtrate, delle quali io le diſſi, che ben lungi dall'ammetterle per vere io per l'oppoſto credeva di poterne provare rigoroſamente la falſità.

La prima di queſte propoſizioni viene eſpreſſa così:

Se il numero, e, *che ha per logaritmo iperbolico l' unità*, *vie-*

ne elevato alla potenza, che ha per eſponente la ſerie reciproca de' numeri primi $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+$ ecc. *in inf., ne naſce* $e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\text{ecc.}}$ *eguale all' infinito armonico* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+$ ecc.

Si ſuole dimoſtrare una tale propoſizione, chiamando A la ſerie reciproca de' numeri primi, B la reciproca de' quadrati di queſti numeri, cioè $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+$ ecc., C la reciproca de' loro cubi, D la reciproca de' loro biquadrati, e così appreſſo, e ſiccome è noto dalla Teoria delle Serie, eſſere $A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+$ ecc. $=\text{log.}\,\frac{2}{1}+\text{log.}\,\frac{3}{2}+\text{log.}\,\frac{5}{4}+\text{log.}\,\frac{7}{6}+\text{log.}\,\frac{11}{10}+\text{log.}\,\frac{13}{12}+\text{log.}\,\frac{17}{16}+$ ecc. $=\text{log.}\,\frac{2.\,3.\,5.\,7.\,11.\,13.\,17.\text{ ecc.}}{1.\,2.\,4.\,6.\,10.\,12.\,16.\text{ ecc.}}$; conſeguentemente paſſando dai logaritmi ai numeri naſce $e^{A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\text{ecc.}}$ $=\frac{2.\,3.\,5.\,7.\,11.\,13.\,17.\text{ ecc.}}{1.\,2.\,4.\,6.\,10.\,12.\,16.\text{ ecc.}}$. Ora queſta frazione, la quale ha per numeratore il prodotto infinito di tutti i numeri *primi*, e per denominatore il prodotto di tutti quelli, che mancano dell' unità dai numeri *primi*, è appunto uguale alla ſerie reciproca de' numeri naturali $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$ ecc. in inf. Imperciocchè preſa $x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+$ ecc., ſarà $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+$ ecc., e ſottratta queſta ſeconda dalla prima, reſta $\frac{1}{2}x=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+$ ecc.

dalla quale ſono eſcluſi tutti i denominatori pari, cioè diviſibili per 2. Tolgo da queſta il ſuo terzo, cioè $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \text{ecc.}$, ed ho per reſto $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{ecc.}$, da cui ſono eſcluſi tutti i denominatori diviſibili per 2, e 3. Da queſta levo il quinto, oſſia $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{5}x = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \text{ecc.}$, ed ottengo il reſiduo $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{5}x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{ecc.}$, dove non s' incontra più alcun denominatore diviſibile per 5. A queſto modo eſcludendo tutti i termini diviſibili per 7, per 11, per 13, per 17, e per qualunque altro numero *primo*, ſi arriva finalmente all'ugualità $\frac{1.\,2.\,4.\,6.\,10.\,12.\,16.\,\text{ecc.}}{2.\,3.\,5.\,7.\,11.\,13.\,17.\,\text{ecc.}}x = 1$, ovvero

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{ecc.}$$

$$= \frac{2.\,3.\,5.\,7.\,11.\,13.\,17.\,\text{ecc.}}{1.\,2.\,4.\,6.\,10.\,12.\,16.\,\text{ecc.}}$$

Per la qual coſa la quantità traſcendente $e^{A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \text{ecc.}}$ trovata uguale alla frazione infinita $\frac{2.\,3.\,5.\,7.\,11.\,13.\,17.\,\text{ecc.}}{1.\,2.\,4.\,6.\,10.\,12.\,16.\,\text{ecc.}}$ ſarà pur uguale all' infinito armonico $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{ecc.}$

Siccome pertanto è già noto dalla dottrina delle Serie, che la Serie reciproca de' numeri primi, vale a dire *A* ha un valore infinito, e la ſomma di $\frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \text{ecc.}$ in inf. non ha che un valore finito, ed anche aſſai piccolo; perciò traſcurando la ſomma $\frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D +$ ecc. in confronto di *A*, riſpetto a cui eſſa ſvaniſce, naſce per ultimo l' equazione $e^{A} = e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\text{ecc.}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ $+\frac{1}{6}+$ ecc., che è la propoſta.

Queſto ſottile ragionamento pecca nell' ultima parte, dove ſtabiliſce, poterſi traſcurare la ſomma $\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\frac{1}{5}E+$ ecc. in confronto di A, perchè quella finita, e queſta infinita. Il gran principio dell' evaneſcenza della quantità finita riſpetto all' infinita non può aver più luogo, ed induce infallibilmente in errore, allorchè l' infinito congiunto al finito forma l' eſponente d' una data quantità, per eſempio e nel caſo preſente. Allora (chiamato n il finito) è tanto lontano, che $e^{\infty+n}$ ſia lo ſteſſo, che e^{∞}, che anzi quello ſta a queſto nella ragione di $e^{n}:1$, cioè in una ragione comunque ineguale finattantochè n ſeguita ad eſſere un numero finito ancorchè piccioliſſimo, non divenendo uguale una tal proporzione ſe non nel caſo di $n=0$. Ciò ſi vede ancor meglio dal valore infinito, che ha la differenza delle due predette eſpreſſioni, la qual differenza è $= e^{\infty+n} - e^{\infty} = e^{\infty}(e^{n}-1)$, valore viſibilmente infinito fino a che n riman qualche coſa. E' dunque evidentemente falſo il celebre Teorema ſopra enunciato, e comunemente adottato per vero.

L' altra propoſizione, che io trovo falſa, è il famoſo Teorema, che s' incontra ne' trattati più eſteſi di Calcolo Integrale, in quella parte più delicata e profonda, che riguarda l' integrazione delle formole differenziali a *parziali differenze*. Il Teorema ſi ſuol eſporre così:

Se la funzione Z *delle variabili* x, y, u, ecc. *è tale, che debba eſſer nulla* 1°. *nell' ipoteſi di* y *eguale ad una coſtante* a, *tutte le differenze parziali di* Z, *eccetto* $\frac{dZ}{dy}$, *ſaranno neceſſariamente nulle nella medeſima ipoteſi.* 2°. *Se queſta funzione è tale, che eſſa debba eſſer nulla nell' ipoteſi di* $y=a$, *e di* $x=b$, *tutte le differenze parziali di* Z *eccetto* $\frac{dZ}{dy}$, *e* $\frac{dZ}{dx}$ *ſaranno*

ſaranno neceſſariamente nulle nella ſteſſa ipoteſi. Quindi, ſe eſſendo Mdy *un termine del differenziale eſatto di* Z, *la formola integrale* $\int$Mdy (*fatta l' integrazione per rapporto ad* y *ſolamente*) *è nulla nel ſuppoſto di* y *uguale ad una coſtante, queſt' altra formola integrale* $\int \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{dx}}\mathrm{dy}$, *che è il coefficiente di* dx *nel differenziale della prima, è neceſſariamente nulla nello ſteſſo ſuppoſto*,

Per incominciare ora a dimoſtrare falſa la prima parte del Teorema, io oſſervo, che non può la funzione Z annullarſi nella ſuppoſizione di $y = a$ ſenza avere la forma $(y - a)^n P$, eſſendo P un' altra funzione delle variabili x, y, u, ecc. Se pertanto ſi prendono le differenze parziali $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{dZ}{du}$, ecc., le quali non ſono altro che $\frac{dP}{dx}(y - a)^n$, $\frac{dP}{du}(y - a)^n$, ecc. ſi vede chiaro, che tali differenze ſi annullano ancor eſſe in quell' ipoteſi di $y = a$. Ma per l' oppoſto la differenza parziale $\frac{dZ}{dy}$ in vece di perſiſtere ad eſſere qualche coſa, come eſige il Teorema, diventa nulla eſſa pure in infiniti caſi: imperciocchè trovaſi $\frac{dZ}{dy} = \frac{dP}{dy}(y - a)^n + nP(y - a)^{n-1}$, la quale è manifeſtamente nulla tutte le volte che n ſupera l' unità; il che moſtra l' inſuſſiſtenza della prima parte del Teorema.

Quanto alla ſeconda parte, affinchè la funzione Z attualmente ſvaniſca nell' ipoteſi di $y = a$, e di $x = b$, doverà ella avere la forma ſeguente $Z = (y - a)^n P + (x - b)^m Q$, dove P e Q ſono funzioni diſtinte delle ſteſſe variabili x, y, u, ecc. Preſa ora la differenza parziale $\frac{dZ}{du}$, trovaſi queſta $= \frac{dP}{du}(y - a)^n + \frac{dQ}{du}(x - b)^m$, che è manifeſtamente $= 0$ nella ſuppoſizione di $y = a$, e di $x = b$; e così ogn' altra differenza parziale preſa per rapporto a qualunque variabile diverſa da y, e x, ſi troverà ſempre nulla in quella ſuppoſizione. Ma ben lungi, che le differenze parziali $\frac{dZ}{dy}$, $\frac{dZ}{dx}$ non ſi annullino in quel ſuppoſto, come vuole il Teorema, trovaſi, che ſi annullano realmente ancor eſſe in infiniti caſi. Ed in fatti $\frac{dZ}{dy} = \frac{dP}{dy}(y-a)^n + nP(y-a)^{n-1}$ $+ \frac{dQ}{dy}(x-b)^m$, e $\frac{dZ}{dx} = \frac{dQ}{dx}(x-b)^m + mQ(x-b)^{m-1}$ $+ \frac{dP}{dx}(y-a)^n$; e queſte due eſpreſſioni ſono evidentemente nulle nell' ipoteſi di $y=a$, e di $x=b$ tutte le volte, che gli eſponenti m, n ſuperano l' unità, vale a dire in infiniti caſi; contro ciò, che ſi aſſeriſce nella ſeconda parte del Teorema.

Finirò con riſpondere all' ultima ſua dimanda di comunicarle una nuova dimoſtrazione del bel Teorema concernente l' uguaglianza fra il logaritmo iperbolico del numero 2, e la ſerie armonica a termini infiniteſimi, non parendole pienamente ſoddisfacenti le dimoſtrazioni da lei vedute. Ecco dunque il Teorema:

Eſſendo $n=\infty$, *dico, che* $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}$ $+ \frac{1}{n+5} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n} = \log. 2$.

DIMOSTRAZIONE.

Lo ſviluppo de' termini della ſerie armonica dà le ſeguenti equazioni.

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{2^2}{n^3} - \frac{2^3}{n^4} + \frac{2^4}{n^5} - \frac{2^5}{n^6} + \frac{2^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+3} = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{3^2}{n^3} - \frac{3^3}{n^4} + \frac{3^4}{n^5} - \frac{3^5}{n^6} + \frac{3^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+4} = \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{4^2}{n^3} - \frac{4^3}{n^4} + \frac{4^4}{n^5} - \frac{4^5}{n^6} + \frac{4^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+5} = \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{5^2}{n^3} - \frac{5^3}{n^4} + \frac{5^4}{n^5} - \frac{5^5}{n^6} + \frac{5^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

$$\frac{1}{n+6} = \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{6^2}{n^3} - \frac{6^3}{n^4} + \frac{6^4}{n^5} - \frac{6^5}{n^6} + \frac{6^6}{n^7} - \text{ecc.}$$

ecc.

Dunque diſtribuiti ordinatamente i termini, che moltiplicano le potenze reciproche di n, ſe ne ritrarrà

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \frac{1}{n+6} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{n}(1+1+1+1+1+1+1+\text{ecc.})$$

$$- \frac{1}{n^2}(1+2+3+4+5+6+7+\text{ecc.})$$

$$+ \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+\text{ecc.})$$

$$- \frac{1}{n^4}(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+\text{ecc.})$$

$$+ \frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+6^4+7^4+\text{ecc.}$$

$$- \frac{1}{n^6}(1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+6^5+7^5+\text{ecc.})$$

$+$ ecc.

E poichè è già nota dall' Algebra comune l' eſpreſſione della ſomma di qualunque ſerie compoſta delle potenze intere de' numeri naturali continuati quanto ſi vuole, perciò ſoſtituendo ſiffatte eſpreſſioni in luogo delle riſpettive ſerie precedenti, ritrovaſi

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{n}(n) - \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) - \frac{1}{n^4}\left(\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right)$$

$$+ \frac{1}{n^5}\left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\right) - \frac{1}{n^6}\left(\frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^4}{12} - \frac{n^2}{12}\right) + \text{ecc.}\ldots$$

Ma eſſendo n infinito, ſvaniſcono nel ſecondo membro di queſt' equazione le potenze di n inferiori in confronto delle ſuperiori. Dunque ſarà

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+5}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{n}.n-\frac{1}{n^2}.\frac{n^2}{2}+\frac{1}{n^3}.\frac{n^3}{3}-\frac{1}{n^4}.\frac{n^4}{4}+\frac{1}{n^5}.\frac{n^5}{5}-\frac{1}{n^6}.\frac{n^6}{6}+\text{ecc.}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\text{ecc.}$$

Ora la dottrina de' logaritmi inſegna eſſere

$$\log.(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+\text{ecc.}$$

per modo che fatto $x=1$, proviene $\log. 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+$ ecc. Per conſeguenza la ſerie armonica propoſta ſarà $=\log. 2$.

Con queſto ſteſſo metodo io arrivo a dimoſtrare, che la ſerie armonica $\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}\ldots\ldots+\frac{1}{3n}$ è uguale a $\log.\frac{3}{2}$; e parimente $\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}\ldots\ldots+\frac{1}{4n}=\log.\frac{4}{3}$; e così pure $\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\ldots\ldots+\frac{1}{5n}=\log.\frac{5}{4}$; per modo che ci ſi offre queſt' elegante proſpetto.

Serie	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots+\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{2n}$
Somme	$\log.\infty=\log.\frac{1}{0}$	$\log.\frac{2}{1}$
Serie	$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{3n}$	$\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{4n}$
Somme	$\log.\frac{3}{2}$	$\log.\frac{4}{3}$
Serie	$\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{5n}$	$\frac{1}{5n+1}+\frac{1}{5n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{6n}$
Somme	$\log.\frac{5}{4}$	$\log.\frac{6}{5}$
Serie	$\frac{1}{6n+1}+\frac{1}{6n+2}\ldots\ldots+\frac{1}{7n}$	ecc.
Somme	$\log.\frac{7}{6}$	ecc.

Da ciò ne deriva, che ſe ſi prende λ eguale ad un numero intero affermativo qualunque, la ſerie armonica $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+5}+\ldots\ldots+\frac{1}{\lambda n}$ rieſce eguale alla ſomma de' logaritmi $\log.\frac{2}{1}+\log.\frac{3}{2}+\log.\frac{4}{3}+\log.\frac{5}{4}+\log.\frac{6}{5}+\log.\frac{7}{6}\ldots\ldots+\log.\frac{\lambda-1}{\lambda-2}+\log.\frac{\lambda}{\lambda-1}$

$$=\log.\frac{2.3.4.5.6\ldots\ldots\lambda-1.\lambda}{1.2.3.4.5\ldots\ldots\lambda-2.\lambda-1}=\log.\lambda.$$

Altre rifleſſioni nuove e intereſſanti potrebbono qui farſi intorno alle proprietà di queſte ſerie; ma per non eſſerle tedioſo io le rimetto alla ſua ſagacità.

SOPRA LA PRESSIONE

DE' FLUIDI

Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie, Pubblico Profeſſore delle Matematiche Superiori nella Regia Univerſità di Pavia.

ESaminando la preſſione de' fluidi contro i corpi immerſi, o contro le pareti de' recipienti, mi venne fatto di oſſervare, che nel Cilindro, e nella Sfera ad eſſo inſcrivibile, ſe entrambi ſi ſommergono nel fluido ſino alla ſommità, o ſe internamente ſcavandoli ſi riempie la loro capacità, riſulta nelle preſſioni eſercitate dal fluido contro i detti due corpi quella medeſima proporzione ſeſquialtera, che Archimede ſcoprì così nelle loro ſolidità, come nelle ſuperficie. Quindi argomentai, non dover eſſere inutile o ſterile l'idea di ridurre a formole generali la preſſione de' fluidi ad effetto di ricavarne ſecondo la varia forma de' corpi ſommerſi, o de' vaſi riempiti que' riſultati più o meno curioſi e rimarchevoli, cui il ſoggetto ſembra promettere. Reſtringendomi preſentemente in queſto breve Scritto ai fluidi *omogenei e incompreſſibili* verrò eſponendo ſuccintamente il mio diviſamento in queſta importante materia ſenza aſſumere dall' Idroſtatica altro principio fuori di quello altronde noto nelle molecole fluide per eſperienza, vale a dire l'uguaglianza di preſſione per ogni verſo e ſecondo tutte le direzioni.

LEMMA.

Un fluido, che riempie un tubo infinitamente ſottile *FECD* (*Fig.* 1.) o cilindrico o priſmatico avente i lati perpendicolari alla baſe, e tenuto in una poſitura comunque obliqua all' orizzonte *AD*, preme il fondo o la baſe *CD* con uno sforzo equivalente al peſo d'un priſma dello ſteſſo fluido, che ha per baſe la ſteſſa CD, e per altezza la verticale FA terminata dall' orizzontale AD.

DIMOSTRAZIONE.

Sia M il centro di gravità del filo d' acqua contenuto nel tubo infinitamente ſottile $FECD$, e colla verticale MP condotta dal centro di gravità ſi rappreſenti il peſo di eſſo filo, e ſi riſolva lo sforzo MP ne' due laterali MR perpendicolare alla baſe CD, ed MN perpendicolare al lato FD. Ciò poſto è manifeſto, che il filo d' acqua non preme il fondo CD ſe non collo sforzo rappreſentato da MR, poſciachè l' altro eſpreſſo da MN è tutto impiegato a premere le pareti del tubo. Starà dunque il peſo del fluido, cioè il prodotto del ſuo volume nella gravità ſpecifica g, alla preſſione p eſercitata ſul fondo CD, come ſta MP ad MR, ovvero per la ſimilitudine de' triangoli PMR, FAD, come FD ad FA, cioè $FD : FA :: DC \times FD \times g : p$; e perciò $p = DC \times FA \times g$. Il che era ecc.

SCOLIO.

E' di per sè chiaro, che qui ſi preſcinde da quella qualunque aderenza, che le molecole del fluido aver poſſono colle pareti del tubo, come pure da quella forza, che ne' tubi minimi o *capillari* è già conoſciuta, la qual opponendoſi alle comuni leggi dell' Idroſtatica altera e diverſifica la preſſione del fluido quando con diminuirne l' energia, quando con ſoſpenderne l' eſercizio.

TEOREMA I.

In un vaſo ADQB *di qualunque forma (Fig. 2.) pieno di acqua ſino in* BA, *la preſſione, che ſoffre qualunque minima particella, o elemento delle ſue pareti, equivale al peſo d' un priſma d' acqua avente per baſe lo ſteſſo elemento, e per altezza la ſua profondità ſotto il piano di livello* AB.

DIMOSTRAZIONE.

L' elemento *DC* del vaſo può avere tre differenti poſizioni perchè 1. un tubo priſmatico perpendicolarmente applicato al detto elemento può incontrare il piano di livello *BA* ſenza paſſare pel vaſo, come ſi vede nel tubo *DCEF*: 2. può eſſere parallelo al pian di livello, come *CDIL*: 3. può concorrere col piano di livello, paſſando però attraverſo il vaſo, ſiccome accade nel tubo *CDRS*.

Caſo 1.° Stando l'acqua così nel tubo *CDFE*, come nel vaſo comunicante *AQB* alla medeſima altezza, o allo ſteſſo livello *BAFN*, ed eſſendo tutto equilibrato, ne viene in conſeguenza, che il luogo *DC* è tanto premuto eſteriormente dall' acqua del tubo *DCFE*, quanto lo è internamente da quella del vaſo, e che però anche interiormente è premuto con uno sforzo, che vale il peſo d' un priſma d' acqua compreſo ſotto la baſe *CD* e ſotto un' altezza uguale alla diſtanza verticale di *CD* dal piano di livello.

Caſo 2.° Si pieghi il tubo orizzontale *CI* in un altro verticale *LN* che arrivi al piano di livello. Nel tubo *ONCD*, e nel vaſo comunicante *AQB* la ſuperficie ſuperiore dell' acqua ſtagnante e tranquilla occupa lo ſteſſo piano orizzontale. Laonde *CD* è premuto eſteriormente dall' acqua contenuta nel tubo ricurvo *NOCD* colla ſteſſa energia, ond' è premuto internamente dall' acqua del vaſo *AQB*. Ma egli è evidente, che *CD* è premuto collo ſteſſo sforzo che *LI*, ovvero il ſuo uguale *LM*, e che *LM* porta tutto il peſo dell' acqua contenuta in *MO*, che lo preme verticalmente, il qual peſo appartiene ad un volume d'acqua $= LM \times MN = CD \times MN$. Dunque con queſto ſteſſo sforzo è altresì premuto interiormente *CD* dall' acqua del vaſo.

Caſo 3.° Si adatti al vaſo *AQB* un altro vaſo *BCUT* di qualunque figura per modo che entrambi ſi tocchino in *CD*. L' acqua arriverà in ambedue allo ſteſſo livello, e *CD* ſarà premuto egualmente così dall' acqua del primo vaſo al di dentro, come da quella del nuovo al di ſuori, ed a queſta ſeconda preſſione equivale pel caſo 1°. quella dell' acqua nel tubo *CDRS*, cioè a dire il peſo d' un volume priſmatico d'ac-

qua,

qua, che ha *CD* per baſe, e per altezza la diſtanza del piano di livello. Il che era ecc.

TEOREMA II.

In un vaſo di qualunque figura ACDB *(Fig. 3. e 4.) la preſſione dell' acqua ſul fondo orizzontale* CD *vale il peſo d' un priſma d' acqua avente il fondo ſteſſo per baſe, e la ſua profondità ſotto il pian di livello per altezza.*

DIMOSTRAZIONE.

Ciaſcun elemento del ſondo *CD* è premuto col peſo d' un volume d' acqua, che ſi ha moltiplicando l' elemento per la ſua profondità ſotto il piano di livello *AB*, ovvero per la profondità del fondo ſteſſo ſotto quel piano. Dunque tutto il fondo porta una preſſione equivalente al peſo d' una mole di acqua eguale al prodotto del fondo per la ſua diſtanza dalla ſuperficie ſuperiore dell' acqua. Il che era ecc.

Di qui ſi comprende come una picciolisſima porzione d' acqua poſſa eſercitare una preſſione enorme ſopra una data ſuperficie.

TEOREMA III.

La preſſione, che eſercita un fluido omogeneo contro una ſuperficie qualunque, ha per miſura il peſo d' un volume di fluido uguale al prodotto di queſta ſuperficie per la diſtanza del ſuo centro di gravità dal pian di livello.

DIMOSTRAZIONE.

La preſſione totale del fluido ſopra una ſuperficie qualunque, e comunque ſituata riſulta dalla ſomma di tutte le preſſioni ſopra le parti infiniteſime, ovvero gli elementi della ſteſſa ſuperficie, che è quanto dire dalla ſomma de' prodotti di queſti elementi, moltiplicati ciaſcuno per la ſua diſtanza dal pian di livello. Ma per la natura del centro di gravità, la ſomma de' prodotti di ciaſcun elemento della ſuperficie per la ſua diſtanza da un piano fiſſo s' agguaglia al prodotto della ſuperficie intera moltiplicata per la diſtanza del ſuo centro di gravità dallo ſteſſo piano. * Dunque la preſſione contro la ſuperficie totale è miſurata dal peſo di una mole di fluido prodotta dal moltiplicare la ſuperficie per la diſtanza del ſuo centro di gravità dalla ſuperficie ſuperiore del fluido. Il che era ecc.

Quanto in appreſſo diremo circa la preſſione interna contro le pareti de' vaſi dall' acqua contenutavi vale ugualmente, com' è manifeſto, per la preſſione eſterna contro le ſteſſe pareti ne' vaſi, o corpi immerſi nell' acqua, ſuppoſta uguale nell' un caſo e nell' altro la riſpettiva diſtanza degli elementi delle pareti dal pian di livello. Dunque

I.

Un vaſo priſmatico pieno d' acqua tenuto colla baſe orizzontale ſoffre nella ſuperficie delle faccie laterali una preſſione uguale al peſo di tant' acqua, quant' è il prodotto della ſuperficie laterale moltiplicata per la metà dell' altezza del priſma. Ciò è evidente dall' eſſere il centro di gravità della ſuperficie del priſma alla metà della ſua altezza.

II.

Quindi ſi ricava, che la ſuperficie laterale d' un vaſo cubico pieno d' acqua prova una preſſione, che vale due volte il peſo dell' acqua; e che aggiuntavi la preſſione contro la baſe, la preſſione totale ha per miſura il triplo del peſo dell' acqua.

---

* Il Teorema della Statica è queſto: ſieno più peſi o maſſe M, M', M'', M''', ecc., e le riſpettive diſtanze dei centri di gravità di eſſe maſſe da un piano fiſſo ſieno D, D', D'', D''', ecc., e finalmente la diſtanza del loro comun centro di gravità dal medeſimo piano ſia Δ; ſarà ſempre la ſomma de' prodotti di ciaſcuna maſſa moltiplicata per la ſua riſpettiva diſtanza dal piano fiſſo uguale al prodotto della ſomma di dette maſſe moltiplicata per la diſtanza del comun centro di gravità dal piano medeſimo, cioè ſarà $MD + M'D' + M''D'' + M'''D''' +$ ecc. $= (M + M' + M'' + M''' +$ ecc.$)\,\Delta$.

III.

In un vaſo piramidale pieno d' acqua, tenuto colla baſe orizzontale all' ingiù, e colla cima rivolta all' insù per modo che il pian di livello ſia il piano orizzontale che paſſa per la cima, la preſſione contro la ſuperficie laterale ha per miſura il peſo di tant' acqua, quanta ſe ne ha con moltiplicare la detta ſuperficie per due terzi dell' altezza della piramide. In fatti il centro di gravità di quella ſuperficie ſta a due terzi dell' altezza della piramide, computando dalla cima.

IV.

Da ciò s' inferiſce, che nella ſteſſa piramide ſta *la preſſione contro la ſuperficie a quella contro la baſe, come ſtanno due terzi della ſuperficie alla baſe.*

V.

Che ſe il vaſo piramidale ſi tiene colla baſe orizzontale all' insù, e colla cima rivolta all' ingiù, allora *la preſſione contro la ſuperficie è miſurata dal peſo di quel volume d' acqua, che riſulta moltiplicando la ſuperficie pel terzo dell' altezza della piramide.*

VI.

Dal che ſi deduce, che *queſta ſeconda preſſione è la metà della prima; e che eſſa ſta alla preſſione fatta contro la baſe nella prima poſizione del vaſo, come ſta un terzo della ſuperficie alla baſe.*

VII.

Un vaſo cilindrico pieno d' acqua ſituato con baſe orizzontale porta nella ſuperficie curva tanta preſſione, quanto è il peſo d' un volume d' acqua riſultante dal moltiplicare quella ſuperficie per la metà dell' altezza del cilindro. Di fatti il centro di gravità della ſuperficie curva del cilindro è nel mezzo della ſua altezza.

VIII.

Da ciò s' inſeriſce, che *nel cilindro retto equilatero la preſſione contro la ſuperficie curva è doppia della preſſione contro la baſe*; *ed aggiunta la preſſione contro la baſe, la preſſione totale contro tutta la ſuperficie vale tre volte il peſo dell' acqua premente*; come appunto nel vaſo cubico; *e finalmente la preſſione totale è ſeſquialtera della preſſione contro la ſuperficie curva.*

IX.

L' acqua, che riempie un vaſo conico poſato ſulla ſua baſe orizzontale, preme la ſuperficie curva con uno sforzo uguale al peſo di tant' acqua, quant' è il prodotto di queſta ſuperficie moltiplicata per due terzi dell' altezza del cono: perchè il centro di gravità della ſuperficie curva del cono trovaſi ai due terzi della ſua altezza, contando dalla punta.

X.

Ma ſe il vaſo conico ſi capovolge, ſicchè la baſe orizzontale ſia ſuperiore, allora la preſſione contro la ſuperficie curva è la metà della precedente.

XI.

Se il vaſo è un cono retto, tenuto nella prima ſituazione, ſta la preſſione contro la ſuperficie curva a quella contro la baſe, come due terzi del lato al ſemidiametro della baſe, e al peſo dell' acqua, che contiene, ſta come il doppio lato allo ſteſſo ſemidiametro.

XII.

Capovolto il cono retto, in queſta ſeconda ſituazione ſta la preſſione contro la ſuperficie curva al peſo dell' acqua, come il lato del cono al ſemidiametro della baſe.

XIII.

Circoſcritto il cono retto al cilindro retto, ſta la preſſione contro la ſuperficie curva del cono nella prima ſituazione alla preſſione contro la ſuperficie curva del cilindro, come due terzi del lato del cono al lato del cilindro; e nella ſeconda ſituazione, come un terzo del lato del cono al lato del cilindro.

XIV.

Suppoſto il cono equilatero, la preſſione contro la ſuperficie curva nella prima ſituazione è d' un terzo più grande che la preſſione contro la baſe, ed uguaglia quattro volte il peſo dell' acqua.

XV.

La preſſione contro la baſe nella prima ſituazione del cono equilatero è ſeſquialtera della preſſione contro la ſuperficie curva nella ſeconda ſituazione.

XVI.

L' acqua, che riempie una sfera, ne preme la ſuperficie con uno sforzo, il quale ha per miſura il prodotto della ſuperficie moltiplicata pel ſemidiametro.

XVII.

La preſſione contro la ſuperficie sferica fa tre volte il peſo dell' acqua premente.

XVIII.

Dal n.° VIII. ſi raccoglie, che *la preſſione contro tutta la premibile ſuperficie del cilindro circoſcritto alla sfera è ſeſquialtera della preſſione contro la ſuperficie della sfera.* E per tal modo quella proporzione ſeſquialtera, che *Archimede* con tanta gloria diſcoprì fra le ſuperficie e le ſolidità del cilindro circoſcritto e della sfera, viene ora qui eſteſa da noi anche alle preſſioni, che ſoffrono le ſuperficie di queſti due corpi o riempiuti d' acqua o immerſi nell' acqua ſino alla loro ſommità.

Delle Formole Generali delle Preſſioni.

Paſſiamo ora a rintracciare le formole generali della preſſione de' fluidi contro un piano qualunque immerſo nel fluido in qualſivoglia poſitura, come pure contro le ſuperficie curve de' corpi, o de' vaſi rotondi generati per rotazione. L' applicazione di queſte formole a qualche eletto eſempio ci guiderà alla cognizione di alcune eleganti proprietà, che chiameremo *idroſtatiche*, delle figure geometriche, che ci ſono più familiari.

PROBLEMA I.

Determinare la preſſione dell' acqua contro un piano qualunque, e comunque ſituato ſotto il fluido premente.

SOLUZIONE.

Sia il piano *ABDF* (*Fig.* 5.) circoſcritto dalla retta orizzontale *BD*, dalla *DF* perpendicolare alla *BD*, dall' altra orizzontale *FA*, e da una linea o retta, o curva *AB*. Per ritrovare l' inclinazione del piano all' orizzonte, tiriſi da *F* la retta orizzontale *FG* perpendicolare alla *FA* ſicchè il piano *AFG* ſia orizzontale. Eſſendo ora alla comune ſezione *AF* dei due piani *BAFD*, *AFG*, perpendicolare la *FG* nel ſecondo piano, e la *FD* nel primo, ſarà l' angolo *GFD* l' inclinazione del piano propoſto all' orizzonte. Suppongaſi, che il livello dell' acqua giunga al punto *N* della retta prodotta *DF*, e guidiſi *NO* parallela alla *FG*: e perchè *AF* è perpendicolare così alla *FD* come alla *FG*, ſarà anche il piano *AFG* perpendicolare al piano *DFG*, ovvero *DNO*, e però il piano DNO ſarà verticale. Se ora dal punto O preſo ad arbitrio nella retta NO caſca al baſſo la verticale OH, ſi troverà queſta nel predetto piano, e taglierà in H la retta DF, in G la FG. Guidate le ordinate infinitamente proſſime HM, hm perpendicolari alla FD, e poſta l' aſciſſa $FH = x$, l' ordinata $HM = y$, $BD = a$, $DF = b$, $FN = c$, l' angolo d' inclinazione $GFD = ONH = \phi$, ſarà $OH = (c + x)\,\text{ſen.}\,\phi$, e l' elemento Hm del piano, moltiplicato per la ſua diſtanza HO dalla ſuperficie ſuperiore dell' acqua, rappreſenterà la preſſione elementare contro lo ſteſſo piano, oſſia la preſſione contro l' elemento Hm, la quale in conſeguenza ſi troverà $= (c + x)ydx\,\text{ſen.}\,\phi = (cydx + yxdx)\,\text{ſen.}\,\phi$. Cercato quindi l' integrale di queſta eſpreſſione per modo che eſſo ſi annulli inſieme colla x, ſi otterrà la preſſione contro il piano indeterminato $AFHM$; e ſoſtituito b in vece di x nel detto integrale, ſi ha l' intera preſſione contro il dato piano $FABD$. Il che era ecc.

Eſempio I. Il piano $AFBD$ ſia un rettangolo, e però $y = a$. La formola $\int (cydx + yxdx)\,\text{ſen.}\,\phi$ diventa $\int (acdx + axdx)\,\text{ſen.}\,\phi = (acx + \frac{1}{2}ax^2)\,\text{ſen.}\,\phi$, dove fatto $x = b$, l' intera preſſione contro il rettangolo diventa $(acb + \frac{1}{2}ab^2)\,\text{ſen.}\,\phi$.

Se l' acqua non oltrepaſſa il lato ſuperiore del rettangolo, cioè ſe $c = 0$, la detta preſſione ſi trasforma in $\frac{1}{2}ab^2\,\text{ſen.}\,\phi$, vale a dire nell' area del rettangolo moltiplicata per la metà dell' altezza dell' acqua ſopra il lato inferiore del rettangolo.

Eſempio II. Sia il piano propoſto un triangolo rettangolo AFD (*Fig.* 6) colla punta rivolta in giù, e col lato ſuperiore orizzontale FA. Sarà dunque $a = 0$, e poſta $FA = f$, naſcerà $y = \frac{f(b - x)}{b}$. Laonde $\int (c + x)ydx\,\text{ſen.}\,\phi$

$$= \int \frac{f(b - x)}{b}(c + x)\,\text{ſen.}\,\phi = \left(fcx + \frac{1}{2}fx^2 - \frac{fcx^2}{2b}\right.$$

$-\frac{fx^3}{3b})\,\text{ſen.}\,\phi$ rappreſenterà la preſſione contro l' area indefinita *AFHM*; e fatta $x=b$, trovaſi la preſſione contro tutto il triangolo $=(\frac{1}{2}fcb+\frac{1}{6}fb^2)\,\text{ſen.}\,\phi$.

Se il triangolo ha la punta rivolta in ſu, e il lato orizzontale all' ingiù, come nella Fig. 7, allora ſi ha $y=\frac{ax}{b}$, e

$$\int(c+x)y\,dx\,\text{ſen.}\,\phi=\int(c+x)\frac{ax}{b}dx\,\text{ſen.}\,\phi$$

$=(\frac{cax^2}{2b}+\frac{ax^3}{3b})\,\text{ſen.}\,\phi=$ alla preſſione contro l'area *FMH*, e quindi poſta $x=b$, riſulta la preſſione contro tutto il triangolo $=(\frac{1}{2}cab+\frac{1}{3}ab^2)\,\text{ſen.}\,\phi$.

Nella prima ſituazione del triangolo, ſupponendo $c=0$, ovvero che il lato del triangolo arrivi al piano di livello, la preſſione ricercata diventa $\frac{1}{6}fb^2\,\text{ſen.}\,\phi$, cioè il prodotto del triangolo moltiplicato per un terzo dell' altezza dell' acqua ſopra la punta inferiore del triangolo.

Nella ſeconda ſituazione, fatto lo ſteſſo ſuppoſto di $c=0$, la preſſione ſi muta in $\frac{1}{3}ab^2\,\text{ſen.}\,\phi$, cioè nell' area del triangolo moltiplicata per due terzi dell' altezza dell' acqua ſopra il lato orizzontale inferiore.

Eſempio III. Cerchiſi la preſſione contro il ſemicircolo *FMD* (*Fig.* 8), il di cui diametro $FD=b$, $a=0$, $y=\sqrt{(bx-x^2)}$, $xdx=\frac{1}{2}bdx-ydy$. Perciò ſi ha $\int(cydx+yxdx)\,\text{ſen.}\,\phi=\int(c+\frac{1}{2}b)\,\text{ſen.}\,\phi\,ydx-\int y^2dy\,\text{ſen.}\,\phi$

$=(c+\frac{1}{2}b).FHM.\,\text{ſen.}\,\phi-\frac{1}{3}y^3\,\text{ſen.}\,\phi$, e la preſſione totale contro il ſemicircolo riſulta $= \left(c + \frac{1}{2} b \right) . FMD . \text{ſen.}\, \phi = \left(c + \frac{1}{2} b \right) \frac{b^2 \pi}{8} \text{ſen.}\, \phi$, poſta $1 : \pi$ la ragione del diametro alla circonferenza ; e il doppio di queſto valore ſomminiſtra la preſſione contro tutto il cerchio *FMDR*.

Eſempio IV. Sia il piano dato un quadrante *GCD*, il di cui ſemidiametro ſuperiore *GC* ſia orizzontale, ed $= b$, $CH' = x$, $H'M' = y$, $a = 0$. Per la natura del cerchio ſi ha $y^2 = b^2 - x^2$, ed $ydy = -xdx$. Dunque $\int (cydx + yxdx)\, \text{ſen.}\, \phi = \int cydx\, \text{ſen.}\, \phi - \int y^2 dy\, \text{ſen.}\, \phi = c\, \text{ſen.}\, \phi . GCH'M' - \frac{1}{3} y^3 \text{ſen.}\, \phi + \text{coſt.} = c . GCH'M' . \text{ſen.}\, \phi + \left(\frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} y^3 \right) \text{ſen.}\, \phi =$ alla preſſione contro l' area indefinita *GCH'M'* ; e però la preſſione contro tutto il quadrante *GCD* ſarà $= c . GCD . \text{ſen.}\, \phi + \frac{1}{3} b^3 \text{ſen.}\, \phi = \left(\frac{c\pi}{4} + \frac{1}{3} b \right) b^2 \text{ſen.}\, \phi$, e queſta raddoppiata dà la preſſione contro il ſemicircolo *GRD*.

Eſempio V. Sia il quadrante *GFC*, che ha il ſemidiametro inferiore orizzontale *GC*; ſe ne dimanda la preſſione. Si ha $CG = CF = b$, $FH = x$, $HM = y$, $y^2 = 2bx - x^2$, $xdx = bdx - ydy$. Adunque $\int (cydx + yxdx)\, \text{ſen.}\, \phi = \int (c + b) ydx\, \text{ſen.}\, \phi - \int y^2 dy\, \text{ſen.}\, \phi = (c + b) . FMH . \text{ſen.}\, \phi - \frac{1}{3} y^3 \text{ſen.}\, \phi =$ alla preſſione contro lo ſpazio indeterminato *FMH*. Laonde la preſſione totale contro il quadrante diventa $\left(\frac{(c + b) \pi}{4} - \frac{1}{3} b \right) b^2 . \text{ſen.}\, \phi$, e il doppio eſprime la preſſione contro il ſemicircolo *GFR* col diametro inferiore orizzontale.

Eſempio VI. Sia lo ſpazio parabolico *FBD* (*Fig.* 9) compreſo dall' ordinata inferiore orizzontale $BD = a$, e dall' aſciſſa $DF = b$. Suppoſto p il parametro della parabola ſi ha $y = \sqrt{px}$. Dunque $\int (cydx + yxdx)\,\text{ſen.}\,\phi = \int cp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx\,\text{ſen.}\,\phi + \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx\,\text{ſen.}\,\phi = (\frac{2}{3} cx \sqrt{px} + \frac{2}{5} x^2 \sqrt{px})\,\text{ſen.}\,\phi = \frac{2}{3} cxy\,\text{ſen.}\,\phi + \frac{2}{5} x^2 y\,\text{ſen.}\,\phi =$ alla preſſione contro lo ſpazio FMH indefinito; e però la preſſione contro tutto lo ſpazio FBD trovaſi $(\frac{2}{3} cba + \frac{2}{5} b^2 a)\,\text{ſen.}\,\phi$, e il doppio rappreſenta la preſſione contro lo ſpazio parabolico BOF colla doppia ordinata inferiore orizzontale BO.

Eſempio VII. Vogliaſi la preſſione contro lo ſpazio parabolico ADF (*Fig.* 10) circoſcritto ſuperiormente dall' ordinata orizzontale $FA = a$, e dall' aſciſſa $FD = b$. Eſſendo $FH = x$, ed $HD = b - x$, l' equazione della parabola trovaſi eſſere $y^2 = p(b - x)$. Adunque $\int (cydx + yxdx)\,\text{ſen.}\,\phi = \int cdx \sqrt{(pb - px)}\,\text{ſen.}\,\phi + \int xdx\,\text{ſen.}\,\phi \sqrt{(pb - px)}$. Pongaſi ora $\sqrt{(pb - px)} = u$, ed è $\int cdx\,\text{ſen.}\,\phi \sqrt{(pb - px)} + \int xdx\,\text{ſen.}\,\phi \sqrt{(pb - px)} = \int - \frac{2cu^2 du\,\text{ſen.}\,\phi}{p}$

$$+ \int - \frac{2bu^2 du\,\text{ſen.}\,\phi}{p} + \int \frac{2u^4 du\,\text{ſen.}\,\phi}{p^2} = - \frac{2cu^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3p}$$

$$- \frac{2bu^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3p} + \frac{2u^5\,\text{ſen.}\,\phi}{5p^2} + \text{coſt.} = \frac{2(pb - px)^2\,\text{ſen.}\,\phi \sqrt{(pb - px)}}{5p^2}$$

$$- \frac{2(c + b)(pb - px)\,\text{ſen.}\,\phi \sqrt{(pb - px)}}{3p} + \text{coſt.}$$

$$= \frac{2}{3} b(c + b)\,\text{ſen.}\,\phi \sqrt{pb} - \frac{2}{5} b^2\,\text{ſen.}\,\phi \sqrt{pb}$$

$$+ \frac{2(pb - px)^2\,\text{ſen.}\,\phi \sqrt{(pb - px)}}{5p^2}$$

$-\frac{2(c+b)(pb-px)\,\text{ſen.}\,\phi\sqrt{(pb-px)}}{3p}$, perchè ſvaniſce la preſſione annullandoſi la x. Queſto valore eſprime la preſſione contro lo ſpazio indeſinito $FAMH$, e ſoſtituendo in eſſo b per x riſulta la preſſione totale contro lo ſpazio parabolico $FAD = \frac{(10bc+4b^2)\,\text{ſen.}\,\phi\sqrt{pb}}{15}$, e dal doppio di queſto valore ſi ha la preſſione contro lo ſpazio $FADQ$.

Eſempio VIII. Cerchiſi la preſſione contro la ſemielliſſe FBD (*Fig.* 11.) ſituata coll' aſſe minore BQ orizzontale. Chiamato a l' aſſe maggiore FD, b l' aſſe minore BQ, la proprietà dell' elliſſe ſomminiſtra l' equazione $a^2y^2 = b^2(ax-x^2)$, e quindi $xdx = \frac{1}{2}adx - \frac{a^2ydy}{b^2}$. Laonde ſarà la preſſione contro lo ſpazio indeſinito $FMH = \int(cydx+yxdx)\,\text{ſen.}\,\phi = \int\left(c+\frac{1}{2}a\right)ydx\,\text{ſen.}\,\phi - \int\frac{a^2y^2dy\,\text{ſen.}\,\phi}{b^2} = \left(c+\frac{1}{2}a\right).FMH.\,\text{ſen.}\,\phi - \frac{a^2y^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3b^2}$, e quindi la preſſione totale contro la ſemielliſſe $= \left(c+\frac{1}{2}a\right).\ FDB.\,\text{ſen.}\,\phi = \frac{1}{8}\left(c+\frac{1}{2}a\right)\pi ab\,\text{ſen.}\,\phi$, il di cui doppio eſprime la preſſione contro tutta l' elliſſe in queſta ſituazione, cioè coll' aſſe minore orizzontale.

Eſempio IX. Sia da trovarſi la preſſione contro il quadrante ellittico BDO, ſituato col diametro minore orizzontale, e rivolto all' insù. Chiamiſi $\frac{1}{2}b$ il ſemiaſſe minore BO, $\frac{1}{2}a$ il maggiore OD, x la OH', y la $H'M'$, e ſi avrà $a^2y^2 = b^2\left(\frac{1}{4}a^2-x^2\right)$, $\frac{a^2ydy}{b^2} = -xdx$. Perciò $\int(cydx+yxdx)\,\text{ſen.}\,\phi = c.OBM'H'\,\text{ſen.}\,\phi - \frac{a^2y^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3b^2} + \text{coſt.} = c.OBM'H'.\,\text{ſen.}\,\phi + \frac{1}{24}a^2b\,\text{ſen.}\,\phi - \frac{a^2y^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3b^2} =$ alla preſſione contro l' area indefinita $OBM'H'$. Perlochè la preſſione contro tutto il quadrante BDO ſarà $= c\,.\,BDO.\,\text{ſen.}\,\phi + \frac{1}{24}a^2b\,\text{ſen.}\,\phi = \frac{1}{16}\pi cab\,\text{ſen.}\,\phi + \frac{1}{24}a^2b\,\text{ſen.}\,\phi$, e il doppio di queſto valore darà la preſſione contro la ſemielliſſe BDQ avente l' aſſe minore orizzontale rivolto all' insù.

Eſempio X. Se foſſe da cercarſi la preſſione contro il quadrante ellittico FBO, ſituato col ſemiaſſe minore orizzontale BO rivolto all' ingiù, baſterebbe nell' equazione (*Eſemp.* VIII.) $\left(c + \frac{1}{2}a\right).FMH\,\text{ſen.}\,\phi - \frac{a^2y^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3b^2}$ ſoſtituire $\frac{1}{2}b$ in luogo di y, d' onde naſcerebbe $\frac{1}{16}\left(c + \frac{1}{2}a\right)\pi ab\,\text{ſen.}\,\phi - \frac{1}{24}a^2b\,\text{ſen.}\,\phi =$ alla preſſione contro il quadrante ellittico FBO, e il doppio di queſto valore eſprimerebbe la preſſione contro la ſemielliſſe FBQ coll' aſſe minore orizzontale rivolto in giù.

Eſempio XI. Dimandaſi la preſſione contro la ſemielliſſe FBD (*Fig.* 12) ſituata col ſemiaſſe maggiore BO orizzontale, e coll' aſſe minore FD inclinato all' orizzonte. Ritenute le denominazioni di prima, trovaſi per la natura dell' elliſſe $\frac{b^2y^2}{a^2} = bx - x^2$, e però $xdx = -\frac{b^2ydy}{a^2} + \frac{1}{2}bdx$. Dunque $\int(cydx + yxdx)\,\text{ſen.}\,\phi = \left(c + \frac{1}{2}b\right).FMH.\,\text{ſen.}\,\phi - \frac{b^2y^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3a^2}$ $=$ alla preſſione contro lo ſpazio indefinito FMH, e in conſeguenza la preſſione totale contro la ſemielliſſe riſulta $= \frac{1}{8}\left(c + \frac{1}{2}b\right)\pi ab\,\text{ſen.}\,\phi$, il qual valore duplicato dà la preſſione contro tutta l' elliſſe $BFQD$ ſituata coll' aſſe maggiore orizzontale e col minore inclinato all' orizzonte.

Eſempio XII. Se vuolſi la preſſione contro il quadrante ellittico BDO col ſemiaſſe maggiore orizzontale rivolto all' insù; poſta $OH = x$, $H'M' = y$, ſi ha l' equazione $\frac{b^2y^2}{a^2} = \frac{1}{4}b^2 - x^2$, e quindi $xdx = -\frac{b^2ydy}{a^2}$, e conſeguentemente

$\int(cydx + yxdx)$ ſen. $\phi = c\,.\,OBM'H'$. ſen. $\phi - \frac{b^2y^3\ \text{ſen.}\ \phi}{3a^2} +$ coſt. $= c\,.\,OBM'H'$. ſen. $\phi + \frac{1}{24}b^2a$ ſen. $\phi - \frac{b^2y^3\ \text{ſen.}\ \phi}{3a^2} =$ alla preſſione contro lo ſpazio indefinito $OBM'H'$; e però la preſſione totale contro il quadrante BDO ſarà $= \frac{1}{16}\pi cab$ ſen. $\phi + \frac{1}{24}b^2a$ ſen. ϕ, il qual valore duplicato rappreſenta la preſſione contro la ſemielliſſe BDQ ſituata coll' aſſe maggiore orizzontale rivolto all' insù.

Eſempio XIII. Se trattaſi di trovare la preſſione contro il quadrante ellittico FBO ſituato col ſemiaſſe maggiore orizzontale BO rivolto al baſſo, allora baſta nell' equazione (*Eſemp.* XI.) $\left(c + \frac{1}{2}b\right).FMH.$ ſen. $\phi - \frac{b^2y^3\ \text{ſen.}\ \phi}{3a^2}$, la quale rappreſenta la preſſione contro lo ſpazio indefinito FMH, ſoſtituire il quadrante FBO in vece di FMH, ed $\frac{1}{2}a$ in luogo di y, ed haſſi $\left(c + \frac{1}{2}b\right).FBO.$ ſen. $\phi - \frac{1}{24}b^2a$ ſen. $\phi =$ $\frac{1}{16}\left(c + \frac{1}{2}b\right)\pi ab$ ſen. $\phi - \frac{1}{24}ab^2$ ſen. $\phi =$ alla preſſione contro il quadrante ellittico FBO; e il doppio di queſto valore rappreſenta la preſſione contro la ſemielliſſe FBQ ſituata coll' aſſe maggiore orizzontale rivolto all' ingiù.

Eſempio XIV. Sia da trovarſi la preſſione contro lo ſpazio Iperbolico FBD (*Fig.* 13) circoſcritto dall' ordinata orizzontale inferiormente $BD = b$, e dall' aſciſſa $FD = k$ inclinata all' orizzonte. Nominando a l' aſſe principale dell' Iperbola, b il conjugato, ſi ſa, l' equazione di queſta curva eſſere $\frac{a^2y^2}{b^2} = ax + x^2$, e quindi $xdx = \frac{a^2ydy}{b^2} - \frac{1}{2}adx$. Perciò $\int(cydx + yxdx)$ ſen. $\phi = \left(c - \frac{1}{2}a\right).FMH.$ ſen. $\phi + \frac{a^2y^3\ \text{ſen.}\ \phi}{3b^2} =$ alla preſſione contro lo ſpazio indefinito FMH. Laonde la preſſione totale contro lo ſpazio propoſto *FBD* ſarà $=$ $\left(c-\frac{1}{2}a\right).FBD.\text{ſen.}\,\phi+\frac{a^2h^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3b^2}$, e il doppio rappreſenterà la preſſione contro il doppio ſpazio *FBC*.

Eſempio XV. Sia finalmente da determinarſi la preſſione contro lo ſpazio iperbolico inverſo *FBD* (*Fig.* 14) compreſo ſuperiormente dall' ordinata orizzontale $FB=h$, e dall' aſciſſa $FD=k$. Poſta pertanto $FH=x$, $HM=y$, la proprietà dell' iperbola ſomminiſtra l' equazione $\frac{a^2y^2}{b^2}=a(k-x)+(k-x)^2=ak+k^2-ax-2kx+x^2$, dalla quale ſi ottiene $xdx=\frac{a^2ydy}{b^2}+\left(\frac{1}{2}a+k\right)dx$. Adunque

$$\int(cydx+yxdx)\,\text{ſen.}\,\phi=\left(c+\frac{1}{2}a+k\right).FBMH.\text{ſen.}\,\phi$$
$$+\frac{a^2y^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3b^2}+\text{coſt.}=\left(c+\frac{1}{2}a+k\right).FBMH.\text{ſen.}\,\phi$$
$$-\frac{a^2h^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3b^2}+\frac{a^2y^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3b^2}=$$ alla preſſione contro lo ſpazio indefinito *FBMH*. Perlochè la preſſione totale contro il dato ſpazio *FBD* trovaſi $=\left(c+\frac{1}{2}a+k\right).FBD.\text{ſen.}\,\phi$ $-\frac{a^2h^3\,\text{ſen.}\,\phi}{3b^2}$, il doppio di cui eſprime la preſſione contro il doppio ſpazio *BCD* ſituato colla doppia ordinata orizzontale rivolta all' insù.

PROBLEMA II.

Nel vaſo DAHGFEBC (Fig. 15), *che ha per baſe orizzontale il rettangolo* ADCB, *e per uno de' ſuoi lati ha il rettangolo* DAHG *comunque inclinato all' orizzonte, arriva l' acqua ſino ad* HF; *e in un altro vaſo* DAHGQPRS *ſituato ſulla predetta baſe prolungata ed avente lo ſteſſo lato* DAHG *giugne l' acqua ſino al punto* O: *cercaſi qual ſarà la preſſione, che ſoffre quel lato ſecondo una ſola e medeſima direzione.*

SOLUZIONE.

Tiriſi per O la verticale MON; e ſarà (*Eſemp. I.*) la preſſione eſercitata dall' acqua del primo vaſo X contro il lato rettangolare $DAHG = DA \,.\, AH \,.\, \frac{1}{2} MN$, e la preſſione eſercitata dall' acqua del ſecondo vaſo Z contro il lato rettangolare $OTDA$ ſarà $= DA \,.\, AO \,.\, \frac{1}{2} MO$, ed eſercitandoſi queſta ſeconda preſſione in una direzione oppoſta alla prima ſi avrà in conſeguenza la preſſione contro tutto il lato $DAHG$ verſo una ſola e medeſima direzione $= DA \,.\, AH \,.\, \frac{1}{2} MN - DA \,.\, AO \,.\, \frac{1}{2} MO$, ovvero (eſſendo $NM : MO :: HA : AO$) $= \frac{1}{2} MN \,.\, DA \,.\, AH$

$$- \frac{1}{2} \frac{DA \,.\, HA \,.\, MO^2}{MN} = \frac{DA \,.\, AH}{2MN} (MN^2 - MO^2).$$ Il che era ecc.

La ſuddetta preſſione ſeguita adunque la ragione della differenza dei quadrati di MN e di MO, cioè delle altezze dell' acqua ne' due vaſi.

PROBLEMA III.

Sopra il piano inclinato NMPO (Fig. 16.) *giace il vaſo priſmatico retto pieno d' acqua* GADHFECB, *del quale le due faccie oppoſte* GADH, BFEC *ſono due trapezj paralleli, ſimili ed uguali, i di cui lati* BF, CE, AG, DH, *in queſta giacitura del priſma vengono a riuſcire verticali, e co' loro eſtremi* G, H, F, E, *giungono allo ſteſſo piano orizzontale; cercaſi la preſſione contro le due faccie rettangole verticali* BAGF, DHEC, *e quindi lo ſforzo, col quale il priſma tenderà a diſcendere pel piano inclinato.*

SOLUZIONE.

La preſſione contro il rettangolo $GABF$ ſi è trovata *(Eſemp. I.)* $= \frac{1}{2} AB \cdot BF^2$, e quella contro il rettangolo $DCEH$ $= \frac{1}{2} DC \cdot CE^2 = \frac{1}{2} AB \cdot CE^2$; e queſte preſſioni eſercitandoſi in direzioni oppoſte, riſulta la preſſione, colla quale il priſma viene orizzontalmente ſpinto alla diſceſa $= \frac{1}{2} AB(BF^2 - CE^2)$. Il che era ecc.

Pongaſi $AB = a$, $BF = b$, l' angolo d' inclinazione MPQ $= \omega$, e tirata l' orizzontale $CR = FE = f$, ſarà l' angolo $BCR = \omega$, $BR = f.\,\text{tang.}\,\omega = BF - FR = BF - CE$, cioè $CE = b - f.\,\text{tang.}\,\omega$. Sarà dunque il trapezio $BFEC =$ $\frac{1}{2} FE(BF + CE) = \frac{1}{2} f(2b - f.\,\text{tang.}\,\omega)$, e quindi il volume del priſma $= \frac{1}{2} af(2b - f.\,\text{tang.}\,\omega)$. Dicaſi Q il peſo di queſto priſma pieno d' acqua; e poichè abbiamo la preſſione orizzontale, tendente a far diſcendere il priſma $=$ $\frac{1}{2} a\left(b^2 - (b - f.\,\text{tang.}\,\omega)^2\right) = \frac{1}{2} af.\,\text{tang.}\,\omega\left(2b - f.\,\text{tang.}\,\omega\right)$, ſarà perciò una tal preſſione $= Q.\,\text{tang.}\,\omega$.

Chiamato q il peſo del vaſo priſmatico vuoto, è noto dalla Statica, che un peſo $Q + q$ ſituato ſovra il detto piano inclinato viene tenuto in equilibrio ſul piano ſteſſo da una forza orizzontale $= (Q + q)$ tang. ω. Ma per tenere in equilibrio il detto priſma pieno d' acqua, non baſta una forza orizzontale, la quale ſoſtenga ſul piano inclinato il peſo $Q + q$ di quel priſma, richiedendoſi inoltre un' altra forza per equilibrare la preſſione orizzontale $Q.\,\text{tang.}\,\omega$. Conſeguentemente il priſma viene ſoſtenuto ſul piano inclinato da una forza orizzontale $= (2Q + q)$ tang. ω.

SCOLIO.

Avvertaſi qui, che non ſi è voluto tener conto di quella preſſione orizzontale, che riſulta dalla preſſione contro la baſe *ADCB*, la qual preſſione orizzontale riſcontraſi eguale e contraria alla già ritrovata, ſiccome appunto dee ſuccedere, eſſendo noto, che le preſſioni orizzontali ſi annullano ſempre in tutti i vaſi, o corpi eſpoſti alla preſſione dell' acqua. Rappreſenti in fatti il trapezio *BFEC* la ſezione verticale fatta con un piano verticale e perpendicolare alle due faccie *GB*, *HC*; e la preſſione contro la baſe *BC* del trapezio eſpreſſa dalla normale *TX* ſi riſolva nella verticale *TY*, e nella orizzontale *XY*, e ſtarà $TX : XY :: BC : BR$, e però $XY = \frac{TX . BR}{BC}$.

Siccome poi la preſſione $TX = BC . \frac{1}{2}(BF + CE)$, ſarà $XY = \frac{1}{2}(BF + CE) . BR = \frac{1}{2}(BF + CE) . (BF - CE) = \frac{1}{2} BF^2 - \frac{1}{2} CE^2$, e queſta moltiplicata per *AB* dà la preſſione orizzontale riſultante dalla preſſione contro la baſe *ADCB*, che ſi trova appunto uguale, e contraria alla precedente. E' un errore di non pochi acclamati Scrittori quello di credere, che l' acqua a motivo delle preſſioni, con cui ſpinge ed incalza ſecondo tutte le direzioni le pareti de' vaſi, che la contengono, poſſa produrre ne' vaſi d' una data forma ſituati ſulle loro baſi orizzontali un roveſciamento, o capitombolo, laddove all' oppoſto la ſteſſa acqua ghiacciata laſcia il vaſo ritto ed immobile ſulla ſua baſe; per modo che ſia una differenza eſſenziale in ordine alla ſua ſtabilità, che il vaſo ſi trovi pieno di acqua fluida, oppure d' acqua ghiacciata. Per togliere un tal pregiudizio, e moſtrare, che i due ſtati oppoſti dell' acqua, cioè di fluidità, e di ſolidità non poſſono cagionare la menoma alterazione o divario nello ſtato del vaſo in riguardo al reggerſi ſulla ſua baſe, o al roveſciarſi, baſterà far vedere che la *riſultante* di tutte le preſſioni eſercitate dall' acqua fluida contro tutte le pareti del vaſo perfettamente coincide colla *linea di direzione*, ſecondo la quale agiſce tutto il peſo dell'acqua o del ghiaccio. Sia a cagion d' eſempio il triangolo verticale BAC (*Fig.* 25) colla baſe orizzontale BC, e ſuppongaſi la ſua aja formata d'uno ſtrato di acqua premente contro i lati del triangolo. Tiriſi dalla punta A del triangolo ſulla baſe orizzontale prolungata BC la perpendicolare AM. E' noto, che la baſe BC ſoffre una preſſione $= BC \cdot AM$, che queſta preſſione paſſa pel punto di mezzo N della baſe, e può rappreſentarſi colla retta verticale QN. Parimente il lato AB riſente una preſſione $= \frac{1}{2} AB \cdot MA$, la quale paſſa pel *centro di preſſione* S, che è ai due terzi di AB contando da A, come ſi deduce dalla Teoria del centro di preſſione che eſporremo più ſotto, e può rappreſentarſi colla retta IS normale ad AB. Riſoluta poſcia la preſſione IS nella orizzontale IO, e nella verticale OS tendente all' insù, trovaſi $OS = \frac{BM \cdot IS}{BA} = \frac{1}{2} BM \cdot MA$. Così pure ſe la preſſione contro il lato AC, la quale è $= \frac{1}{2} AC \cdot AM$, ſi concepiſce applicata al centro di preſſione in F ai due terzi di AC contando da A, e ſi eſprime colla retta FR perpendicolare ad AC, e ſi riſolve nell' orizzontale RP, e nella verticale FP tendente all' ingiù, ſe ne deduce toſto $FP = \frac{CM \cdot FR}{AC} = \frac{1}{2} CM \cdot MA$. Abbiamo dunque tre forze verticali, che agiſcono contro i lati del triangolo, cioè

$$1.^{\circ} + QN = BC \cdot MA,$$

$$2.^{\circ} - OS = -\frac{1}{2} BM \cdot MA,$$

$$3.^{\circ} + FP = \frac{1}{2} CM \cdot MA.$$

La diſtanza della prima dal punto M è $= MC + \frac{1}{2} CB$; la diſtanza della ſeconda è $= \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3} CM + \frac{2}{3} CB$; quella della terza e $= \frac{2}{3} CM$. Dunque per la dottrina Statica de' Momenti la diſtanza della *riſultante* di queſte tre forze dallo ſteſſo punto M ſarà

$$= \frac{QN(MC + \frac{1}{2} CB) + FP \cdot \frac{2}{3} CM - OS(\frac{2}{3} MC + \frac{2}{3} CB)}{QN + FP - OS}$$

$$= \frac{BC \cdot MA(MC + \frac{1}{2} CB) + \frac{1}{2} CM \cdot MA \cdot \frac{2}{3} CM - \frac{1}{2} BM \cdot MA(\frac{2}{3} MC + \frac{2}{3} CB)}{BC \cdot MA + \frac{1}{2} CM \cdot MA - \frac{1}{2} BM \cdot MA}$$

$$= \frac{BC(MC + \frac{1}{2} CB) + \frac{1}{3} CM^2 - \frac{1}{2}(BC + CM)(\frac{2}{3} CM + \frac{2}{3} CB)}{\frac{1}{2} BC}$$

$= \frac{2}{3} MC + \frac{1}{3} BC$. Ora queſta diſtanza è appunto quella della linea di *direzione* EG dal detto punto M; poichè venendo eſſa condotta verticalmente dal centro di gravità E del triangolo poſto ai due terzi della AN che biparte la baſe, viene ad eſſere, a motivo di $AE = \frac{2}{3} AN$, $GM = \frac{2}{3} NM = \frac{2}{3} MC + \frac{2}{3} CN = \frac{2}{3} MC + \frac{1}{3} CB$. Dunque la *riſultante* di tutte le preſſioni contro il perimetro del triangolo coincide colla *linea di direzione*.

PROBLEMA IV.

Determinare la preſſione dell' acqua contro le pareti curve de' vaſi rotondi, oſſia di rotazione.

SOLUZIONE.

Rotiſi la linea AMP (*Fig.* 17.) intorno all' aſſe verticale BD, e deſcriva un vaſo rotondo, il quale riempiaſi d' acqua. Si cerca la preſſione ſopra la ſuperficie curva del vaſo. Condotte le ordinate ortogonali infinitamente vicine MN, mn, e fatta $PD = a$, $AB = b$, $BD = c$, $BF = x$, MF

$= y$, $AM = s$, ed $1 : \pi =$ al rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, ſarà $2\pi y =$ alla circonferenza del cerchio, che ha MF per raggio; e però l'elemento della ſuperficie curva del vaſo ſarà $= 2\pi y \,.\, Mm = 2\pi y ds$, e la preſſione contro queſto elemento ſarà $= 2\pi y x ds = 2\pi y x \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Quindi integrata queſta preſſione elementare per modo che l' integrale ſi annulli colla x, ſi ottiene la preſſione contro la ſuperficie indefinita $AMNC$; e poſto poi c per x nell' integrale ſi ha la preſſione contro tutta la ſuperficie curva. Il che era ecc.

Eſempio I. Vuolſi conoſcere la preſſione contro la ſuperficie curva del cono retto troncato. In tal ſuppoſto egli è viſibile, che la linea AMP è $= \sqrt{(c^2 + (b - a)^2)}$, cui diremo h. E' altresì manifeſto, che ſi ha $s : h :: x : c$, e perciò $s = \frac{hx}{c}$, e $ds = \frac{hdx}{c}$. Inoltre egli è viſibile, che ſta $b - y : x :: b - a : c$; laonde $y = b - \frac{(b-a)x}{c}$. Dunque

$$\int 2\pi yxds = \int \left(2bx - \frac{2(b-a)x^2}{c} \right) \frac{\pi hdx}{c} =$$

$\frac{\pi h}{c}\left(bx^2 - \frac{2(b-a)x^3}{3c} \right) =$ alla preſſione contro la ſuperficie curva indefinita $AMNC$. Poſto c in luogo di x ſi ricava $2\pi hc\left(\frac{1}{6}b + \frac{1}{3}a \right) =$ alla preſſione contro la ſuperficie curva intera del cono troncato.

Il valore di queſta preſſione aſſegnato da alcuni celebri Idroſtatici è paleſemente erroneo, e l'errore è nato per aver eſſi ſuppoſto, che due lati del cono troncato infinitamente vicini rinchiudeſſero fra di sè ſulla ſuperficie del cono un rettangolo, laddove eſſi comprendono un trapezio di baſi parallele.

Eſempio II. Si cerca la preſſione contro la ſuperficie curva $BMILN$ (*Fig.* 18) del ſegmento sferico generato dalla rotazione dell' arco circolare BMI intorno al diametro verticale BD. Eſſendo $BF = x$, $MF = y$, e il raggio del circolo $=r$, ſi ha $y=\sqrt{(2rx-x^2)}$, e $dy=\frac{(r-x)dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$; e quindi $dx^2+dy^2=ds^2=\frac{r^2dx^2}{y^2}$, ovvero $ds=\frac{rdx}{y}$; e queſt' ultimo valore ſurrogato nella formola $\int 2\pi yxds$, ella ſi traſforma in $\int 2\pi rxdx=\pi rx^2=$ alla preſſione contro la ſuperficie indefinita *BMN*. Siccome poi è $\pi rx^2=2\pi rx.\frac{1}{2}x$, cioè $=$ alla ſuperficie del ſegmento moltiplicata per la metà della ſaetta, o dell' altezza dell' acqua ſopra *MN*, perciò un tal prodotto rappreſenta la preſſione ſuddetta.

Eſempio III. Se la ſuperficie del ſegmento sferico foſſe *PDS* colla baſe orizzontale rivolta all' insù; allora poſta $RU=x$, $UM'=y$, $RD=h$, e però $DU=h-x$, l'equazione del circolo dà $y=\sqrt{(2r(h-x)-(h-x)^2)}$, e quindi $dy=\frac{-rdx+(h-x)dx}{\sqrt{(2r(h-x)-(h-x)^2)}}$, $dy^2+dx^2=\frac{r^2dx^2}{y^2}$, $\sqrt{(dy^2+dx^2)}=ds=\frac{rdx}{y}$. Dunque $\int 2\pi yxds=\int 2\pi rxdx$ $=\pi rx^2$, vale a dire la preſſione contro la ſuperficie indefinita *PM'N'S* equivale al prodotto della ſuperficie iſteſſa moltiplicata per la metà della ſua ſaetta, o aſciſſa *RU*, ovvero per la metà dell' altezza dell' acqua ſopra *M'N'*.

Laonde la ſuperficie curva d' un ſegmento sferico pieno d' acqua, o ſia eſſo a foggia di cupola, o ſia rinchiuſo fra due cerchj paralleli ſoffre una preſſione, che ha per miſura la ſteſſa ſuperficie moltiplicata per la metà della ſaetta. Oſſervisi qui, che ſempre nel mezzo della ſaetta trovaſi il centro di gravità della ſuperficie curva del ſegmento.

La formola $\int 2\pi yxds$ dà la preſſione contro la ſuperficie curva del vaſo ſoltanto nell' ipoteſi, che l' acqua non oltrepaſſi l'orlo ſuperiore del vaſo, ed abbia x per altezza ſopra l' elemento della ſuperficie: che ſe l' acqua giugneſſe più ſu della ſuperficie del vaſo per modo che l'altezza di quella ſopra l' orlo di queſto foſſe $=h$, è chiaro, che in tal caſo la formola della preſſione diverrebbe $\int 2\pi y\left(h+x\right)ds$, la quale ſi tratta con ugual facilità che la prima.

PROBLEMA V.

Nell' argine, o riparo rettangolare OPMN *d' un fiume* (Fig. 16.) *giugne l' acqua da* OP *ſino ad* IK; *cercaſi lo ſforzo, con cui l' argine ſarà ſpinto dall' acqua orizzontalmente, e quello, con cui ſarà ſpinto dalla medeſima all' ingiù verticalmente.*

SOLUZIONE.

Chiamato ω l' angolo d' inclinazione MPQ dell' argine, $PK=a$, $KI=PO=b$, e la verticale $KU=h$, riſulta la preſſione contro l'argine (*Probl. I. Eſemp. I*) $=\frac{1}{2}abh=\frac{bh^2}{2\,\text{ſen.}\,\omega}$. Ma queſta preſſione ſi eſercita in una direzione KS perpendicolare al piano dell'argine; perciò ſe ne faccia la riſoluzione nelle due preſſioni laterali KL, KZ, quella orizzontale, queſta verticale. Ora è noto dalla Statica, che ſta $KS:KL:LS$ $::1:\text{ſen}\,\omega:\text{coſ.}\,\omega::$ Preſs. perpend.: Preſs. orizz.: Preſs. vertic. Dunque Preſs. orizz. $=\frac{bh^2}{2\,\text{ſen.}\,\omega}\,\text{ſen.}\,\omega=\frac{1}{2}bh^2$; Preſs. vertic. $=\frac{bh^2}{2\,\text{ſen.}\,\omega}\,\text{coſ.}\,\omega=\frac{1}{2}bh^2\,\text{cot.}\,\omega$. Il che era ecc.

PROBLEMA VI.

Una cataratta, oſſia una tavola rettangolare verticale chiude in un canale, o ciſterna all' acqua l' uſcita: cercaſi quanta forza ſia d' uopo per alzarla, e dar l' eſito all' acqua.

SOLUZIONE.

Detta b la baſe della cataratta, a l' altezza, c la diſtanza del ſuo lato ſuperiore dal pian di livello, che ſi ſuppone più alto, ſi ſa per le coſe già dimoſtrate, che la preſſione contro la cataratta è $=ab(\frac{1}{2}a+c)$. Con ſiffatta preſſione è dunque direttamente ſpinta la cataratta contro gl' incaſtri. Laonde ſuppoſto l' attrito una parte $n.^{esima}$ della preſſione, riſulterà l' attrito della cataratta cogl' incaſtri $=\frac{1}{2n}\,ab\,(a+2c)$, ed aggiunto a queſto il peſo p della cataratta, ci vorrà una forza $=\frac{ab(a+2c)+2np}{2n}$ per far equilibrio colla reſiſtenza della cataratta, e un pò maggiore per ſollevarla. Il che era ecc.

Reca meraviglia il vedere preſſo alcuni celebri moderni Scrittori di Meccanica, che per calcolare la forza neceſſaria a ſollevare la cataratta non ſolamente ſi mette in conto la reſiſtenza dello ſfregamento contro gl' incaſtri, ed il peſo della cataratta, ma ben anche la preſſione totale eſercitata dall' acqua contro il piano della cataratta, e ſi ſtabiliſce in conſeguenza, dover eſſere la detta forza un pò maggiore della ſomma di queſte tre. Ma eſſendo la preſſione dell' acqua contro la cataratta perpendicolare alla medeſima, ed anche alla direzione della forza, che tende a ſollevarla, è coſa innegabile, che l' una non può nè punto nè poco impedire l' effetto dell' altra e non può quindi la preſſione entrare nel calcolo ſe non per quella parte che coſtituiſce lo ſfregamento.

Se il lato ſuperiore della cataratta giugne al pian di livello, ovvero è $c=o$, egli è evidente, che a miſura che la cataratta ſi va inalzando una minor parte di eſſa reſta eſpoſta alla preſſione dell' acqua. Suppongaſi inalzata di tanto, che la diſtanza del ſuo lato inferiore dal pian di livello ſia $=x$, e però la preſſione in tal caſo diventi $=\frac{1}{2}bx^2$, e l' attrito $=\frac{bx^2}{2n}$. La forza motrice, colla quale la cataratta tende a diſcendere, qualora venga abbandonata, trovaſi $=p-\frac{bx^2}{2n}$, e l'acceleratrice $=1-\frac{bx^2}{2np}$. Perciò chiamato t il tempo, in cui la cataratta diſcende per l'altezza x, v la ſua velocità nel termine del tempo t, ſi avrà $\left(1-\frac{bx^2}{2np}\right)dt=dv$, cioè, eſſendo $dt=\frac{dx}{v}$, ſi otterrà $\left(1-\frac{bx^2}{2np}\right)dx=vdv$, ed integrando $x-\frac{bx^3}{6np}=\frac{1}{2}v^2$, $v=\sqrt{\left(2x-\frac{bx^3}{3np}\right)}$, e quindi $dt=\frac{dx}{\sqrt{\left(2x-\frac{bx^3}{3np}\right)}}$, $t=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(2x-\frac{bx^3}{3np}\right)}}$. Ma ſe $p<\frac{bx^2}{2n}$, allora la cataratta non diſcende, e fa d'uopo d'una forza capace di vincer l'attrito per farla diſcendere. Sia queſta forza il peſo q, ed avremo $q+p-\frac{bx^2}{2n}=$ alla forza motrice della diſceſa, e però $1-\frac{bx^2}{2n(p+q)}=$ alla acceleratrice. Laonde $\left(1-\frac{bx^2}{2n(p+q)}\right)dx=vdv$, $x-\frac{bx^3}{6n(p+q)}=\frac{1}{2}v^2$, $v=\sqrt{\left(2x-\frac{bx^3}{3n(p+q)}\right)}$, $t=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(2x-\frac{bx^3}{3n(p+q)}\right)}}$.

Qualora vogliaſi ſollevare la cataratta, dicaſi f la forza impiegata per ſollevarla, e ſia $a-x$ la di lei ſalita nel tempo t colla velocità v. La forza motrice della ſalita ſarà dunque $f-p-\frac{bx^2}{2n}$, e però $\frac{2nf-2np-bx^2}{2n(f+p)}$ ſarà la forza acceleratrice. Conſeguentemente ſi ottiene

$$\frac{(2nf-2np-bx^2)\,dx}{2nf+2np}=vdv,$$ e quindi

(2nf—

$\frac{(2nf - 2np)x - \frac{1}{3}bx^3}{2nf + 2np} = \frac{1}{2}v^2 +$ coſt., ed eſſendo $v = 0$. quando $x = a$, ſi ha $v^2 = \frac{(2nf - 2np)(x - a) + \frac{1}{3}b(a^3 - x^3)}{n(f+p)}$, cioè

$v = \sqrt{\frac{(2nf - 2np)(x - a) + \frac{1}{3}b(a^3 - x^3)}{n(f+p)}}$; e finalmente

$$t = \int \frac{dx\sqrt{(n(f+p))}}{\sqrt{((2nf - 2np)(x - a) + \frac{1}{3}b(a^3 - x^3))}}.$$

Del Centro di Preſſione.

Una coſa degna di conſiderazione nella Dottrina della preſſione dei Fluidi è quella, che riguarda il *Centro di Preſſione*. Diceſi pertanto Centro di preſſione quel punto della ſuperficie premuta, nel quale ſi concepiſce concentrata e raccolta l'intera preſſione, che è diſtribuita e diſperſa per tutti i punti della ſuperficie; ovvero quel punto, al quale applicata una forza uguale e contraria all'intera preſſione bilancia e diſtrugge tutto l'effetto di queſta, per modo che ſe la preſſione tende ad imprimere alla ſuperficie un moto qualunque, la forza uguale e contraria applicata al centro della preſſione impediſce e diſtrugge un tal moto.

PROBLEMA VII.

Ritrovare il Centro di preſſione di qualunque ſuperficie piana BAFG (Fig. 19) *diviſa in due parti uguali e ſimili dalla linea delle aſciſſe* MI, *ed immerſa dentro un fluido omogeneo a qualunque profondità, e ſotto qualunque inclinazione al pian di livello, purchè le ordinate* AM, CE, ecc. *ſiano parallele al detto piano.*

SOLUZIONE.

La comune ſezione del pian di livello, e del piano propoſto *GFAB* prodotto ſia la retta *OQ*, e condotte le due doppie ordinate infinitamente proſſime CD, cd, lo ſpazietto $CDdc$ ſarà l'elemento dell' area indefinita $ACDB$. Ora queſto elemento ſoffre dal fluido, che vi gravita ſopra, una preſſione equivalente al peſo d'un volume di fluido che naſce dal moltiplicare l' elemento per la ſua diſtanza dal pian di livello, la qual diſtanza è per ipoteſi la ſteſſa per tutti i punti di detto elemento. Si conduca EO normale ad OQ, e dal punto O ſi guidi nel pian di livello la OR normale all' iſteſſa OQ, e finalmente alla OR s' inalzi dal punto E la perpendicolare ER: egli è manifeſto, che ER ſarà la mentovata diſtanza, ed EOR l' angolo d' inclinazione del dato piano all' orizzonte; e conſeguentemente l' elemento $CDdc$ moltiplicato per ER rappreſenta la preſſione elementare contro il piano indefinito $CABD$. Conſiderata pertanto queſta preſſione elementare a guiſa d' un peſo, il quale ſi riferiſce alla retta OQ come all' *aſſe de' momenti*, riſulta per le dottrine della Statica il momento della preſſione elementare con moltiplicare queſta per la diſtanza EO dall' aſſe de' momenti. Preſa dunque ſulla linea delle aſciſſe la $ME = x$, l' ordinata $EC = y$, $MN = a$, l' angolo delle coordinate ovvero $ENO = \phi$, l' inclinazione del piano all' orizzonte, oſſia l' angolo $EOR = \omega$, ſi ottiene $EO = (a + x)\,\text{ſen.}\,\phi$, $ER = (a + x)\,\text{ſen.}\,\phi\,\text{ſen.}\,\omega$, $CDdc = 2ydx.\,\text{ſen.}\,\phi$. Laonde il momento della preſſione elementare trovaſi $= 2ydx\,(a + x)^2\,\text{ſen.}\,\omega\,\text{ſen.}^3\,\phi$; e quindi la ſomma de' momenti delle preſſioni nell' area indefinita $ABDC$ ſarà $= \int 2ydx\,(a + x)^2\,\text{ſen.}\,\omega\,\text{ſen.}^3\,\phi$. Una tal ſomma per le dottrine della Statica debb' eſſere uguale al momento, che ha tutta la preſſione eſercitata contro l' area medeſima $ABCD$, qualora eſſa preſſione ſi concepiſca concentrata e raccolta nel centro di preſſione, e riferita all' iſteſſo aſſe OQ. Perciò eſſendo tutta la preſſione contra l' area indefinita $=$

$\int 2ydx\,(a + x)\,\text{ſen.}\,\omega\,\text{ſen.}^2\,\phi$, ſe ſi chiama Δ la diſtanza del centro di preſſione dall' aſſe de' momenti ſi avrà l' ugualtà

$$\int 2ydx\,(a + x)\,\text{ſen.}\,\omega\,\text{ſen.}^3\,\phi = \Delta \int 2ydx\,(a + x)\,\text{ſen.}\,\omega\,\text{ſen.}^2\,\phi,$$

e conſeguentemente $\Delta = \frac{\int y dx (a + x)^2 \text{ſen.}\, \phi}{\int y dx (a + x)}$. Ritrovata per tal modo la diſtanza del centro di preſſione dall' aſſe de' momenti, ed eſſendo altronde evidente, che non può il detto centro uſcire dalla linea delle aſciſſe *MI*, la quale divide per ipoteſi il dato piano in due parti ſimili, ed uguali, reſterà in conſeguenza determinata la poſizione del centro di preſſione. Il che era ecc.

Suppoſte le ordinate ortogonali, cioè $\phi = 90°$, ed oltracciò $a = 0$, il valore di Δ ſi trasforma in queſt' altro più ſemplice $\frac{\int y x^2 dx}{\int y x dx}$.

Eſempio I. Cercaſi il centro di preſſione nel parallelogrammo *ABGF* (*Fig.* 20.) nell' ipoteſi, che il ſuo lato ſuperiore *AB* ſia nel pian di livello. Dicaſi $ME = x$, $CE = AM = y = b$, $MI = c$. Si avrà per l' area indefinita *ACDB* il valore di $\Delta = \frac{\int b x^2 dx \text{ ſen.}\, \phi}{\int b x dx} = \frac{\frac{1}{3} b x^3 \text{ ſen.}\, \phi}{\frac{1}{2} b x^2} = \frac{2}{3} x \text{ ſen.}\, \phi$, e per tutto il parallelogrammo *FABG* ſi avrà $\Delta = \frac{2}{3} c \text{ ſen.}\, \phi$, cioè il centro *P* di preſſione ſi trova a due terzi di *MI* contando da *M*, poſciachè *MP* è $= \frac{2}{3} MI$.

Nel parallelogrammo *QABR*, la di cui baſe paſſa per *P* centro di preſſione del dato, trovaſi del pari il centro di preſſione in *O* a due terzi di *MP*, cioè a quattro noni di *MI*, eſſendo $MO = \frac{2}{3} MP = \frac{2}{3} . \frac{2}{3} MI = \frac{4}{9} MI$. La diſtanza *OP* de' due centri di preſſione *O*, *P* è $= \frac{2}{9} MI$.

Volendoſi poi il centro di preſſione nel parallelogrammo *FQRG*, il di cui lato ſuperiore *QR* paſſa pel centro di preſſione del dato *FABG*, convien ricorrere alla formola $\frac{\int y (a + x)^2 dx \text{ ſen.}\, \phi}{\int y (a + x) dx}$, e porre $a = MP = \frac{2}{3} c$, donde ſi raccoglie $\Delta = \frac{\int b (\frac{2}{3} c + x)^2 dx \text{ ſen.}\, \phi}{\int b (\frac{2}{3} c + x) dx} = \frac{(\frac{4}{9} c^2 x + \frac{2}{3} c x^2 + \frac{1}{3} x^3) \text{ ſen.}\, \phi}{\frac{2}{3} c x + \frac{1}{2} x^2}$

$= \frac{\frac{2}{3}(4c^2 + 6cx + 3x^2)\,\text{ſen.}\,\phi}{4c + 3x}$. E perciò poſto $x = PI = \frac{1}{3}c$, riſulta $\Delta = \frac{\frac{2}{3}\,\text{ſen.}\,\phi\,(4c^2 + 2c^2 + \frac{1}{3}c^2)}{4c + c} = \frac{2}{3} \cdot \frac{19c\,\text{ſen.}\,\phi}{15} = \frac{38}{45}c\,\text{ſen.}\,\phi$; e in conſeguenza il centro U di preſſione del parallelogrammo QG è ſituato ai $\frac{38}{45}$ della retta MI, contando da M. Di qui ſi deduce, che PU è $= \frac{8}{15}PI$.

Stando ſempre a queſt' eſempio, egli è manifeſto, che eſſendo nel parallelogrammo AG il centro di preſſione in P, e però uguali i momenti intorno a P, rimarrà fiſſo ed immobile il parallelogrammo qualora ſia puntellato in P.

Se ſi coſtruirà una cataratta parallelogramma AG avente i lati AB, FG orizzontali, e queſta mobile intorno a due aſſi piantati in Q ed in R, eſtremità della orizzontale QR, la quale paſſa per P ai due terzi MI, la cataratta rimarrà chiuſa tutte le volte, che l' acqua aſcenderà ſino al lato ſuperiore AB; il che è manifeſto dalle coſe precedenti: per lo contrario ella ſi aprirà rotandoſi intorno agli aſſi Q ed R tanto ſe l' acqua non arriverà ſino in AB, quanto ſe oltrepaſſerà AB. Imperciocchè ſe l' acqua reſta al di ſotto di AB, per eſempio in CD, il centro di preſſione del parallelogrammo CG trovaſi ai due terzi di EI, come P è ai due terzi di MI; e però il predetto centro di preſſione caſca al di ſotto di P: onde avviene, che la cataratta per la ſpinta dell' acqua è coſtretta a rotarſi intorno ai due aſſi, la parte inferiore QG volgendoſi dal di dentro al di fuori, e la ſuperiore QB dal di fuori al di dentro per riguardo al luogo occupato dall' acqua. Che ſe l' acqua oltrepaſſa AB, e giugne ſino in K, allora ricorrendo alla formola $\frac{\int y(a + x)^2\,dx\,\text{ſen.}\,\phi}{\int y(a + x)\,dx}$, e poſto $KM = a$, $y = b$, ſi ottiene $\Delta = \frac{\int (a + x)^2\,dx\,\text{ſen.}\,\phi}{\int (a + x)\,dx} = \frac{(a^2 + ax + \frac{1}{3}x^2)\,\text{ſen.}\,\phi}{a + \frac{1}{2}x}$, e fatto $x = c$, ſi ha $\Delta = \frac{(a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2)\,\text{ſen.}\,\phi}{a + \frac{1}{2}c}$. Laonde ſe

O è il centro di preſſione della cataratta AG in queſta ipoteſi, ſarà $KO = \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2}{a + \frac{1}{2}c}$, valore manifeſtamente minore di $a + \frac{2}{3}c$, vale a dire di KP. Dunque il centro di preſſione della cataratta in queſto caſo caſca al di ſopra di P, e conſeguentemente l' urto dell' acqua obbliga la cataratta ad aprirſi, e a volgerſi intorno agli aſſi, movendoſi in fuori la parte ſuperiore QB, e in dentro l' inferiore QG.

Eſempio II. Si vuol ſapere il centro di preſſione nel piano triangolare FMG (*Fig.* 21) ſituato colla baſe orizzontale all' ingiù. Eſſendo in queſto caſo $CE = y = \frac{bx}{c}$, ſi ſoſtituiſce queſto valore nella formola $\frac{\int y\,(a+x)^2\,dx\,\text{ſen.}\,\phi}{\int y\,(a+x)\,dx}$, e ſi ottiene $\Delta = \frac{\int (a+x)^2\,x dx\,\text{ſen.}\,\phi}{\int (a+x)\,x dx} = \frac{(\frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{4}x^2)\,\text{ſen.}\,\phi}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}x}$ $= \frac{(6a^2 + 8ax + 3x^2)\,\text{ſen.}\,\phi}{6a + 4x}$, e fatto $x = c = MI$, ſi ha per tutto il piano triangolare FMG, $\Delta = \frac{(6a^2 + 8ac + 3c^2)\,\text{ſen.}\,\phi}{6a + 4c}$.

Se il pian di livello paſſa pel vertice M del triangolo ſicchè ſia $MK = a = 0$, riſulta $\Delta = \frac{3}{4}c\,\text{ſen.}\,\phi$, il che indica, che in queſto ſuppoſto il centro di preſſione trovaſi a tre quarti di MI contando d' alto in baſſo.

Situato il triangolo colla baſe orizzontale rivolta all' insù (*Fig.* 22.), e fatta $KM = a$, $MA = b$, $MI = c$, $ME = x$, $EC = y = \frac{b}{c}(c - x)$, la formola $\frac{\int y\,(a+x)^2\,dx\,\text{ſen.}\,\phi}{\int y\,(a+x)\,dx}$ diventa

$$\frac{\int (c-x)(a+x)^2\,dx\,\text{ſen.}\,\phi}{\int (c-x)(a+x)\,dx} =$$

$$\frac{\int (a^2c + 2acx - a^2x + cx^2 - 2ax^2 - x^3)\,dx\,\text{ſen.}\,\phi}{\int (ca + cx - ax - x^2)\,dx} =$$

$\dfrac{(a^2c + acx - \frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{3}cx^2 - \frac{2}{3}ax^2 - \frac{1}{4}x^3)\,\text{ſen.}\,\phi}{ca + \frac{1}{2}cx - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{3}x^2} = \Delta$ per l' area indefinita $ACDB$. Quindi fatto $x = c$, ſi ha per tutto il triangolo AIB, $\Delta = \dfrac{(6a^2 + 4ac + c^2)\,\text{ſen.}\,\phi}{6a + 2c}$; e ſe vuolſi, che l' acqua non aſcenda oltre il lato ſuperiore AB, ſicchè ſia $a = 0$, naſce allora $\Delta = \dfrac{1}{2}c\,\text{ſen.}\,\phi$, che è quanto dire, che il centro di preſſione trovaſi in tal caſo nel mezzo della retta MI.

Eſempio III. Cercaſi il centro di preſſione nella parabola Apolloniana CMD (*Fig.* 23) ſituata dentro il fluido colle ordinate all' aſſe orizzontali, e col vertice rivolto in alto. Chiamato p il parametro, y la CE, x la ME, ſi ha $y = \sqrt{px}$, $\phi = 90°$, $MK = a$. Laonde la formola $\dfrac{\int y(a+x)^2\,dx\,\text{ſen.}\,\phi}{\int y(a+x)\,dx}$ diventa $\dfrac{\int(a^2\sqrt{px} + 2ax\sqrt{px} + x^2\sqrt{px})dx}{\int(a\sqrt{px} + x\sqrt{px})dx}$

$$= \frac{\frac{2}{3}a^2x\sqrt{px} + \frac{4}{5}ax^2\sqrt{px} + \frac{2}{7}x^3\sqrt{px}}{\frac{2}{3}ax\sqrt{px} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{px}} = \frac{\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{5}ax + \frac{1}{7}x^2}{\frac{1}{3}a + \frac{1}{5}x}$$

$= \dfrac{35a^2 + 42ax + 15x^2}{35a + 21x} = \Delta$. Nel caſo che l' acqua non oltrepaſſi il vertice della parabola, ovvero che ſia $a = 0$ naſce $\Delta = \dfrac{30}{42}x = \dfrac{5}{7}x$; vale a dire il centro di preſſione trovaſi a cinque ſettimi dell' aſciſſa ME contando dal vertice.

Ma ſe il piano parabolico ſi capovolge, e rimanendo colle ordinate orizzontali ſi riduce col vertice in giù (*Fig.* 24), allora poſta $MI = c$, $ME = x$, $CE = y$, l' equazione della parabola ſomminiſtra $y = \sqrt{(pc - px)}$; ond' è, che ſurrogato queſto valore nella formola nota, ſi deduce $\Delta = \dfrac{\int dx(a+x)^2\sqrt{(pc-px)}}{\int dx(a+x)\sqrt{(pc-px)}}$. Per poter eſeguire le integrazioni richieſte, facciaſi $\sqrt{pc - px} = z$, e ſi avrà $x = c - \dfrac{z^2}{p}$,

$dx = -\frac{2zdz}{p}$, $a + x = a + c - \frac{z^2}{p}$. Perciò ſi ricava $\Delta =$

$$\frac{\int -z^2dz\left(a+c-\frac{z^2}{p}\right)^2}{\int -z^2dz\left(a+c-\frac{z^2}{p}\right)} = \frac{\frac{2}{5p}(a+c)z^5 - \frac{1}{3}(a+c)^2z^3 - \frac{1}{7p^2}z^7 + \text{coſt.}}{\frac{1}{5p}z^5 - \frac{1}{3}(a+c)z^3 + \text{coſt.}}.$$

Laonde ſoſtituendo in queſt' eſpreſſione il valore di z, ſi ottiene $\Delta =$

$$\frac{+ c)(pc-px)^2\sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{3}(a+c)^2(pc-px)\sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{7p^2}(pc-px)^3\sqrt{(pc-px)} + \text{coſt.}}{\frac{1}{5p}(pc-px)^2\sqrt{(pc-px)} - \frac{1}{3}(a+c)(pc-px)\sqrt{(pc-px)} + \text{coſt.}}.$$

Per determinare le coſtanti, avvertaſi, che quando è $x = 0$ ſvaniſce così l' integrale del numeratore, cioè la ſomma de' momenti, come l' integrale del denominatore, cioè la ſomma delle preſſioni. Conſeguentemente la coſt. del numeratore ſarà $= \frac{1}{7}pc^3\sqrt{pc} + \frac{1}{3}(a+c)^2pc\sqrt{pc} - \frac{2}{5}(a+c)pc^2\sqrt{pc}$, e la coſt. del denominatore ſarà parimente $= \frac{1}{3}(a+c)pc\sqrt{pc} - \frac{1}{5}pc^2\sqrt{pc}$. Dunque $\Delta =$

$$\frac{+ c)(pc-px)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(a+c)^2(pc-px)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{7p^2}(pc-px)^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{7}pc^3\sqrt{pc} + \frac{1}{3}(a+c)^2pc\sqrt{pc} - \frac{2}{5}(a+c)pc^2\sqrt{pc}}{\frac{1}{5p}(pc-px)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(a+c)(pc-px)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(a+c)pc\sqrt{pc} - \frac{1}{5}pc^2\sqrt{pc}},$$

che dà il centro di preſſione per lo ſpazio indefinito $ACDB$. Se pertanto in queſta eſpreſſione ſi aſſume $x = c$ per avere il centro di preſſione di tutto lo ſpazio definito AIB, ſi trova dopo le debite traſformazioni $\Delta = \frac{8c^2 + 35a^2 + 28ac}{35a + 14c}$.

Da ciò s' inferiſce, che qualora l' acqua non ſalga oltre l' ordinata AM, e però ſi abbia $a = 0$, il centro di preſſione è ſituato a quattro ſettimi dell' aſciſſa definita *MI* contando dall' alto. Conſeguentemente ſtando in queſto ſuppoſto di $a=0$, il centro di preſſione nella parabola diritta è d' un quarto più diſtante dal pian di livello, che nella parabola rivoltata.

INDAGINI

NEL CALCOLO INTEGRALE.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

ESsendomi propoſto di applicare il metodo mio adoperato nella XIV. Prop. della Mem. ſul Calcolo Integrale dell' equazioni differenziali finite, inſerita nel I. Vol. della *Società Italiana*, all' integrazione dell' equazione differenziale

$$M=y+P\frac{dy}{dx}+Q\frac{ddy}{dx^2}+R\frac{d^3y}{dx^3}\text{ ecc.}\ldots\ldots+T\frac{d^ny}{dx^n};$$

e le prime operazioni avendone chiamato ſucceſſivamente dell' altre, il lavoro di ſaggio in ſaggio preſe forma, e queſta n'è poi venuto, qualunque ella ſiaſi, non lunga indagine, che vo' credere non totalmente indegna dell' attenzione de'.Geometri. Ogni paſſo, ogni nuova apertura d'integrabilità è ſommamente pregevole in queſta ſorta di equazioni, che vengono sì ſovente in campo nelle Scienze Meccaniche, e nell' Aſtronomia fiſica, e che non ſenza ragione hanno meritato lo ſtudio de' Signori d' *Alembert*, *Eulero*, de la *Grange*, de *Condorcet*, *Bezout*, de la *Place*, e di altri illuſtri Matematici.

Trattando queſte materie con nuovi artifizj, ſiccome ho fatto, traluce ſempre raggio d' incognita verità, che mena a qualche avanzamento indubitatamente; del che potrà accertarſi chi vorrà al progreſſo di queſta Memoria attendere con qualche accuratezza.

PROPOSIZIONE I.

§. I. *Trasformare l' equazione* (A)

$$(A)\ldots\ldots M=y+P\frac{dy}{dx}+Q\frac{ddy}{dx^2}+R\frac{d^3y}{dx^3}\text{ ecc.}\ldots\ldots T\frac{d^ny}{dx^n}$$

in cui dx *è coſtante*, M P Q R ecc. *ſono funzioni qualunque della variabile x, per modo che la ſua riſoluzione dipenda da due equazioni del grado* n — 1.

RISOLUZIONE.

Si ponga $y = \mu^{\int z dx} \int \left(u dx . \mu^{-\int z dx} \right)$, eſſendo z ed u due nuove variabili, μ il numero di cui l' unità è il logaritmo iperbolico. Paſſando ai differenziali dell' ordine n, ſi avrà

$$d^n y = z d^{n-1} y dx + \frac{n-1}{1} dz\, d^{n-2} y dx$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{1 . 2} d^2 z d^{n-3} y dx$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3} d^3 z d^{n-4} y dx \ldots\ldots + d^{n-1} u dx.$$

Dunque ſoſtituendo ſucceſſivamente 1, 2, 3 ecc. per n ſarà

I. $dy = zydx + udx$

II. $ddy = zdydx + dzydx + dudz$

III. $d^3 y = zddy + 2dzdydx + ddzydx + ddudx$

ecc.

Si ſoſtituiſca nel II. differenziale il valore di dy tratto dal I. e ſi avrà

(II.) $ddy = z^2 y dx^2 + zudz^2 + ydzdx + dudx$

e ſimilmente nel III. differenziale ſi ponga il valore di dy ricavato dal I., e il valore di ddy ricavato dal (II.) e così ſucceſſivamente; ne riſulterà per ordine

(I.) $dy = zydx + udx$

(II.) $d^2 y = z^2 y dx^2 + zudx^2 + ydxdz + dudx$

(III.) $d^3 y = z^3 y dx^3 + z^2 u dx^3 + zdudx^2 + 3zydzdx^2 + 2udzdx^2$
$+ yd^2 zdx + d^2 udx$

(IV.) $d^4 y = z^4 y dx^4 + z^3 u dx^4 + z^2 dudx^3 + 6z^2 ydzdx^3$
$+ zddudx^2 + 5uzdzdx^3 + 3ydz^2 dx^2 + 3dudzdx^2$

$$+4zyddzdx^2+3uddzdx^2+yd^3zdx+d^3udx$$

ecc.

Si ſoſtituiſcano tutti queſti valori nell'equazione (*A*); prenderà ella la ſeguente forma

$$M=y+P(zy+u)+\mathcal{Q}\left(z^2y+zu+\frac{ydz}{dx}+\frac{du}{dx}\right)$$
$$+R\left(z^3y+z^2u+\frac{zdu}{dx}+\frac{3zydz}{dx}+\frac{2udz}{dx}+\frac{yddz}{dx^2}+\frac{ddu}{dx^2}\right)$$
$$+S\left(z^4y+z^3u+\frac{z^2du}{dx}+\frac{6z^2ydz}{dx}+\frac{zddu}{dx^2}+\frac{5uzdz}{dx}+\frac{3ydz^2}{dx^2}\right.$$
$$\left.+\frac{3dudz}{dx^2}+\frac{4zyddz}{dx^2}+\frac{3uddz}{dx^2}+\frac{yd^3z}{dx^3}+\frac{d^3u}{dx^3}\right)$$

$+$ ecc.

Di queſta equazione ſe ne faccian due, una delle quali contenga in ogni termine la variabile lineare y, e l' altra abbracci il compleſſo di tutti gli altri termini, che non la comprendono; e ſi avranno le equazioni (*B*) (*C*)

$$(B)\ldots\, 0=1+Pz+\mathcal{Q}\left(z^2+\frac{dz}{dx}\right)+R\left(z^3+\frac{3zdz}{dx}+\frac{ddz}{dx^2}\right)$$
$$+S\left(z^4+\frac{6z^2dz}{dx}+\frac{3dz^2}{dx^2}+\frac{4zddz}{dx^2}+\frac{d^3z}{dx^3}\right)+\text{ecc.}$$

$$(C)\ldots\, M=Pu+\mathcal{Q}\left(zu+\frac{du}{dx}\right)+R\left(z^2u+\frac{zdu}{dx}+\frac{2udz}{dx}+\frac{ddu}{dx^2}\right)$$
$$+S\left(z^3u+\frac{z^2du}{dx}+\frac{zddu}{dx^2}+\frac{5uzdz}{dx^2}+\frac{3dudz}{dx^2}+\frac{3uddz}{dx^2}\right.$$
$$\left.+\frac{d^3u}{dx^3}\right)+\text{ecc.}$$

ognuna delle quali ſarà del grado $n-1$ relativamente all' equazione principale (*A*). Ma dalla riſoluzione delle equazioni (*B*), (*C*) dipende manifeſtamente la riſoluzione dell' equazione (*A*). Dunque ſi è trasformata ecc. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. II. Che ſe nell'equazione (A) ſi ſupponga la funzione $M=0$, e ſi faccia $dy=zydx$, l'equazione (C) non ha più luogo, e ne riſulta la ſola equazione (B). Dunque reciprocamente l'equazione (B) può ſempre traſformarſi nell'equazione (A), in ſuppoſizione di $M=0$, con la ſoſtituzione $z=\frac{dy}{ydx}$.

COROLLARIO II.

§. III. E quanto all'equazione (C), ella ſi riduce agevolmente alla forma dell'equazione (A). Imperciocchè facendo tutti li coefficienti di $u=\Delta$, li coefficienti di $\frac{du}{dx}=\Delta'$, di $\frac{ddu}{dx^2}=\Delta''$ ecc. e di poi $\frac{\Delta'}{\Delta}=P'$, $\frac{\Delta''}{\Delta}=\mathcal{Q}'$ ecc. $\frac{M}{\Delta}=M'$, e ordinando finalmente l'equazione per u, ſi avrà l'equazione

$$(C)\ldots\ldots M'=u+P'\frac{du}{dx}+\mathcal{Q}'\frac{ddu}{dx^2}\text{ ecc.}\ldots\ldots\ldots+T'\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

ch'è della forma (A).

COROLLARIO III.

§. IV. In conſeguenza ſe nell'equazione precedente (C) ſi ponga $du=z'udx+u'dx$, z', u' eſſendo due nuove variabili, la ſi farà dipendere (§. I) dalle due equazioni (B') (C') del grado $n-2$

$$(B')\ldots\ldots 0=1+P'z'+\mathcal{Q}'\left(z'^2+\frac{dz'}{dx}\right)+\text{ecc.}$$

$$(C')\ldots\ldots M'=P'u'+\mathcal{Q}'\left(z'u'+\frac{du'}{dx}\right)+\text{ecc.}$$

E con una ſimile introduzione di due nuove variabili z'' u'' ſi farà dipendere l'equazione (C') da due (B'') (C'') del grado $n-3$, e così ſucceſſivamente, di modo che ſi perverrà in fine ad un' equazione finita, ſiccome è manifeſto.

PROPOSIZIONE II.

§. V. *L' integrale completo dell' equazione* (A)

$$(A)\ldots\ldots M = y + P\frac{dy}{dx} + ecc.\ldots\ldots\ldots T\frac{d^n y}{dx^n}$$

dipende da un integrale particolare di ciaſcheduna delle equazioni ſucceſſive e della ſteſſa forma (B), (*B'*), (B'') *ecc.*

DIMOSTRAZIONE.

Avendo in potere un integrale particolare o incompleto dell' equazione (*B*) (*§. I.*) $z = X$ funzione di x, ſe ne faccia la ſoſtituzione nelle equazioni

$$dy = zydx + udx$$

$$(C)\ldots\ldots M = Pu + Q(zu + \frac{du}{dx} + \text{ecc.}$$

è manifeſto, che avendo nello ſteſſo tempo un integrale completo $u = X'$ dell' equazione (*C*) del grado $n - 1$, il quale conterrà neceſſariamente $n - 1$ coſtanti arbitrarie, ſi avrà

$$dy = Xydx + X'dx;\text{ e}$$

$y = e^{\int Xdx}\left(A + \int X'dx\, e^{-\int Xdx}\right)$ ſarà l' integrale completo dell' equazione (*A*). Ma ſe in vece dell' integrale completo dell' equazione (*C*) ſi aveſſe un integrale incompleto dell' equazione (*B'*) (§. IV.) $z' = X''$, ſoſtituendo queſto valore nelle equazioni

$$du = z'udx + u'dx$$

$$(C')\ldots\ldots M' = P'u' + Q'(z''u' + \frac{du'}{dx}) + \text{ecc.}$$

baſterebbe che ſi aveſſe l' integrale completo $u' = X'''$ dell' equazione (*C'*) del grado $n - 2$, mentre l' equazione $du = X''udx + X'''dx$ ſomminiſtrerebbe l' integrale $u = X''''$ comprendente $n - 1$ coſtanti arbitrarie. Soſtituendo pertanto queſto valore nell' equazione $dy = Xydx + udx$, ſi avrebbe l' integrale completo dell' equazione (*A*) come prima

$$y = e^{\int Xdx}\left(A + \int X''''dx\, e^{-\int Xdx}\right).$$

Si dimoſtrerebbe nello ſteſſo modo, che avendo un valor particolare dell' equazione (B'') (§. *IV.*), e l' integrale completo dell' equazione (C'') del grado $n - 3$, ſi otterrebbe l' integrale completo dell' equazione (A); e così ſucceſſivamente. Ma diſcendendo alle equazioni ſucceſſive (C'''), (C'''') ecc. del grado $n - 4$, $n - 5$ ecc. ſi perviene ad un valore finito. Dunque l' integrale completo dell' equazione (A) dipende da un integrale particolare di ciaſcheduna delle ſucceſſive equazioni (B), (B'), (B'') ecc. Il che ecc.

PROPOSIZIONE III.

§. VI. *L' integrale completo dell' equazione* (A)

$$(\mathrm{A}) \ldots\ldots \; \mathrm{M} = \mathrm{y} + \mathrm{P}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{Q}\frac{\mathrm{ddy}}{\mathrm{dx}^2} \ldots\ldots\ldots + \mathrm{T}\frac{\mathrm{dy}^n}{\mathrm{dx}^n}$$

dipende da un numero n — 1 *di valori particolari di* z, *che ſoddisfacciano alla prima equazione* (B) (§. I.)

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè ſoſtituendo ſucceſſivamente nell' equazione (C) del medeſimo §.

$$(C) \ldots\ldots \; M = Pu + Q\left(zu + \frac{du}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

queſti valori particolari di z, ſi ricaveranno tante equazioni in u ed x del grado $n - 1$, quante ha unità il numero $n - 1$. Ma il numero di queſte equazioni eſſendo uguale al numero delle quantità

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}, \quad \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} \text{ ecc.}$$

ſi potranno queſte diſcacciare, e potrà quindi pervenirſi ad un' equazione del primo grado di queſta forma

$$\mathfrak{Q} = S + R\frac{dS}{dx}$$

la quale è riſolubile generalmente, e perciò al valore di u. Poſto ciò, ſia X funzione di x quello che ſi verrà a trovare per sì fatto valore di u, la qual eſpreſſione conterrà in tal caſo una coſtante arbitraria, e ſieno β, β' ecc. i valori particolari di z. Facendo ſucceſſivamente queſte ſoſtituzioni in luogo di z nell' equazione $dy = zydx + Xdx$, e integrando, ſi avranno gl' integrali

$$y = \mu^{\int \beta dx} \left(A + \int X dx \, \mu^{-\int \beta dx}\right)$$

$$y = \mu^{\int \beta' dx} \left(A' + \int X dx \, \mu^{-\int \beta' dx}\right)$$

ecc. e per conſeguenza

$$y = \mu^{\int \beta dx} \left(A + \int X dx \, \mu^{-\int \beta dx}\right)$$

$$+ \mu^{\int \beta' dx} \left(A' + \int X dx \, \mu^{-\int \beta' dx}\right) + \text{ecc.}$$

ſarà l' integrale completo dell' equazione (*A*). Il che ecc.

PROPOSIZIONE IV.

§. VII. *Se può integrarſi completamente l' equazione differenziale* (Δ)

$$(\Delta) \ldots\ldots 0 = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} \ldots\ldots + T\frac{d^n y}{dx^n}$$

potrà completamente integrarſi anche l' equazione differenziale (*A*)

$$(A) \ldots\ldots M = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} \ldots\ldots + T\frac{dy^n}{dx^n}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Poichè ſoſtituendo nell' equazione (Δ) $zydx$ in luogo di dy, ella ſi cangia nell' equazione (*B*) (§. *II.*),

$$(B) \ldots\ldots 0 = 1 + Pz + \mathcal{Q}\left(z^2 + \frac{dz}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

ſe ſi abbia in potere l' integrale completo dell' equazione (Δ), ſi potrà conchiuderne l' integrale completo dell' equazione (*B*), e però ſi avrà $n - 1$ valori particolari di z. Ma avendo $n - 1$ valori particolari di z nell' equazione (*B*), ſi ha l' integrale completo dell' equazione (*A*) (§. *VI.*). Per conſeguenza ſe può integrarſi completamente l' equazione (Δ), potrà completamente integrarſi l' equazione (*A*). Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. VIII. Si può di qua raccorre, che l' equazione (*A*) è tutte le volte integrabile, e ne' medeſimi caſi che può eſſerlo l' equazione (Δ), ch'è il Teorema del Sig. de la *Grange*.

COROLLARIO II.

§. IX. Ma non è neppur neceſſario il conoſcere l' integrale completo dell' equazione (Δ), ſe ſieno in poter noſtro $n-1$ valori particolari di y nella medeſima equazione, potendo ciò baſtare per l' integrazione completa dell' equazione (*A*), ſiccome è manifeſto.

COROLLARIO III.

§. X. Similmente ſe ſi conoſcano n, o $n-1$ valori di z, che ſoddisfacciano all' equazione (*B*), ſoſtituendoli ſucceſſivamente nell' equazione (*C*) (§. *I.*), onde ottenere n, o $n-1$ equazioni differenziali, ſi è veduto al §. VI. che l' equazione generale (*A*) è completamente integrabile per queſta via. Si può dunque diſpenſarſi dal rintracciare un integrale particolare per ciaſcheduna di queſte equazioni differenziali, come ſembra richiedere il Sig. de la *Place* (*Memorie* dell' *Accademia* R. di *Torino* Vol. IV. §. III.).

PROPOSIZIONE V.

§. XI. *Trovare l' integrale completo dell' equazione* (A)

$$(A) \ldots\ldots M = y + P\frac{dy}{dx} + Q\frac{ddy}{dx^2} + \ldots\ldots T\frac{dy^n}{dx^n}$$

eſſendo P, Q ..... T *quantità coſtanti*, *ed* M *funzione di* x *qualunque*.

RISOLUZIONE.

RISOLUZIONE.

Si ponga nell' equazione di ſoſtituzione (R) (§. I.)

$$(R) \ldots\ldots y = \mu^{\int z dx} \int u dx\, \mu^{-\int z dx}$$

la coſtante indeterminata K in luogo di z. Operando come s' è ivi preſcritto, l' equazione (A) ſi riſolverà nelle due (B'), (C')

$$(B') \ldots\ldots o = 1 + PK + QK^2 + RK^3 + \text{ecc.}$$

$$(C') \ldots\ldots M = Pu + Q\left(Ku + \frac{du}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

Eſſendo ordinata l'equazione (B') per riſpetto a K, aſcende ella al grado, il di cui eſponente uguaglia quello dell'ordine dell'equazione propoſta (A). Dunque riſoluta con l'Algebra comune l'equazione (B'), ſi mettano per K ſucceſſivamente nell' equazione (C') le radici trovate. Si otterrà un numero di equazioni col mezzo delle quali potranno diſcacciarſi i differenziali di u, e ſi conſeguirà il valore finito di u. Sia X queſto valore. Soſtituendo in ſeguito nell' equazione (R) il valore di u, e per z ſucceſſivamente tutte le radici, per eſempio a, a', a'' ecc. dell' equazione (B'), ſi avrà, prendendone di mano in mano gl' integrali, l' eſpreſſione

$$y = \mu^{ax}\left(A + \int X dx\, \mu^{-ax}\right) + \mu^{a'x}\left(A' + \int X dx\, \mu^{-a'x}\right) + \text{ecc.}$$

che ſarà l'integrale completo dell' equazione (A), contenendo un numero n di coſtanti arbitrarie. Il che ecc.

PROPOSIZIONE VI.

§. XII. *Integrare l' equazione* (T)

$$(\mathrm{T}) \ldots \mathrm{M} = \mathrm{Ay} + \mathrm{B}(\mathrm{h} + \mathrm{Kx})\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{C}(\mathrm{h} + \mathrm{Kx})^2 \frac{\mathrm{ddy}}{\mathrm{dx}^2} + \text{ecc.}$$

del Sig. de la Grange (Miſcell. Taurin. V. III. pag. 190), h, K, A, B, C ecc. *eſſendo coefficienti coſtanti*, M *funzione di* x.

RISOLUZIONE.

Poſto, come nella I. Propoſizione, $dy = zydx + udx$, col metodo ivi adoperato ſi trasformerà l'equazione (T) nelle due

$$(B') \ldots\ldots 0 = A + B(h+Kx)z + C(h+Kx)^2\left(z^2+\frac{dz}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

$$(C') \ldots \mathrm{M} = B(h+Kx)u + C(h+Kx)^2\left(zu+\frac{du}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

Si faccia $z = \frac{r}{h+Kx}$, eſſendo r una coſtante indeterminata. Soſtituendo queſto valore nell' equazione (B'), ella ſi ridurrà a queſta forma (B'')

$$(B'') \ldots\ldots 0 = A + Br + Cr(r-K) + Dr(r^2 - 3Kr + 2K^2) + \text{ecc.}$$

la quale ordinata per r, ſomminiſtrerà tante radici r', r'', r''' ecc. quante ſono le unità nell' ordine dell' equazione (T). Facendo la ſteſſa ſoſtituzione neli'equazione (C'), vi ſi ſoſtituiſcano ſucceſſivamente per r le radici r', r'' ecc. trovate; con che ſi avrà un numero di equazioni eguale a quello delle quantità $\frac{du}{dx}$, $\frac{ddu}{dx^2}$ ecc., le quali maneggiate, come nelle Propos. precedenti, ci faranno pervenire al valore di $u = X$. Ripigliando pertanto l' equazione di ſoſtituzione $y = \mu^{\int zdx} \int udx\mu^{-\int zdx}$, e poſto X in luogo di u, ſe π, π', π'', ecc. rappreſentino i valori $\frac{r'}{h+Kx}$, $\frac{r''}{h+Kx}$, $\frac{r'''}{h+Kx}$ ecc., ſi mettano π, π' ecc. ſucceſſivamente per z, e ſi avrà

$$\begin{aligned} y = {} & \mu^{\int \pi dx}\left(A + \int X dx \mu^{-\int \pi dx}\right) \\ & + \mu^{\int \pi' dx}\left(A' + \int X dx \mu^{-\int \pi' dx}\right) + \text{ecc.} \end{aligned}$$

per l' integrale completo dell' equazione (T). Il che ecc.

Scolio.

§. XIII. Ancorchè le integrazioni ottenute ne' §. §. XI. XII. ſi conſiderino non avere altre difficoltà fuorchè quelle dell' Algebra comune, ridotte come ſono a dipendere dalla riſoluzione di equazioni algebraiche determinate; ciò non oſtante il caſo principalmente delle radici eguali, che poſſono incontrarſi in queſte equazioni, obbliga ad operazioni, che ſarebbe bene di evitare. Non conoſco ſinora alcun metodo eſente dalla neceſſità di avervi particolare conſiderazione, allorchè ha luogo queſto caſo. Eccone uno, che deriva neceſſariamente da quello che abbiamo adoperato nella riſoluzione di queſte equazioni differenziali; e fra poco ne daremo un altro ancor più ſemplice. Si ripigli l' equazione del §. XI. ponendo A, B, C ecc. in luogo di P, Q, R ecc.

$$(A) \ldots\ldots M = y + A\frac{dy}{dx} + B\frac{ddy}{dx^2} + \text{ecc.}$$

e ſieno (B), (C) le due equazioni nelle quali ella ſi traſforma

$$(B) \ldots\ldots 0 = 1 + Aa + Ba^2 + Ca^3 + \text{ecc.}$$

$$(C) \ldots\ldots M = Au + B\left(au + \frac{du}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

con la ſoſtituzione $dy = aydx + udx$, eſſendo a una coſtante indeterminata. L' equazione (C) ſi trasforma nell' equazione

$$M' = u + A'\frac{du}{dx} + B'\frac{ddu}{dx^2} + \text{ecc.}$$

della ſteſſa forma di (A), ma del grado $n - 1$ (§. III.). Sieno pertanto (B') (C')

$$(B') \ldots\ldots 0 = 1 + A'a' + B'a'^2 + C'a'^3 + \text{ecc.}$$

$$(C') \ldots\ldots M = A'u' + B'\left(au' + \frac{du'}{dx}\right) + \text{ecc.}$$

le equazioni nelle quali ſi riſolve l'equazione precedente con la ſoſtituzione $du = a'udx + u'dx$, eſſendo u' una nuova variabile, a' una nuova coſtante indeterminata. E' manifeſto che ſi trasformerà ſimilmente l'equazione (C') nell'equazione

$M'' = u' + A''\frac{du'}{dx} + B''\frac{ddu'}{dx^2} +$ ecc. della forma parimente di (A), e del grado $n - 2$. Inoltrando l' operazione ſucceſſivamente, ſi perverrà all'equazione $M^m = A^m u^m$ da cui ſi potrà avere il valore finito di u^m. Si tragga una radice o un valore di a^m dall' equazione proſſima e determinata (B^m), e avendolo ſoſtituito nell' equazione $du^{m-1} = a^m u^{m-1} dx + u^m dx$ inſieme col valore di u^m, ſi avrà una prima parte integrale completa

$$u^{m-1} = \mu^{a^m x}\left(\text{coſt.} + \int u^m dx\, \mu^{-a^m x}\right)$$

Conoſcendo il valore di $u^{m-1} = X$, ſi ricavi una radice o un valore di a^{m-1} dall'equazione determinata (B^{m-1}). Soſtituiti queſti valori nell' equazione

$$du^{m-2} = a^{m-1} u^{m-2} dx + u^{m-1} dx$$

ſi conſeguirà una ſeconda parte integrale

$$u^{m-2} = \mu^{a^{m-1}x}\left(\text{coſt.} + \int X dx\, \mu^{-a^{m-1}x}\right)$$

Procedendo così ſucceſſivamente ſi perverrà al valore di $u = X^m$, che comprenderà $n - 1$ coſtanti arbitrarie.

Ricavando in ſeguito una radice o un valore di a dall' equazione (B), ſe ſi faccia la ſoſtituzione di queſti valori nell' equazione $dy = aydx + udx$, ſe ne potrà conchiudere finalmente l' equazione finita

$$y = \mu^{ax}\left(\text{coſt.} + \int X^m dx\, \mu^{-ax}\right)$$

integrale completo dell' equazione (A), ſenza che l' andamento ſia turbato dalla conſiderazione delle radici eguali, che poſſono avervi nell'equazione (B). E queſto metodo può applicarſi anche all' integrazione dell' equazione (T) (§. *XII.*).

PROPOSIZIONE VII.

§. XIV. *Integrare l' equazione* (A)

$$(\mathrm{A}) \ldots\ldots \mathrm{M} = y + \mathrm{X}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + \phi . X\frac{\mathrm{ddy}}{\mathrm{dx}^2} + \phi' . X\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^3} + \text{ecc.}$$

in cui M, X *ſono funzioni di* x *qualunque*, φ.X, φ'.X ecc. *funzioni di* X *indeterminate*.

RISOLUZIONE.

Suppongaſi per maggior ſemplicità $X=P$, $\phi.X=\mathcal{Q}$, $\phi'.X=R$ ecc., e ſi faccia $(K)\ dy=aydx+udx$, eſſendo a una coſtante a piacere. Col metodo della prima Prop. ſi riſolverà l' equazione (A) nelle due (B), (C)

$$(B)\ldots 0=1+Pa+\mathcal{Q}a^2+Ra^3+\text{ecc.}$$

$$(C)\ldots M=(P+\mathcal{Q}a+Ra^2+\text{ecc.})u+(\mathcal{Q}+Ra+Sa^2+\text{ecc.})\frac{du}{dx}$$
$$+(R+Sa+Ta^2+\text{ecc.})\frac{ddu}{dx^2}+\text{ecc.}$$

Facendo in ſeguito

$$\Delta=P+\mathcal{Q}a+Ra^2+\text{ecc.}$$
$$\Delta'=\mathcal{Q}+Ra+Sa^2+\text{ecc.}$$
$$\Delta''=R+Sa+Ta^2+\text{ecc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e $\frac{\Delta'}{\Delta}=P'$, $\frac{\Delta''}{\Delta}=\mathcal{Q}'$ ecc. $\frac{M}{\Delta}=M'$

l' equazione (C) del grado $n-1$ prenderà la forma dell' equazione (A) in queſto modo

$$M'=u+P'\frac{du}{dx}+\mathcal{Q}'\frac{ddu}{dx^2}+\text{ecc.}$$

Di nuovo ponendo in queſt' equazione così preparata (K') $du=budx+u'dx$, in cui b è un' altra coſtante a piacere, u' una nuova variabile, ſi riſolverà ella in altre due (B') (C')

$$(B')\ldots\ldots 0=1+P'b+\mathcal{Q}'b^2+R'b^3+\text{ecc.}$$

$$(C')\ldots\ldots M'=(P'+\mathcal{Q}'b+R'b^2+\text{ecc.})u'$$
$$+(\mathcal{Q}'+R'b+S'b^2+\text{ecc.})\frac{du'}{dx}+\text{ecc.}$$

la ſeconda delle quali del grado $n-2$ per una preparazione ſimile alla precedente diverrà

$$M'' = u' + P''\frac{du'}{dx} + Q''\frac{ddu'}{dx^2} + \text{ecc.}$$

la quale con la ſoſtituzione (K'') $du' = cu'dx + u''dx$, e con la ſteſſa preparazione ſomminiſtrerà le due equazioni del grado $n - 3$

$$(B'')\ldots\ldots 0 = 1 + P''c + Q''c^2 + R''c^3 + \text{ecc.}$$

$$(C'')\ldots\ M''' = u'' + P'''\frac{du''}{dx} + Q'''\frac{ddu''}{dx^2} + \text{ecc.}$$

e così ſucceſſivamente. Procedendo in tal modo ſi perverrà all' equazione $M^{n-1} = u^{n-2} + P^{n-1}\frac{du^{n-2}}{dx}$ coll' ultima ſoſtituzione (K^n), dall' integrazione della quale ſi avrà il valore di u^{n-2} con una coſtante arbitraria. Integrando quindi l' equazione (K^n) ſi otterrà il valore di u^{n-1}, e ſi giugnerà finalmente con queſt' ordine a trovare il valore di u. In conſeguenza ſi potrà integrare l' equazione primitiva di ſoſtituzione (K), e conſeguire il valore di y. Ma perchè queſto valore ſia l' integrale completo dell' equazione (A) biſogna ſoddisfare alle equazioni

$$(B)\ldots 0 = 1 + Pa + Qa^2 + Ra^3 + \text{ecc.}$$

$$(B')\ldots 0 = 1 + P'b + Q'b^2 + R'b^3 + \text{ecc.}$$

$$(B'')\ldots 0 = 1 + P''c + Q''c^2 + R''c^3 + \text{ecc.}$$

....

che hanno luogo inſieme con le equazioni (C), (C') ecc. Si conſideri pertanto, che tante ſono le funzioni indeterminate P, Q, R ecc. quante unità contiene il numero n, e che $n - 1$ è il numero delle equazioni di relazione tra queſte funzioni che debbono aver luogo. Dunque è manifeſto, che una di queſte funzioni può eſſere tutto quello che ſi vuole. Sia P queſta funzione arbitraria. Maneggiando le altre come incognite, ſe ne potrà dedurre il valore in P e coſtanti con le ſolite regole dell' Algebra comune. E poichè $P = X$, $Q = \phi.X$, $R = \phi'.X$ ecc. ſi perverrà a determinare le forme ϕ, ϕ', ϕ'' ecc. dell' equazione (A), eſſendo X una funzione di x qualunque, e a, b, c ecc. coſtanti a piacere. Egli è viſibile, che non la ſola P, ma una qualſivoglia delle indeterminate P, Q, R ecc. può pigliarſi da principio per funzione di arbitrio, e le altre ſi determineranno col mezzo delle equazioni (B), (B') ecc. Il che ecc.

ESEMPIO I.

Sia da integrare l' equazione differenziale (A)

$$(A)\ldots\mathrm{M}=y+X\frac{dy}{dx}+\frac{1+aX}{a^2}\cdot\frac{ddy}{dx^2}$$

eſſendo M, X funzioni di x di qualunque forma.

Facendo $X=P$, $\frac{1+aX}{a^2}=-Q$, ſi avranno con la ſoſtituzione $(K)\, dy=aydx+udx$ le due equazioni

$$(B)\ldots 0=1+Pa+Qa^2$$

$$(C)\ldots M=(P+Qa)u+Q\frac{du}{dx}$$

Prendendo l' integrale completo dell' equazione (C) $u=V$, ſi ſoſtituiſce il valore di u nell' equazione (K), e ſi avrà

$$(L)\ldots y=\mu^{ax}(\text{Coſt.}+\int Vdx\,\mu^{-ax}$$

integrale completo dell' equazione (A), purchè ſi ſoddisfaccia all' equazione (B). Ma ſoſtituendo in (B) X in luogo di P, $-\frac{1+aX}{a^2}$ in luogo di Q, l' equazione ſvaniſce. Dunque l' eſpreſſione (L) è l' integrale completo dell' equazione (A)

ESEMPIO II.

Sia da integrare l' equazione differenziale di terzo grado (A)

$$(A)\ldots M=y+X\frac{dy}{dx}+\left(\frac{a^4+a^3b-b^2}{a^2b^2}+\frac{(a^2-b)X}{ab}\right)\frac{ddy}{dx^2}-$$
$$-\left(\frac{a+b+abX}{a^2b^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3}$$

M, X eſſendo funzione di x qualunque, a, b coſtanti a piacere. Supponendo per maggior ſemplicità, che l' equazione ſia

$$M=y+P\frac{dy}{dx}+Q\frac{ddy}{dx^2}+R\frac{d^3y}{dx^3}$$

ſi avrà con la ſoſtituzione $(K)\, dy=aydx+udx$ le due equazioni

$$(B)\ldots\ldots 0 = 1 + Pa + \mathcal{Q}a^2 + Ra^3$$

$$(C)\ldots\ldots M' = u + P'\frac{du}{dx} + \mathcal{Q}'\frac{ddu}{dx^2}$$

eſſendo $M' = M : (P + \mathcal{Q}a + Ra^2)$, $P' = (\mathcal{Q} + Ra) : (P + \mathcal{Q}a + Ra^2)$ $\mathcal{Q}' = R : (P + \mathcal{Q}a + Ra^2)$; e con la ſoſtituzione (K') $du = budx + u'dx$ nell' equazione (C) ſi avranno le equazioni

$$(B')\ldots\ldots 0 = 1 + P'b + \mathcal{Q}'b^2$$

$$(C')\ldots\ldots M'' = u' + P''\frac{du'}{dx}$$

eſſendo $M'' = M : (\mathcal{Q} + R(a+b))$, $P'' = R : (\mathcal{Q} + R(a+b))$ Prendendo l' integrale completo dell' equazione (C'), ſi avrà $u' = V$; e ſoſtituendo queſto valore in (K') ſi avrà integrando $u = V'$. In conſeguenza ſoſtituendo queſto valore per u nell' equazione (K), e integrando ſi otterrà

$$y = e^{ax}\left(\text{coſt.} + \int V' dx \mu^{-ax}\right)$$

integrale completo dell' equazione (A), giacchè comprende tre coſtanti arbitrarie, purchè ſi ſoddisfaccia alle equazioni (B), (B'). Ma appunto mettendo X in vece di P, $\frac{a^4 + a^3b - b^2}{a^2b^2} + \frac{(a^2 - b)X}{a\ b}$ in vece di $\mathcal{Q}$, e $-\frac{a + b + abX}{a^2b^2}$ in luogo di R entrambe quelle equazioni ſvaniſcono. Dunque ecc.

§. XV.

Ma ſu le tracce della Prop. precedente poſſiamo aprirci un campo di ſpeculazione più vaſto, e poggiare ad una più grande generalità coll' ajuto delle funzioni indeterminate. Per queſta via prenderemo a fare qualche tentativo generale intorno all' integrazione dell' equazione (A) (§. I.) allorchè i coefficienti P, $\mathcal{Q}$, R ecc. ſono funzioni di x, nè più nè meno come s' è fatto nella Mem. ſopra citata per le equazioni a differenze finite.

Si cominci primieramente dal mettere ſotto le forme ſeguenti le equazioni differenziali di grado in grado, negletto il primo, compreſe nell' equazione (A) (§. I.) in ſuppoſizione di $M = 0$

$(B)\ldots\ldots 0$

$$(B)\ldots\ldots 0 = y + F(\phi,\upsilon)\frac{dy}{dx} + F'(\phi,\upsilon)\frac{ddy}{dx^2}$$

$$(B')\ldots 0 = y + F(\phi,\ \upsilon,\ \Delta)\frac{dy}{dx} + F'(\phi,\upsilon,\Delta)\frac{ddy}{dx^2}$$
$$+ F''(\phi,\ \upsilon,\ \Delta)\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$(B'')\ldots\ldots 0 = y + F(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{dy}{dx} + F'(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{ddy}{dx^2}$$
$$+ F''(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{d^3y}{dx^3} + F'''(\phi,\ \upsilon,\ \Delta,\ \lambda)\frac{d^4y}{dx^4}$$

ecc. eſſendo ϕ, υ, Δ, λ ecc. funzioni di x, $F(\phi,\ \upsilon)$, $F'(\phi,\ \upsilon,\ \Delta)$ ecc. funzioni di ϕ, υ, di ϕ, υ, Δ ecc. Il numero delle funzioni ϕ, υ, Δ ecc. introdotte in ogni equazione differenziale è uguale al grado dell' equazione da riſolvere. Si concepiſca poi, che l' equazione (K)

$$(K)\ldots\ldots y = \mu^{\int\phi dx}\left(A + \int dx\,\mu^{\int\upsilon dx}\left(A' + \int dx\,\mu^{\int\Delta dx}\left(A''\right.\right.\right.$$
$$\left.+ \int dx\,\mu^{\int\lambda dx}\left(A''' + \text{ecc.}\right.\right.$$

all' infinito rappreſenti l' integrale completo dell' equazione (A), eſſendo A, A', A'' ecc. le coſtanti arbitrarie, di modo che, richiedendoſi l' integrale di un' equazione differenziale del grado n, baſta fare la coſtante A^{n+1}, e tutte le ſuſſeguenti $= 0$. La ſerie allora s' interrompe, e l' equazione finita riſultante comprende n coſtanti arbitrarie, e tante funzioni ϕ, υ, Δ ecc. quante unità ſono in n. In conſeguenza pigliando la differenza n^{ma}. di queſt' equazione, dovrà ella rappreſentare un' equazione (A) del grado n, cioè la forma (B), (B') ecc. corriſpondente a quel grado, sì che le forme $F(\phi,\ \upsilon)$, $F'(\phi,\ \upsilon,\ \Delta)$ ecc. verranno ad eſſere determinate.

Sieno pertanto (P), (P') ecc. queſti differenziali ſucceſſivi dell' equazione (K)

$$(P)\ldots\ldots 0 = \left(\phi(\phi+\upsilon) - \phi'\right)y - \left(\upsilon + 2\phi\right)\frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2}$$

$$(P')\ldots\ldots 0 = \left((\phi+\upsilon+\Delta)(\phi'-\phi^2-\upsilon\phi) - \phi'' + 2\phi\phi' + \phi\upsilon' + \upsilon\phi'\right)y$$

$$+\left((\upsilon+2\phi)(\upsilon+\phi+\Delta)-\upsilon'-3\phi'+\upsilon\phi+\phi^2\right)\frac{dy}{dx}$$

$$-(\Delta+2\upsilon+3\phi)\frac{ddy}{dx^2}+\frac{d^3y}{dx^3}$$

ecc. ne' quali $\phi'=\frac{d\phi}{dx}$, $\phi''=\frac{d\phi'}{dx}$ ecc. $\upsilon'=\frac{d\upsilon}{dx}$, $\upsilon''=\frac{d\upsilon'}{dx}$ ecc. Queſta differenziazione può continuarſi agevolmente, mentre l' equazione (P) moltiplicata per $\mu^{-\int(\phi+\upsilon+\Delta)dx}$ e differenziata ſomminiſtra l' equazione (P'); l' equazione (P') moltiplicata per $\mu^{-\int(\phi+\upsilon+\Delta+\lambda)dx}$ e differenziata ſomminiſtrerebbe l' equazione proſſima ſuſſeguente (P''); e così all' infinito. Ciò premeſſo è manifeſto, che perchè l' equazione (K) aſſunta ſia l' integrale completo dell' equazione (A) del grado n, quella delle equazioni differenziali (P), (P'), (P'') ecc. ch' è dello ſteſſo grado, dee identificarſi coll' equazione (A). In conſeguenza tutte le volte, che l' equazione (A) potrà ridurſi alla forma (P), o (P') ecc. l' eſpreſſione (K) ſarà il ſuo integrale completo. Non ſarebbe difficile coſa il dimoſtrare, che in queſte formule ſi contengono tutte le traſformazioni che poſſono darſi all' equazione generale (A), onde ſoggettarla ad integrali della forma (K). Ora, eſſendoſi dimoſtrato, che l' equazione (A) in ſuppoſizione di M funzione di x è integrabile tutte le volte e ne' medeſimi caſi che può eſſerlo in ſuppoſizione di $M=0$ (§. *VIII.*), è ben chiaro per sè, che il metodo ci conduce a una grandiſſima generalità, e abbraccia caſi d' integrabilità ſenza confini per l' equazione (A) a coefficienti variabili. Ora mi riſtringo a riſolvere il caſo de' coefficienti coſtanti per un eſempio.

PROPOSIZIONE VIII.

§. XVI. *Integrare l' equazione* (A)

$$(\mathrm{A})\ldots\mathrm{M}=\mathrm{y}+\mathrm{A}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}+\mathrm{B}\frac{\mathrm{ddy}}{\mathrm{dx}^2}+\text{ ecc.}$$

in cui M *è funzione di* x, A, B, C ecc. *ſono quantità coſtanti.*

RISOLUZIONE.

Pongaſi $M = 0$; e poichè i coefficienti de' termini ſono quantità coſtanti, dovranno parimente eſſere quantità coſtanti le funzioni indeterminate ϕ, υ, Δ ecc.

Dunque la formola rappreſentante l'integrale completo dell' equazione (A), in ſuppoſizione di $M = 0$, ſarà

$$(K) \ldots y = \mu^{\Phi x} \left(A + \int dx \mu^{\upsilon x} \left(A' + \int dx \mu^{\Delta x} \left(A'' + \text{ecc.} \right.\right.\right.$$

Ora nella differenza n^{ma}. di queſta equazione i coefficienti di tutte le potenze differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, ecc. ſono funzioni di ϕ, υ, Δ ecc. e n di numero, come riſulta da quanto ſi è eſpoſto nel §. precedente. Ed è pure n il numero de' coefficienti A, B ecc. dell' equazione (A). Dunque identificando le equazioni differenziali, ſi potrà ricavare da' paragoni un numero n di equazioni in ϕ, υ, Δ ecc. A, B, C ecc. col mezzo delle quali ſi potranno determinare i valori delle ϕ, υ, Δ ecc. in A, B, C ecc. Se dunque ſi ſoſtituiranno queſti valori nell' equazione (K), ſi otterrà l' integrale completo dell' equazione differenziale (A) nel caſo di $M = 0$. Ma dato l' integrale di (A) in ſuppoſizione di $M = 0$, ſi ha pure l' integrale di (A) in ſuppoſizione di M funzione di x qualunque (§. *VIII.*). Dunque ecc.

§. XVII.

Queſta riſoluzione dell' equazione (A) non è turbata dal caſo delle radici eguali (§. *XIII.*) alle quali cogli altri metodi fa d'uopo avere conſiderazione particolare (Veggaſi il II. Vol. del Calc. Integr. del Sig. *Eulero* pag. 429 e ſegg., e il III. Vol. degli atti di Torino nell' eccell. Mem. del Sig. de la *Grange*).

ESEMPIO.

Sia da integrarſi l' equazione differenzio-differenziale

$$(\mathcal{Q})\ldots\ldots M = y - \frac{2dy}{adx} + \frac{ddy}{a^2dx^2}$$

Si facciano nell' eſpreſſione (K) (§. XV.) le coſtanti arbitrarie A'', A''' ecc. $= 0$, e però l' integrale ricercato in ſuppoſizione di $M = 0$ ſarà della forma ſeguente

$$(R)\ldots\ldots y = \mu^{\phi x}\left(A + \int A'dx\mu^{vx}\right)$$

la quale differenziata due volte darà l' equazione (S)

$$(S)\ldots\ldots 0 = y - \frac{v+2\phi}{\phi^2+v\phi}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\phi^2+v\phi}\cdot\frac{ddy}{dx^2}$$

Dal ſuo paragone pertanto con l' equazione $(\mathcal{Q})$ ſi otterrà $\frac{v+2\phi}{\phi^2+v\phi} = \frac{2}{a}$, $\frac{1}{\phi^2+v\phi} = \frac{1}{a^2}$, e però $\phi = -a$, $v = 0$.

Soſtituiti queſti valori nell' equazione (R), l' integrale completo dell' equazione $(\mathcal{Q})$, ſuppoſto $M = 0$, ſarà

$$y = \mu^{-ax}\left(A + \int A'dx\right) = \mu^{-ax}(A + A'x)$$

I metodi ordinarj avrebbero fatto dipendere queſt' integrazione dalla riſoluzione dell' equazione

$$0 = 1 - \frac{2z}{a} + \frac{z^2}{a^2}$$

in cui due radici ſono eguali. Ma eſſendo noto l' integrale in ſuppoſizione di $M = 0$, lo ſarà pure in ſuppoſizione di M funzione di x. Dunque ecc.

§. XVIII.

Non eſſendomi propoſto in queſta Memoria, che d' indicare alcune vie, che mi ſono aperto per l' integrazione di queſta ſorta di equazioni differenziali coll' intenzione di ripigliar, ſe ſia poſſibile, la materia più di propoſito, che ora per avventura non m' è conceduto di fare, paſſiamo a fare qualche ricerca ſull' equazione

$$(A)\ldots\ldots Mdx^n = x^{\Phi+1}(a+bX)ydx^n + x^{\Phi+2}(c+eX)dydx^{n-1}$$
$$+ x^{\Phi+3}(f+gX)ddydx^{n-2} + \text{ecc.}$$

in cui M, X ſono funzioni qualunque di x, Φ a b c ecc. coſtanti a piacere. Non è ignoto a' Geometri di quanto uſo ſia la ſola equazione di ſecondo grado $Mdx^2 = x^2(a+bx^n)ddy + x(e+fx^n)dxdy + (g+hx^n)ydx^2$ ch' è un caſo particolariſſimo dell' equazione (A), e ſu cui più di tutti ha diffuſamente verſato il Sig. *Eulero* nel X. Vol. de' nuovi Com. di St. *Pietroburgo*, e in appreſſo nel II. Vol. del ſuo Calc. Integrale. Ci fermeremo pertanto prima ſu queſta, ed eſtenderemo poi le noſtre indagini ſull' equazione generale.

PROPOSIZIONE. IX.

§. XIX. Svolgere infiniti caſi d' integrabilità dell' equazione

$$(\Delta)\ldots\ldots \mathrm{Mdx}^2 = \mathrm{x}^2(\mathrm{a}+\mathrm{bx}^n)\mathrm{ddy} + \mathrm{x}(\mathrm{e}+\mathrm{fx}^n)\mathrm{dxdy}$$
$$+ (\mathrm{g}+\mathrm{hx}^n)\mathrm{ydx}^2$$

indipendenti dall' eſponente n.

RISOLUZIONE.

I. Si ſupponga $y = \frac{z}{x}$, eſſendo z una nuova variabile, e ſi ſoſtituiſca queſto valore nell' equazione (Δ). Ella prende queſta forma

$$(B)\ldots\ldots(a+bx^n)\left(xddz - 2dxdz + \frac{2zdx^2}{x}\right)$$
$$+ (e+fx^n)\left(dzdx - \frac{zdx^2}{x}\right) + (g+hx^n)\frac{zdx^2}{x} - Mdx^2 = 0$$

Di queſta equazione ſe ne faccian due nel modo ſeguente

$$(a+bx^n)\frac{2zdx^2}{x} - (e+fx^n)\frac{zdx^2}{x} + (g+hx^n)\frac{zdx^2}{x} = 0$$
$$(a+bx^n)(xddz - 2dxdz) + (e+fx^n)dzdx - Mdx^1 = 0$$

le quali ſemplificate e ordinate divengono

$$(C)\quad 2a - e + g + (2b - f + h)x^n = 0$$

$(D)\ x(a+bx^n)ddz+(e-2a+(f-2b)x^n)dxdz-Mdx^2=0$

Poſto nell' equazione $(D)\ dz=udx$, ſi paſſi all' integrazione ..

Si avrà $u=\frac{dz}{dx}=\mu^{-\int\frac{Qdx}{P}}\left(A+\int\frac{Mdx}{P}\mu^{\int\frac{Qdx}{P}}\right)=V$ eſſendo $Q=e-2a+(f-2b)x^n$, $P=x(a+bx^n)$. Per conſeguenza $z=A'+\int Vdx$, e però $y=A'z^{-1}+x^{-1}\int Vdx$ ſarà l' integrale completo dell' equazione (Δ), ognora che ſi ſoddisfaccia alle due equazioni
$2a-e+g=0$; $2b-f+h=0$, le quali non involgono l' eſponente n.

II. Di nuovo ſi ordini l' equazione (B), e ſi ſupponga $M=0$. Si avrà

$$(B')\ldots\ 0=x^2(a+bx^n)ddz+x\left(e-2a+(f-2b)x^n\right)dxdz$$
$$+\left(2a-e+g+(2b-f+h)x^n\right)zdx^2$$

Poſto pertanto $e-2a=e'$, $f-2b=f'$, $2a-e+g=g'$, $2b-f+h=h'$, l' equazione
$0=x^2(a+bx^n)ddz+x(e'+f'x^n)dxdz+(g'+h'x^n)zdx^2$
con la ſoſtituzione di $\frac{z'}{x}$ in luogo di z ſi cangerà in queſta

$$x^2(a+bx^n)ddz'+x\left(e'-2a+(f'-2b)x^n\right)dxdz'$$
$$+\left(2a-e'+g'+(2b-f'-h')x^n\right)z'dx^2=0,$$ cioè in queſta

$$(B'')\ldots\ x^2(a+bx^n)ddz'+x\left(e-4a+(f-4b)x^n\right)dxdz'$$
$$+\left(6a-2e+g+(6b-2f+h)x^n\right)z'dx^2=0$$

Similmente ſi troverà che l' equazione (B'') con la ſoſtituzione di $\frac{z''}{x}$ in luogo di z' ſi trasformerà in queſta

$$(B''')\ldots\ x^2(a+bx^n)ddz''+x\left(e-6a+(f-6b)x^n\right)dxdz''$$
$$+\left(12a-3e+g+(12b-3f+h)x^n\right)z''dx^2=0$$

Queſta poi con la ſoſtituzione di $\frac{z'''}{x}$ in luogo di z'' diverrà

$$(B'''')\ldots\ x^2(a+bx^n)ddz'''+x\left(e-8a+(f-8b)x^n\right)dxdz'''$$

$$+(20a-4e+g+(20b-4f+h)x^n)z'''dx^2=0$$

e così ſucceſſivamente in modo, che dopo m traſformazioni ſi perverrà all' equazione

$$(B^m)\ldots x^2(a+bx^n)ddz^{m-1}+x(e-2ma+(f-2mb)x^n)dxdz^{m-1}$$
$$+((m+m^2)a-me+g$$
$$+((m+m^2)b-mf+h)x^n)z^{n-1}dx^2=0$$

Ma di queſta equazione fatte due come nell' articolo precedente, ſi troverà ch' ella è integrabile qualvolta ſi verifichino le due equazioni

$$m^2a+m(a-e)+g=0$$
$$m^2b+m(b-f)+h=0$$

Dunque in tutti queſti infiniti caſi di relazione tra i coeſficienti, ove non entra l' eſponente n, eſſendo m numero intero e poſitivo, e in ſuppoſizione di $M=0$, ſi avrà l'integrale completo dell' equazione (Δ); e però (§. *VIII.*) anche in ſuppoſizione di M funzione della variabile x.

III. Ma di nuovo ancora ſi ripigli l' equazione (B), e ſe ne combinino tre paja come ſegue in ipoteſi di $M=0$

$$\left\{\begin{array}{l}(E)\ldots x^2(a+bx^n)ddz+x(e-2a+(f-2b)x^n)dxdz\\ \qquad\qquad +(2a+2bx^n)zdx^2=0\\ (E')\ldots g-e+(h-f)x^n=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(F)\ldots x^2(a+bx^n)ddz+x(e-2a+(f-2b)x^n)dxdz\\ \qquad\qquad -(e+fx^n)zdx^2=0\\ (F')\ldots 2a+g+(2b+h)x^n=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(G)\ldots x^2(a+bx^n)ddz+x(e-2a+(f-2b)x^n)dxdz\\ \qquad\qquad +(g+hx^n)zdx^2=0\\ (G')\ldots 2a-e+(2b-f)x^n=0\end{array}\right.$$

Se nell' equazione (Δ) ſi ponga $M=0$, e in luogo di g, f in luogo di h, sì che ſi ſoddisfaccia all' equazione (E'), e ne riſulti l' equazione

$$(\Delta')\ldots\ldots x^2(a+bx^n)ddy+x(e+fx^n)dxdy$$
$$+(e+fx^n)ydx^2=0$$

è certo, che qualvolta s' integri l'equazione (E) ſi potrà integrare l' equazione (Δ'). Si faccia pertanto in (E) $e - 2a = e'$, $f - 2b = f'$. Si cangia l' equazione in queſta

$$(E'') \ldots\ldots x^2(a+bx^n)ddz + x(e'+f'x^n)dxdz$$

$$+(2a+2bx^n)zdx^2 = 0$$

la quale è integrabile (*Art.* I.) ognora che ſi verifichino queſte due relazioni $6a - e = 0$; $6b - f = 0$

Dunque in queſti caſi ſarà pure integrabile l' equazione (Δ'). Ma ſoſtituendo $\frac{z'}{x}$ in luogo di z nell' equazione (E''), ella ſi trasforma per la ſteſſa ragione nell' equazione ſeguente

$$x^2(a+bx^n)ddz' + x(e'-2a+b(f'-2b)x^n)dxdz'$$

$$+(2a+2bx^n)z'dx^2 = 0$$

cioè nella ſeguente, facendo $e'-2a = e''$, $f'-2b = f''$,

$$(E''') \ldots\ldots x^2(a+bx^n)ddz' + x(e''+f''x^n)dxdz'$$

$$+(2a+2bx^n)z'dx^2 = 0$$

e così ſucceſſivamente. Dunque dopo m trasformazioni ſi perverrà all' equazione

$$(E^m) \ldots\ldots x^2(a+bx^n)ddz^{m-1} + x\Big(e - 2ma$$

$$+(f-2mb)\,x^n\Big)dxdz^{m-1}$$

$$+(2a+2bx^n)z^{m-1}dx^2 = 0$$

della forma di (Δ'). Ma fatte due equazioni dell' equazione (E^m) col metodo adoperato nel I. *Art.*, ſi troverà ch' ella è integrabile qualvolta ſi verifichino queſte equazioni

$$(2m+4)a - e = 0;\ (2m+4)b - e = 0$$

Dunque generalmente in tutti queſti caſi ſarà integrabile completamente l' equazione (Δ'), eſſendo m numero intero e poſitivo.

Nello ſteſſo modo mettendo nell' equazione (Δ) $M = 0$, $-2a$ in luogo di g, $-2b$ in luogo di h, onde ſoddisfare all' equazione (F'), ſi troverà che l' equazione

$$(\Delta'') \ldots\ldots x^2(a+bx^n)ddy + (e+fx^n)dxdy$$

$$-(2a+2bx^n)ydx^2 = 0$$

con la ſoſtituzione $y = \frac{z}{x}$ ſi trasforma prima nell' equazione

(H)

$$(H)\ldots\ldots x^2(a+bx^n)ddz+x\left(e-2a+(f-2b)x^n\right)dxdz$$
$$-\left(e+fx^n\right)zdx^2=0$$

queſta con la ſoſtituzione $z=\frac{z'}{x}$ nell' equazione

$$(H')\ldots x^2(a+bx^n)ddz'+x\left(e-4a+(f-4b)x^n\right)dxdz'$$
$$-(e+fx^n)z'dx^2=0$$

e così ſucceſſivamente, ſicchè dopo m trasformazioni ſi perviene all' equazione

$$(H^m)\ldots x^2(a+bx^n)ddz^m+x\left(e-2am+(f-2bm)x^n\right)dxdz^m$$
$$-(e+fx^n)z^mdx^2=0$$

la quale eſſendo integrabile (*Art. I.*) ognivolta che ſi verifichino le ſeguenti equazioni

$$(m+1)a-e=0;\ (m+1)b-f=0$$

lo ſarà pure negli ſteſſi caſi l' equazione (Δ''). E finalmente procedendo nella ſteſſa guiſa ſi dedurrà che l'equazione (Δ''')

$$(\Delta''')\ldots x^2(a+bx^n)ddy+x(2a+2bx^n)dxdy+(g+hx^n)ydx^2=0$$

è integrabile qualora ſi verifichino le due equazioni

$$2am+g=0;\ 2bm+f=0.$$

E queſto per ora baſti intorno all' equazione (Δ). Il che ecc.

PROPOSIZIONE X.

§. XX. *Svolgere infiniti caſi d' integrabilità dell' equazione*

$$(Q)\ldots\ldots x^{\Phi+3}(a+bX)ddy+x^{\Phi+2}(e+fX)dxdy$$
$$+x^{\Phi+1}(g+hX)ydx^2-Mdx^2=0$$

in cui M, X *ſono funzioni di* x *qualunque*, φ a b e f ecc. *coſtanti a piacere*.

RISOLUZIONE.

I. Suppongaſi $y=\frac{v}{x^{\Phi+1}}$. Fatta queſta ſoſtituzione nell' equazione (Q), ne riſulterà l' equazione (R)

$$(R)\ldots(a+bX)\left(x^2ddv-2(\phi+1)xdvdx+(\phi+1)(\phi+2)vdx^2\right)$$

$$+(e+fX)\big(xdvdx-(\phi+1)vdx^2\big)+(g+hX)vdx^2$$

$$-Mdx^2=0$$

dalla quale ſe ne combinino due

$$(R')\ldots x^2(a+bX)ddv+x\big(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X\big)dvdx$$

$$=Mdx^2$$

$$(R'')\ldots a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g$$

$$+\big(b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h\big)X=0$$

Avendo poi fatto $dv=zdx$ nell' equazione (R''), ella ſi riduce all' equazione

$$x^2(a+bX)dz+x\big(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X\big)zdx=Mdx$$

la quale integrata ci ſomminiſtra $z=Z$ funzione di x contenente una coſtante arbitraria. Dunque

$$v=\text{coſt.}+\int Zdx\text{; e però } y=\text{coſ.}\,x^{-\phi-1}+x^{-\phi-1}\int Zdx$$

ſarà l' integrale completo dell' equazione ($\mathcal{Q}$) ſempre che ſi verifichino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g=0$$

$$b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h=0$$

II. Si ordini l' equazione (R) (*Art. preced.*) in queſto modo, facendo $M=0$, e moltiplicando tutto per $x^{\phi+1}$

$$x^{\phi+3}(a+bX)ddv+x^{\phi+2}\big(e-2a\phi-2a+(f-2b\phi-2b)X\big)dvdx$$

$$+x^{\phi+1}\big(a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g$$

$$+\big(b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h\big)X\big)vdx^2=0$$

sì che ſarà ella della forma ($\mathcal{Q}$) in ipoteſi di $M=0$.

Se dunque ſi faccia $e-2a\phi-2a=e'$, $f-2\phi b-2b=f'$, $a(\phi+1)(\phi+2)-e(\phi+1)+g=g'$, $b(\phi+1)(\phi+2)-f(\phi+1)+h=h'$, ſarà ella integrabile (*Art. I.*) qualvolta ſi verifichino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e'(\phi+1)+g'=0$$

$$b(\phi+1)(\phi+2)-f'(\phi+1)+h'=0$$

e però negli ſteſſi caſi lo ſarà pure l' equazione ($\mathcal{Q}$) ſuppoſto $M=0$, indi (*§. VIII.*) ſuppoſto M funzione di x. Ma ponendo $\frac{v'}{x^{\phi+1}}$ in luogo di v, l' equazione

$$x^{\phi+3}(a+bX)ddv+x^{\phi+2}(e'+fX)dvdx$$

$$+x^{\phi+1}(g'+h'X)vdx^2=0$$

ſi trasforma come prima in queſta

$$x^{\phi+3}(a+bX)ddv'+x^{\phi+2}\big(e'-2a\phi-2a+(f'-2b\phi-2b)X\big)dxdv'$$

$$+x^{\phi+1}\big(a(\phi+1)(\phi+2)-e'(f+1)+g'$$

$$+\big(b(\phi+1)(\phi+2)-f'(\phi+1)+h'\big)X\big)v'dx^2=0$$

la quale, poſto $e'-2a\phi-2a=e''$, $f'-2b\phi-2b=f''$

$a(\phi+1)(\phi+2)-e'(\phi+1)+g'=g''$, $b(\phi+1)(\phi+2)-f'(\phi+1)+h'=h''$, è integrabile ognivolta che abbiano luogo le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e''(\phi+1)+g''=0$$

$$b(\phi+1)(\phi+2)-f''(\phi+1)+h''=0$$

Dunque negli ſteſſi caſi lo ſarà pure l' equazione ($\mathcal{Q}$) ; e così ſucceſſivamente. In conſeguenza progredendo in queſto modo dopo m trasformazioni, ſi conchiuderà, che l' equazione ($\mathcal{Q}$) è generalmente integrabile qualvolta ſi verifichino le due equazioni

$$a(\phi+1)(\phi+2)-e^{m}(\phi+1)+g^{m}=0$$

$$b(\phi+1)(\phi+2)-f^{m}(\phi+1)+h^{m}=0$$

Ed è ben facile coſa l' ottenere le forme e^{m}, f^{m}, g^{m}, h^{m} in e, f, g, h con le ſoſtituzioni ſucceſſive, eſſendo generalmente

$$e^{m}=e^{m-1}-2a\phi-2a,\quad f^{m}=f^{m-1}-2b\phi-2b$$

$$g^{m}=a(\phi+1)(\phi+2)-e^{m-1}(\phi+1)+g^{m-1},$$

$$h^{m}=b(\phi+1)(\phi+2)-f^{m-1}(\phi+1)+h^{m-1}$$

III. Ma di nuovo a queſti infiniti caſi d' integrabilità dell' equazione ($\mathcal{Q}$) altri infiniti poſſono aggiugnerſi, come ſi è fatto nell' antecedente Propoſizione, ricavando tre paja di equazioni dall' equazione (R), e procedendo in modo analogo a quello del §. XIX. Art. III., coſa, cui m' aſtengo dal fare, non implicando alcuna difficoltà.

SCOLIO.

§. XXI. L' equazione (Δ) della Prop. IX. non è che un caſo ben particolare di queſta, com' è manifeſto, cioè quando $X = x^n$, $\phi = -1$. Ma ſi può eſtendere il metodo, come ho accennato di ſopra, ad una più grande generalità cioè a tutti i gradi di queſta ſpeciale natura di equazioni differenziali.

PROPOSIZIONE XI.

§. XXII. *Svolgere infiniti caſi d' integrabilità dell' equazione* (A)

$$(A)\quad \mathrm{M}dx^n = x^{m+1}(a+bX)ydx^n + x^{m+2}(c+eX)dydx^{n-1}$$
$$+\,x^{m+3}(f+gX)ddydx^{n-2} + x^{m+4}(h+KX)d^3ydx^{n-3}$$
$$+\,x^{m+5}(l+pX)d^4ydx^{n-4} + \text{ecc.}$$

in cui M, X *ſono funzioni di* x, a b c e ecc. m *coſtanti a piacere.*

RISOLUZIONE.

Si faccia $y = \frac{v}{x^{m+1}}$. Soſtituito queſto valore nell' equazione (A) prende ella la forma (A')

$$(A') \ldots Mdx^n = (a+bX)vdx^n$$
$$+(c+eX)\left(xdvdx^{n-1} - (m+1)vdx^n\right)$$
$$+(f+gX)\left(x^2ddvdx^{n-2} - 2(m+1)xdvdx^{n-1}\right.$$
$$\left.+(m+1)(m+2)vdx^n\right)$$
$$+(h+KX)\left(x^3d^3vdx^{n-3} - 3(m+1)x^2ddvdx^{n-2}\right.$$
$$\left.+3(m+1)(m+2)xdvdx^{n-1} - (m+1)(m+2)(m+3)vdx^n\right)$$
$$+(l+pX)\left(x^4d^4vdx^{n-4} - 4(m+1)x^3d^3vdx^{n-3}\right.$$
$$+6(m+1)(m+2)x^2ddvdx^{n-2}$$
$$\left.-4(m+1)\ldots(m+3)xdvdx^{n-1} + (m+1)\ldots(m+4)vdx^n\right)$$

$$+(q+rX)\Big(x^5d^5vdx^{n-5}-5(m+1)x^4d^4vdx^{n-4}$$

$$+10(m+1)(m+2)x^3d^3vdx^{n-3}$$

$$-10(m+1)\ldots(m+3)x^2ddvdx^{n-2}$$

$$+5(m+1)\ldots(m+4)xdvdx^{n-1}-(m+1)\ldots(m+5)vdx^n\Big)$$

$$+\text{ecc.}$$

Da queſta equazione ſe ne combinino tre nel ſeguente modo

$$(B)\ldots Mdx^n=xdvdx^{n-1}\Big(c-2f(m+1)+3h(m+1)(m+2)$$

$$-4l(m+1)(m+2)(m+3)+5q(m+1)\ldots(m+4)-\text{ecc.}$$

$$+\Big(e-2g(m+1)+3K(m+1)(m+2)-4p(m+1)\ldots(m+3)$$

$$+5r(m+1)\ldots(m+4)-\text{ecc.}\Big)X\Big)$$

$$+x^2ddvdx^{n-2}\Big(f-3h(m+1)+6l(m+1)(m+2)$$

$$-10q(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}+\Big(g-3K(m+1)$$

$$+6p(m+1)(m+2)-10r(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}\Big)X\Big)$$

$$+x^3d^3vdx^{n-3}\Big(h-4l(m+1)+10q(m+1)(m+2)-\text{ecc.}$$

$$+\Big(K-4p(m+1)+10r(m+1)(m+2)-\text{ecc.}\Big)X\Big)$$

$$+\text{ecc.}$$

$$(C)\ldots a-(m+1)c+(m+1)(m+2)f-(m+1)(m+2)(m+3)h$$

$$+(m+1)\ldots(m+4)l-(m+1)\ldots(m+5)q+\text{ecc.}=0$$

$$(C)\ldots b-(m+1)e+(m+1)(m+2)g-(m+1)(m+2)(m+3)K$$

$$+(m+1)\ldots\ldots(m+4)p-(m+1)\ldots\ldots(m+5)r+\text{ecc.}=0$$

E' certo che avendo luogo le equazioni (C), l' integrazione dell' equazione (A) dipende dall' integrazione dell' equazione (B), cioè dell' equazione (B')

$$(B')\ldots Mdx^{n-1}=xv'dx^{n-1}\big(c-2f(m+1)+\text{ecc.}\big)$$

$$+x^2dv'dx^{n-2}\big(f-3h(m+1)+\text{ecc.}\big)$$

$$+x^3ddv'dx^{n-3}\big(h-4l(m+1)+\text{ecc.}\big)+\text{ecc.}$$

in cui ſi trasforma l' equazione (B), poſto $dv=v'dx$, e che è inferiore di un' unità all' equazione (A), cioè del grado $m-1$.

Di nuovo l' equazione (B') con la ſoſtituzione $v' = \frac{v''}{x}$ ſi cangia in queſta

$$
\begin{aligned}
(B'') \ldots Mdx^{n-1} = v''dx^{n-1} \Big(& c - 2f(m+1) + 3h(m+1)(m+2) \\
& - 4l(m+1) \ldots (m+3) + 5q(m+1) \ldots (m+4) - \text{ecc.} \\
& + \big(e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1) \ldots (m+3) \\
& + 5r(m+1) \ldots (m+4) - \text{ecc.}\big) X \Big) + \Big(f - 3h(m+1) \\
& + 6l(m+1)(m+2) - 10q(m+1)(m+2)(m+3) + \text{ecc.} \\
& + \big(g - 3K(m+1) + 6p(m+1)(m+2) \\
& - 10r(m+1) \ldots (m+3) + \text{ecc.}\big) X \Big) \left(xdv''dx^{n-2} - v''dx^{n-1} \right) \\
& + \Big(h - 4l(m+1) + 10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.} \\
& + \big(K - 4p(m+1) + 10r(m+1)(m+2) - \text{ecc.}\big) X \Big) \\
& \quad \left(x^2 ddv''dx^{n-3} - 2xdv''dx^{n-2} + 2v''dx^{n-1} \right) \\
& + \text{ecc.}
\end{aligned}
$$

dalla quale combinandone ſimilmente tre, come ſegue,

$$
\begin{aligned}
(B''') \ldots Mdx^{n-1} = xdv''dx^{n-2} \Big(& f - 3h(m+1) + 6l(m+1)(m+2) \\
& - 10q(m+1) \ldots (m+3) + \text{ecc.} - 2h + 2.4l(m+1) \\
& - 2.10q(m+1)(m+2) + \text{ecc.} + \big(g - 3K(m+1) \\
& + 6p(m+1)(m+2) - 10q(m+1) \ldots (m+3) + \text{ecc.} \\
& - 2K + 2.4p(m+1) - 2.10r(m+1)(m+2) + \text{ecc.}\big) X \Big) \\
& + x^2 ddv''dx^{n-3} \Big(h - 4l(m+1) + 10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.} \\
& + \big(K - 4p(m+1) + 10r(m+1)(m+2) - \text{ecc.}\big) X \Big) \\
& + \text{ecc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(C') \ldots c & - 2f(m+1) + 3h(m+1)(m+2) - 4l(m+1) \ldots (m+3) \\
& + 5q(m+1) \ldots (m+4) - \text{ecc.} - f + 3h(m+1) \\
& - 6l(m+1)(m+2) + 10q(m+1) \ldots (m+3) - \text{ecc.} \\
& + 2h - 2.4l(m+1) + 2.10q(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0
\end{aligned}
$$

$$
(C') \ldots e - 2g(m+1) + 3K(m+1)(m+2) - 4p(m+1)(m+2)(m+3)
$$

$$\begin{aligned}
&+5r(m+1)\ldots(m+4)-\text{ecc.}-g+3K(m+1)\\
&-6p(m+1)(m+2)+10q(m+1)\ldots(m+3)-\text{ecc.}\\
&+2K-2\,.\,4p(m+1)+10r(m+1)(m+2)-\text{ecc.}=0
\end{aligned}$$

ſi può tornar a conchiudere, che ognora che ſi verifichino le relazioni (C), (C'), la riſoluzione dell' equazione (A) dipenderà da quella dell' equazione (B'''). Ma continuando ſimili trasformazioni, mentre il numero delle relazioni combinate tra coefficienti creſce, l' equazione da cui dipende ſucceſſivamente l' integrazione dell' equazione (A) va digradando, dimodochè dopo $n-1$ trasformazioni l' equazione ultima (B^{λ}) è di primo grado che ſi fa integrare generalmente.

Dunque l' equazione (A) è generalmente integrabile ognora che ſi verifichino $n-1$ equazioni di relazioni combinate (C), (C'), (C'').....($C^{\lambda-2}$).

II. Ma di nuovo ſi poſſono moltiplicare i caſi d' integrabilità dell' equazione (A) all' infinito. Imperciocchè vi ſi faccia $M=0$; l' equazione (A') (*Art. preced.*) in queſto caſo, eſſendo ordinata e moltiplicata per x^{m+1}, prende la ſteſſa forma di (A), cioè

$$\begin{aligned}
0=x^{m+1}\Big(&a-(m+1)c+(m+1)(m+2)f-(m+1)\ldots(m+3)h\\
&+(m+1)\ldots(m+4)l-(m+1)\ldots(m+5)q+\text{ecc.}\\
&+\Big(b-(m+1)e+(m+1)(m+2)g-(m+1)\ldots(m+3)K\\
&+(m+1)\ldots(m+4)p-(m+1)\ldots(m+5)r+\text{ecc.}\Big)X\Big)vdx^{n}\\
&+x^{m+2}\Big(c-2f(m+1)+3h(m+1)(m+2)\\
&-4l(m+1)\ldots(m+3)+5q(m+1)\ldots(m+4)-\text{ecc.}\\
&+\Big(e-2g(m+1)+3K(m+1)(m+2)-4p(m+1)\ldots(m+3)\\
&+5r(m+1)\ldots(m+4)-\text{ecc.}\Big)X\Big)dvdx^{n-1}\\
&+x^{m+3}\Big(f-3h(m+1)+6l(m+1)(m+2)\\
&-10q(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}+\Big(g-3K(m+1)\\
&+6p(m+1)(m+2)-10r(m+1)\ldots(m+3)\\
&+\text{ecc.}\Big)X\Big)ddvdx^{n-2}+\text{ecc.}
\end{aligned}$$

cioè la forma (A'')

$$(A'')\ldots 0 = x^{m+1}(a'+b'X)v\,dx^{n} + x^{m+2}(c'+e'X)dv\,dx^{n-1} + x^{m+3}(f'+g'X)ddv\,dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

poſto

$$a' = a-(m+1)c+(m+1)(m+2)f-(m+1)\ldots(m+3)h+\text{ecc.}$$

$$b' = b-(m+1)e+(m+1)(m+2)g-(m+1)\ldots(m+3)K+\text{ecc.}$$

$$c' = c-2f(m+1)+3h(m+1)(m+2)-4l(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}$$

$$e' = e-2g(m+1)+3K(m+1)(m+2)-4p(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}$$

ecc.

Similmente l'equazione (A'') con la ſoſtituzione $v = \frac{v'}{x^{m+1}}$ ſi trasforma nell' equazione (A''')

$$(A''')\ldots 0 = x^{m+1}(a''+b''X)v'dx^{n} + x^{m+2}(c''+e''X)dv'dx^{n-1} + x^{m+3}(f''+g''X)ddv'dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

facendo

$$a'' = a'-(m+1)c'+(m+1)(m+2)f'-(m+1)\ldots(m+3)h'+\text{ecc.}$$

$$b'' = b'-(m+1)e'+(m+1)(m+2)g'-(m+1)\ldots(m+3)K'+\text{ecc.}$$

$$c'' = c'-2f(m+1)+3h'(m+1)(m+2)-4l'(m+1)\ldots(m+3)+\text{ecc.}$$

e queſta, con la ſoſtituzione $v' = \frac{v''}{x^{m+1}}$, nell'equazione (A'''')

$$(A'''')\ldots 0 = x^{m+1}(a'''+b''X)v''dx^{n} + x^{m+2}(c'''+e'''X)dv''dx^{n-1} + x^{m+3}(f''+g'''X)ddv''dx^{n-2} + \text{ecc.}$$

facendo

$$a''' = a''-(m+1)c''+(m+1)(m+2)f''-(m+1)\ldots(m+3)h''+\text{ecc.}$$

$$b''' = b''-(m+1)e''+(m+1)(m+2)g''-(m+1)\ldots(m+3)K''+\text{ecc.}$$

ecc. e così all' infinito.

Se dunque l' equazione (A) s' integra generalmente per l' Articolo preced. ognora che abbia luogo il ſiſtema di relazioni tra' coefficienti (C), (C'), ... $(C^{\lambda-2})$, per la ſteſſa ragione potrà generalmente integrarſi l' equazione (A''), ſempre che ſi verifichi il ſeguente ſiſtema di relazioni

$$(CC)\ldots a'-(m+1)c'+(m+1)(m+2)f' -(m+1)\ldots(m+3)h'+\text{ecc.} = 0$$

$$(CC)\ldots b' - (m+1)e' + (m+1)(m+2)g'$$
$$- (m+1)\ldots(m+3)K' + \text{ecc.} = 0$$

$$(C'C')\ldots c' - 2f'(m+1) + 3h'(m+1)(m+2)$$
$$- 4l(m+1)\ldots(m+3) + \text{ecc.} = 0$$
$$(C'C')\ldots e' - 2g'(m+1) + 3K(m+1)(m+2)$$
$$- 4p(m+1)\ldots(m+3) + \text{ecc.} = 0$$
ecc.

Nello ſteſſo modo ſi può conchiudere, che l'equazione (A''') potrà integrarſi qualvolta abbia luogo il ſeguente ſiſtema di relazioni

$$(CCC)\ldots\ldots a'' - (m+1)c'' + (m+1)(m+2)f''$$
$$- (m+1)\ldots(m+3)h'' + \text{ecc.} = 0$$
$$(CCC)\ldots\ldots b'' - (m+1)e'' + (m+1)(m+2)g''$$
$$- (m+1)\ldots(m+3)K'' + \text{ecc.} = 0$$

$$(C'C'C')\ldots\ldots c'' - 2f''(m+1) + 3h''(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0$$
$$(C'C'C')\ldots\ldots e'' - 2g''(m+1) + 3K''(m+1)(m+2) - \text{ecc.} = 0$$
ecc.

E così ſucceſſivamente per tutte le altre trasformate (A''''), (A''''') ecc. all' infinito.

Dunque in tutti queſti infiniti ſiſtemi di relazione tra' coefficienti ſarà ſempre integrabile l' equazione generale

$$Mdx^n = x^{m+1}\left(a + bX\right)ydx^n + x^{m+2}\left(c + eX\right)dydx^{n-1}$$
$$+ x^{m+3}\left(f + gX\right)ddydx^{n-2} + \text{ecc.}$$

in ſuppoſizione di $M = 0$. Ma eſſendolo in queſta ſuppoſizione, lo ſarà pure in quella di M funzione di x qualunque (§. *VIII.*). Il che ecc.

DELLE PROGRESSIONI RECIPROCHE

DELLE POTENZE AFFETTE

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

E' Tanto impenetrabile il valore delle progreſſioni reciproche di queſta forma

$$\frac{1}{aK \pm b} \mp \frac{1}{aK^2 \pm b} + \frac{1}{aK^3 \pm b} \mp \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{1}{aK^n \pm b}$$

che l' illuſtre *Eulero* non dubitò di dire nel VI. Vol. de' primi Com. di Pietrob. pag. 97 „ *Quamvis vero hæc methodus tam late pateat, tamen innumeræ occurrere poſſunt progreſſiones per eam non ſummabiles, quarum quidem vel nullo alio modo ſummæ aſſignari poſſunt, ut hujus*

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{1}{2^n - 1}$, che è pur un caſo particolare e ſempliciſſimo della forma precedente. In fatti non ſappiamo ſinora nè trattarle, nè eſprimerle per alcun modo. Vo' credere pertanto non diſcaro a' Geometri il veder fatto un primo paſſo in queſto gineprajo, e ſuggettata la ſomma di queſta, e d' infinite altre progreſſioni di tal indole ad una qualche eſpreſſione finita. Non è facile per verità l' avviſarſi, che il maneggio di loro ſi riduce al far paſſaggio da quantità eſponenziali reali a' ſeni e coſeni d' archi immaginarj, ſe un' occaſione propizia non concorra a moſtrarcelo a dito. E tanto più che non è in uſo queſto paſſaggio come l' altro comune e trito dalle quantità eſponenziali immaginarie a' ſeni e coſeni d' archi reali. Ma reſtava ancora un nodo aſſai più difficile da ſciorſi, dovendo l' analiſta rintracciare un metodo in appreſſo, onde ſommare le ſerie reciproche de' ſeni e coſeni, che mancava totalmente. Così foſſe tra' vivi quel gran Maeſtro, cui le Scienze Matematiche, l' Analiſi più fina e complicata, e il più de' Geometri viventi d' ogni Nazione debbono i lumi più prezioſi, l' avanzamento attuale, e innumerabili aperture a' nuovi progreſſi, come ſon certo, che avrebbe onorato queſt' indagine di qualche attenzione.

§. I.

Sia la ſerie (μ)

$$(\mu)\ldots\ldots\frac{A}{K-1}+\frac{A}{K^2-1}+\frac{A}{K^3-1}\ldots\ldots\frac{A}{K^x-1}$$

in cui A è una quantità invariabile qualunque, K una quantità qualunque maggiore dell' unità, e x l'eſponente de' termini. Eſſendo arbitraria la baſe de' logaritmi, ſarà lecito il prendere per baſe logaritmica la grandezza K, che che ella ſiaſi, e ſarà ſempre $l.\,1=0$, $l.\,K=1$, $l.\,K^2=2$ ecc. e ſarà facile il paſſaggio dal ſiſtema de' logaritmi con la baſe K al ſiſtema comune delle Tavole. In conſeguenza, ſe ſia π la ſemicirconſerenza di un cerchio che ha l' unità per raggio, e la lettera ω rappreſenti la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$, ſarà pe' noti Canoni

$$\text{ſen.}\,m\pi=\left(K^{m\pi\omega}-K^{-m\pi\omega}\right):2\omega,\quad \text{coſ.}\,m\pi=\frac{1}{2}\left(K^{m\pi\omega}+K^{-m\pi\omega}\right);$$

e poſto $m\pi=\frac{x}{\omega}$, rappreſentando x una grandezza reale; ſarà $2\omega\,\text{ſen.}\,x:\omega=K^x-K^{-x}$, $2\,\text{coſ.}\,x:\omega=K^x+K^{-x}$, sì che ove nelle precedenti formule ſi eſprimono per quantità eſponenziali immaginarie ſeni e coſeni d' archi reali, in queſte ſono eſpreſſi ſeni e coſeni d' archi immaginarj per quantità eſponenziali reali. Ciò premeſſo ſi faccia paſſaggio dalle dirette alle eſpreſſioni reciproche, e ſarà

$$\frac{1}{2^{\omega}\,\text{ſen.}\,x:\omega}=\frac{1}{K^x-K^{-x}}=\frac{1}{K^{2x}-1};\quad \frac{1}{2\,\text{coſ.}\,x:\omega}=\frac{1}{K^{2x}+1}.$$

Ma $\frac{K^x}{K^{2x}-1}=\frac{K^x}{(K^x-1)(K^x+1)}$; dunque $\frac{K^x-1}{2\omega K^x\,\text{ſen.}\,x:\omega}$ $=\frac{1}{K^x+1}$; $\frac{K^x+1}{2\omega K^x\,\text{ſen.}\,x:\omega}=\frac{1}{K^x-1}$, e però eſſendo $\frac{1}{K^x\pm1}$ il termine generale di una ſerie, ſarà queſta ſerie uguale a quella, che ha $\frac{K^x\mp1}{2\omega K^x}\times\frac{1}{\text{ſen.}\,x:\omega}$ per termine generale, facendo che K rappreſenti la baſe logaritmica . Se dunque il ſimbolo $S.T$ eſprima la ſomma della ſerie, di cui T è il termine generale; ſarà generalmente

$$S.\frac{A}{K^x \pm 1} = S.\frac{A(K^x \mp 1)}{2\omega K^x} \times \frac{1}{\text{ſen.}\, x:\omega};\ S.\frac{AK^x}{K^{2x}-1} = S.\frac{A}{2\omega\,\text{ſen.}\, x:\omega};\ S.\frac{AK^x}{K^{2x}+1} = S.\frac{A}{2\,\text{coſ.}\, x:\omega}$$

§. II.

Ed ecco intanto la ſomma della ſerie del Sig. *Eulero*

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}\ldots\ldots\frac{1}{2^x-1}$$

felicemente ridotta alla ſomma d' una ſerie, che ha per termine generale $\frac{2^x+1}{\omega 2^{x+1}} \times \frac{1}{\text{ſen.}\, x:\omega}$, eſſendo il 2 la baſe de' logaritmi.

§. III.

Accignamoci ora a determinare la ſomma in genere delle ſerie aventi sì fatte eſpreſſioni per termine generale. E' noto che le ſerie reciproche de' ſeni, e coſeni ecc. d' archi procedenti in arimmetica progreſſione non erano ſtate tocche da alcuno, e molto meno nel caſo, che involgeſſero, come qui accade, moltiplicatori eſponenziali. Il primo cimento in queſta materia è quello, che ho fatto pubblico nel I. Vol. della *Società Italiana* nella Diſſertazione intorno alle ſerie al Cap. X. pag. 368, avendo ivi ridotto tali ſomme alle leggi del Calcolo Integrale. A quel metodo pertanto ſoggetteremo anche queſte più difficili, ed altre analoghe così, facendo vedere come da quelle eſpreſſioni integrali ſi paſſi non difficilmente a quantità ſviluppate, e finite. Si riprenda da quel luogo la formula

$$\int \frac{z^m + z^{n-m}}{1+z^n}\cdot\frac{dz}{z} = \frac{\pi}{n\,\text{ſen.}\,\frac{m\pi}{n}}$$

da integrarſi da $z=0$ ſino a $z=1$, in cui π è la ſemicirconſerenza di un cerchio, che ha l' unità per raggio. Facendo $n=1$, $m\pi=x:\omega$, come nel I. §., e poſto $\omega\pi=a$ per ſemplicità, ſi avrà generalmente

$$\frac{A}{\pi}\int\frac{z^{x:a}+z^{1-x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{A}{\text{ſen.}\,x:\omega}$$

In conſeguenza (§. *I.*)

$$(P)\ldots\frac{A}{2a}\int\frac{z^{x:a}+z^{1-x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}\pm\frac{A}{2aK^{x}}\int\frac{z^{x:a}+z^{1-x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{z^{x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}+\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1-x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}\pm\frac{A}{2aK^{x}}\int\frac{z^{x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$\pm\frac{A}{2aK^{x}}\int\frac{z^{1-x:a}}{1+z}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{A}{K^{x}\mp1},$$ poſta K qualunque la baſe de' logaritmi. Ora ſi richiami il metodo noſtro di ſommare le ſerie citato qui ſopra, e però ſi moltiplichi, e ſi divida il primo termine per $1-z^{1:a}$, il ſecondo per $1-z^{-1:a}$ ſotto il ſegno integrale. Sarà

$$(Q)\ldots\frac{A}{2a}\int\frac{z^{x:a}}{(1-z^{1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{A}{2a}\int\frac{z^{x:a+1:a}}{(1-z^{1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

la forma differenziale del primo; e la forma differenziale del ſecondo ſarà

$$(R)\ldots\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1-x:a}}{(1-z^{-1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1-x:a-1:a}}{(1-z^{-1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}.$$

Similmente ſi moltiplichi, e ſi divida il terzo termine per $1-\frac{z^{1:a}}{K}$, il quarto per $1-\frac{z^{-1:a}}{K}$ ſotto il ſegno integrale; ſi avrà per forma differenziale del terzo la ſeguente eſpreſſione

$$(S)\ldots\pm\frac{A}{2aK^{x}}\int\frac{z^{x:a}}{(1-z^{1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$\mp\frac{A}{2aK^{x+1}}\int\frac{z^{x:a+1:a}}{(1-z^{1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

e la ſeguente

$$(T)\ldots\ldots \pm \frac{A}{2aK^x}\int \frac{z^{1-x:a}}{(1-z^{-1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$\mp \frac{A}{2aK^{x+1}}\int \frac{z^{1-x:a-1:a}}{(1-z^{-1:a}:K)(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}$$

per forma differenziale del quarto. Si faccia $x=1$ ne' primi termini de' primi binarj $(\mathfrak{Q})$ (R), e riducendo ſarà l'eſpreſſione (D)

$$\frac{A}{2a}\int \frac{(z^{1:a}+z^{1-x:a})(1-z^{x:a})}{(1-z^{1:a})(1+z)}\cdot\frac{dz}{z}\ldots\ldots(D)$$

la ſomma generale della ſerie avente per termine generale il primo termine della formula (P). Operando ſimilmente ſopra i ſecondi binarj (S), (T), ſi troverà eſſere l' eſpreſſione ridotta (E)

$$\pm\frac{A}{2aK^x}\int\left(\frac{z^{1:a}(K^x-z^{x:a})}{(K-z^{1:a})(1+z)}+\frac{z^{1-x:a}(K^xz^{x:a}-1)}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\right)\frac{dz}{z}\ldots(E)$$

la ſomma generale della ſerie avente per termine generale il ſecondo termine della formula (P). Dunque col mezzo delle due eſpreſſioni (D), (E) nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione ſi otterrà la ſomma generale della ſerie di cui è termine generale $\frac{A}{K^x\mp 1}$; e poſto poi $x=\infty$ ſi avrà la ſomma della ſerie all' infinito, ch' è il caſo in quiſtione.

Ora eſſendo $a=\omega\pi=\pi\sqrt{-1}$, e $x:a=x:\pi\sqrt{-1}$ lo ſteſſo che $\frac{-x\sqrt{-1}}{\pi}$, la formula (D) diverrà

$$\frac{A}{2a}\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{x\omega:\pi})(1-z^{x:\omega\pi})\,dz}{(1-z^{1:a})(1+z)}$$

e nel caſo contemplato di $x=\infty$, eſſendo z prima dell'integrazione minore dell' unità, tanto $z^{x\omega:\pi}$ quanto $z^{x:\omega\pi}$ ſarà ſotto il ſegno quantità infinitamente piccola, e però per le ſerie all' infinito l' eſpreſſione (D) prenderà la forma

$$\frac{A}{2a}\int\frac{z^{1:a-1}dz}{(1-z^{1:a})(1+z)}\ldots\ldots(M)$$

Nello ſteſſo modo proveremo, che l' eſpreſſione (E) diverrà

$$\pm \frac{A}{2aK^n}\int\left(\frac{K^n z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}+\frac{K^n dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\right)=$$

$$\pm \frac{A}{2a}\int\frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}\pm\frac{A}{2a}\int\frac{dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\ldots(N)$$

nel caſo di $x=\infty$

§. IV.

Il paſſo fatto è quello pertanto di eſſere da neſſuna immaginabile eſpreſſione finita pervenuti a trovarne una per queſta ſorta di progreſſioni, che può almeno coſtruirſi e ridurſi a rettificazione, o quadratura finita di qualche curva, ſe ſi voleſſe, eſſendo ſtraniſſima preteſa il volere, che tutto ſi abbia a ridurre a funzioni d' archi o d' iperbole comuni, quaſi tutte le traſcendenze doveſſero eſſere di una ſola natura. Se foſſe lecito il traſcurare un reſiduo finito nelle diviſioni ſpinte all' infinito, le formule trovate potrebbero trasformarſi in funzioni traſcendenti familiari in queſto modo. Si faccia $z^{1:a}=y$, e farà

$$\int\frac{z^{1:a-1}dz}{(1-z^{1:a})(1+z)}=\int\frac{ady}{(1-y)(1+y^a)}=\int\frac{ady}{1+y^a-y-y^{a+1}}$$

Ma la frazione

$$\frac{1}{-y^{a+1}-y+y^a+1}=-\frac{1}{y^{a+1}}+\frac{1}{y^{2a+1}}-\frac{1}{y^{3a+1}}+\frac{1}{y^{4a+1}}-\text{ecc.}$$

non computando l' ultimo reſiduo $\frac{1}{y}$ che riſulta inoltrando all' infinito la diviſione. Moltiplicando dunque per ady, e integrando ſi avrà

$\frac{y^{-a}}{1}-\frac{y^{-2a}}{2}+\frac{y^{-3a}}{3}-\frac{y^{-4a}}{4}+$ ecc.; ſoſtituendo il valore di y in z, e ponendo $z=1$, perchè meſſo $z=0$, tutto ſvaniſce, ſi avrà (μ) pel valore della formula (D) nel caſo di $x=\infty$, e di $z=1$ dopo l' integrazione, cioè della formula (M)

$$\frac{A}{2a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{ecc.}\right)\ldots\ldots(\mu)$$

Ma K è la baſe, che abbiamo aſſunto pe' logaritmi iperbolici ; ed è noto, che prendendo nelle tavole ordinarie il logaritmo iperbolico L di qualunque quantità K, e il logaritmo pure d' altra quantità qualſivoglia m, ſe ſi divida il $l.m$ per L, il quoziente è il logaritmo iperbolico della quantità m con la baſe K.

Eſſendo dunque

$$l.2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\ \text{ecc. con la baſe}\ e = 2.718281828459\ \text{ecc.}$$

e $L = l.K$ con la ſteſſa baſe e, ſarà $\frac{l.2}{L} = \frac{l.2}{l.K}$ il logaritmo del numero 2 con la baſe K, cioè il valore della ſerie nel caſo noſtro. E perciò $\frac{A}{2a} \cdot \frac{l.2}{l.K} = \frac{Al.2}{2\pi\sqrt{-1}\ l.K}$ ſarebbe il valore per approſſimazione dell'eſpreſſione integrale (M), eſſendo π la ſemicirconferenza d' un cerchio avente l' unità per raggio. Paſſiamo ora dagli eſponenti immaginarj agli archi reali, e però eſſendo K la baſe de' logaritmi iperbolici, ſarà

$$K^{2\pi\sqrt{-1}\ l.K} = \text{coſ.}\ 2\pi l.K + \sqrt{-1}\ \text{ſen.}\ 2\pi l.K$$

$= (\text{coſ.}\ \pi l.K + \sqrt{-1}\ \text{ſen.}\ \pi l.K)^2$, e però facendo ripaſſaggio ai numeri, ſarà

$$2\pi\sqrt{-1}\ l.K = 2l.(\text{coſ.}\ \pi l.K + \sqrt{-1}\ \text{ſen.}\ \pi l.K)$$

Ma queſto logaritmo iperbolico è con la baſe K; dunque dividendolo per l.K riferito alla baſe comune e, ſi avrà finalmente pel valore dell' eſpreſſione (D) ne' caſi contemplati di $x = \infty$, e di $z = 1$, dopo l' integrazione, la formula (D')

$$(D') \ldots\ \frac{Al.2\ l.K}{2l.(\text{coſ.}\ \pi l.K + \sqrt{-1}\ \text{ſen.}\ \pi l.K)}$$

in cui K è il numero aſſoluto qualunque delle noſtre ſerie maggiore dell' unità, e i logaritmi ſono tutti gli ordinarj iperbolici riferiti alla baſe e.

Ma procedendo con un ſimile metodo integreremo per approſſimazione la formula (N) in queſta guiſa, traſcurando l' ultimo reſiduo giunta la diviſione all' infinito. Si faccia, come prima, $z^{1:a} = y$ nel primo membro, e ſi avrà

$z^{1:a-1}dz$

$$\int\frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}=\int\frac{ady}{Ky^a+K-y-y^{a+1}}\text{, e però}$$

$$\frac{1}{Ky^a+K-y-y^{a+1}}=\frac{1}{Ky^a}-\frac{1}{Ky^{2a}}+\frac{1}{Ky^{3a}}-\frac{1}{Ky^{4a}}+\text{ecc. all' in-}$$

finito. Moltiplicando dunque per ady, integrando, ſoſtituendo il valore per y in z, e ponendo $z=1$, ſarà in queſto caſo

$$\int\frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}=\frac{a}{K}\left(\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-2a}+\frac{1}{1-3a}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1-4a}+\text{ecc.}\right).$$

Similmente eſſendo pel ſecondo membro

$$\frac{1}{Kz^{1:a+1}+Kz^{1:a}-1-z}=\frac{1}{Kz^{1:a+1}}-\frac{1}{Kz^{1:a+2}}+\frac{1}{Kz^{1:a+3}}-\text{ecc.}$$

all' infinito, ſarà moltiplicando per dz, e integrando da $z=0$ ſino a $z=1$

$$\int\frac{dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}=-\frac{a}{K}+\frac{a}{K}\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+3a}-\text{ecc.}\right);$$

dunque $\int\left(\frac{z^{1:a-1}dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}+\frac{dz}{(Kz^{1:a}-1)(1+z)}\right)$ uguaglierà nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$-\frac{a}{K}+\frac{a}{K}\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1-2a}-\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1-3a}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+3a}-\text{ecc.}\right)=-\frac{a}{K}+\frac{2a}{K}\left(\frac{1}{(1-a)(1+a)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(1-2a)(1+2a)}+\frac{1}{(1-3a)(1+3a)}-\text{ecc.}\right)$$

Si ricorra pertanto al metodo noſtro di ſommare le ſerie (Mem. della *Soc. Italiana* Vol. I. Probl. XI.), e ſi tragga pel caſo di due ſattori al denominatore l' integrale per la ſomma generale di queſta ſerie a ſegni alternativi

$$\frac{1}{nq}\int\overline{z^{p:q-m:n-1}dz\int\overline{z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^x}{1+z}\right)}}$$

il quale per la ſomma all' infinito, eſſendo ſpezzato e ridotto, ſi trasforma in queſto

$$\frac{1}{nq\left(\frac{p}{q}-\frac{m}{n}\right)}\int\frac{(z^{m:n}-z^{p:q})dz}{1+z}$$

da integrarſi da $z=0$ fino a $z=1$.

Ora nel caſo noſtro, eſſendo nel termine generale $\frac{1}{(m+nx)(p+qx)}=\frac{1}{(1-ax)(1+ax)}$, $m=p=1$, $n=-a$, $q=a$, l' integrale diverrà $-\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{-1:a}-z^{1:a})dz}{1+z}$. Ma queſt' integrale naſce dalla differenza de' due ſeguenti integrali $+\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{1:a})dz}{1+z}-\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{-1:a})dz}{1+z}$; ed è poi $\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{1:a})dz}{1+z}=\int z^{1:a-1}dz=az$, $=a$, poſto $z=1$, e in ſimil caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{(z^{1:a-1}+z^{-1:a})dz}{1+z}=\frac{\pi}{\text{ſen.}\,\pi:a}$$

(Com. nuovi di *S. Pietrob.* Vol. XIX. pag. 32.). Dunque l' integrale noſtro $-\frac{1}{2a}\int\frac{(z^{-1:a}-z^{1:a})dz}{1+z}=-\frac{\pi}{2a\,\text{ſen.}\,\pi:a}+\frac{1}{2}$.

In conſeguenza queſto ſarà pure il valore della noſtra ſerie

$$\frac{1}{(1-a)(1+a)}-\frac{1}{(1-2a)(1+2a)}+\text{ecc.}\ldots\frac{1}{(1-ax)(1+ax)}$$

e perciò

$$-\frac{a}{K}+\frac{2a}{K}\left(\frac{1}{(1-a)(1+a)}-\frac{1}{(1-2a)(1+2a)}+\text{ecc.}\right)$$

$$=-\frac{a}{K}+\frac{2a}{K}\left(\frac{-\pi}{2a\,\text{ſen.}\,\pi:a}+\frac{1}{2}\right)=\int\left(\frac{z^{1:a-1}\,dz}{(K-z^{1:a})(1+z)}\right.$$

$+ \frac{dz}{(Kz^{1:a} - 1)(1 + z)}$), poſto $z = 1$ dopo l' integrazione.

Ma moltiplicando per $\pm \frac{A}{2a}$ queſt' eſpreſſione integrale, ſi ha l' eſpreſſione ſuperiore (N), cioè l' eſpreſſione (E) nel caſo di $x = \infty$. Dunque il valore di quell' eſpreſſione nel caſo di $x = \infty$, e di $z = 1$ dopo l' integrazione ſarà

$$\pm \frac{A}{2a}\left(- \frac{A}{K} + \frac{2a}{K} \left(\frac{-\pi}{2a \text{ ſen. } \pi : a} + \frac{1}{2} \right) \right) = \mp \frac{A\pi}{2aK \text{ ſen. } \pi : a}$$

e poſto per a il ſuo valore $\pi\sqrt{-1}$ ſi avrà

$$\mp \frac{A}{2K\sqrt{-1} \text{ ſen. } \pi : \sqrt{-1}}.$$

Ma è K la baſe de' logaritmi per ſuppoſizione; dunque paſſando dagli archi immaginarj alle quantità eſponenziali reali, come nel principio di queſto §., ſarà

$$\mp \frac{A}{2K\sqrt{-1} \text{ ſen. } \pi\sqrt{-1}} = \mp \frac{AK}{K(K^2 - 1)} = \mp \frac{A}{K^2 - 1} \dots (E')$$

e perciò per un' approſſimazione ſarà

$$(D') \mp (E') = S. \frac{A}{K^x \mp 1}$$

§. V.

Ma contentandoci della riduzione ſcoperta al §. III., e ripigliando le ſomme eſatte, ſarà $(M) + (N)$ la ſomma della ſerie

$$\frac{A}{K - 1} + \frac{A}{K^2 - 1} + \frac{A}{K^3 - 1} + \text{ecc.} \dots\dots \frac{A}{K^x - 1}$$

e $(D) + (E)$ la ſomma generale; sì che poſto $A = 1$, $K = 2$, ſi avrà toſto la ſomma della ſerie del Sig. *Eulero*, e $(M) - (N)$ la ſomma della ſerie

$$\frac{A}{K + 1} + \frac{A}{K^2 + 1} + \frac{A}{K^3 + 1} + \text{ecc.} \dots\dots \frac{A}{K^x + 1}$$

e $(D) - (E)$ la ſomma generale. Parimenti ſommando, e riducendo ſarà (M) la ſomma della ſerie

$$\frac{AK}{K^2-1}+\frac{AK^2}{K^4-1}+\frac{AK^3}{K^6-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^x}{K^{2x}-1}$$

e (D) la ſomma generale.

E perchè $\frac{A}{K^x-1}-\frac{A}{K^x+1}=\frac{2A}{K^{2x}-1}$, ſarà (N) la ſomma della ſerie

$$\frac{A}{K^2-1}+\frac{A}{K^4-1}+\frac{A}{K^6-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{A}{K^{2x}-1}$$

ed (E) la ſomma generale.

§. VI.

Eſſendo poi $\frac{A}{K^x-1}+A=\frac{AK^x}{K^x-1}$, e $A-\frac{A}{K^x+1}=\frac{AK^x}{K^x+1}$, ſi avrà l' aggregato $(D)+(E)+Ax$ per ſomma generale della ſerie

$$\frac{AK}{K-1}+\frac{AK^2}{K^2-1}+\frac{AK^3}{K^3-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^x}{K^x-1}$$

e l' aggregato $Ax-(D)+(E)$ ſarà la ſomma generale della ſerie

$$\frac{AK}{K+1}+\frac{AK^2}{K^2+1}+\frac{AK^3}{K^3+1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^x}{K^x+1}$$

In conſeguenza $Ax+(E)$ ſarà la ſomma generale della ſerie

$$\frac{AK^2}{K^2-1}+\frac{AK^4}{K^4-1}+\frac{AK^6}{K^6-1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^{2x}}{K^{2x}-1}$$

§. VII.

Di nuovo eſſendo

$$\frac{1}{\text{ſen.}\,\frac{\pi(p-x)}{2p}}=\frac{1}{\text{coſ.}\,\frac{\pi x}{2p}}$$

ſe ſi faccia $2p=\pi\omega=a$ (§. *III.*), ſarà

$$\frac{1}{\text{ſen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=\frac{1}{\text{coſ.}\,x:\omega}$$

Dunque $S.\frac{1}{\text{ſen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=S.\frac{1}{\text{coſ.}\,x:\omega}$, e però moltiplicando i membri per $\frac{A}{2\omega}$ ſarà parimenti

$$S.\frac{A}{2\omega\,\text{ſen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=\frac{1}{\omega}S.\frac{A}{2\,\text{coſ.}\,x:\omega}$$

Ora eſſendo l' eſpreſſione (D) (§. V.) la ſomma generale della ſerie, che ha per termine generale $\frac{AK^x}{K^{2x}-1}=\frac{A}{2\omega\,\text{ſen.}\,x:\omega}$ (§. I.), ſe ſi metta in (D) $\frac{a}{2}-x$ in luogo di x sì che (D) diventi $(D_{,})$, ſarà

$$(D_{,})=S.\frac{A}{2\omega\,\text{ſen.}\left(\frac{a}{2}-x\right):\omega}=\frac{1}{\omega}S.\frac{A}{2\,\text{coſ.}\,x:\omega}$$

Ma $\frac{1}{2\,\text{coſ.}\,x:\omega}=\frac{AK^x}{K^{2x}+1}$ (§. I.). Dunque $\omega(D_{,})$ ſarà la ſomma generale della ſerie

$$\frac{AK}{K^2+1}+\frac{AK^2}{K^4+1}+\frac{AK^3}{K^6+1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{AK^x}{K^{2x}+1}$$

poſta K qualunque la baſe de' logaritmi iperbolici.

§. VIII.

Quindi poſſiamo ricavare il modo di ridurre a legge le ſomme di altre innumerabili ſerie, che non erano ſtate ſoggettate a verun calcolo per l' innanzi. Potremo pertanto ſommare la ſerie

$$\frac{AK^2}{K^2+1}+\frac{AK^4}{K^4+1}+\frac{AK^6}{K^6+1}\ldots\ldots\frac{AK^{2x}}{K^{2x}+1}$$

in queſto modo, qualunque coſa ſieno A e K, purchè K ſia maggiore dell' unità.

Eſſendo $\frac{\text{ſen.}\, x:\omega}{\text{coſ.}\, x:\omega}=\text{tang.}\, x:\omega$ ſi ſoſtituiſcano pel ſeno, e coſeno i valori corriſpondenti eſponenziali, poſta K la baſe de' logaritmi iperbolici, e ſarà

$$\text{tang.}\, x:\omega=\frac{1}{\omega}\left(\frac{K^x-K^{-x}}{K^x-K^{-x}}\right)=\frac{1}{\omega}\left(\frac{K^{2x}-1}{K^{2x}+1}\right)$$

Ma la ſomma della ſerie

$$\text{tang.}\, 1:\omega+\text{tang.}\, 2:\omega+\text{tang.}\, 3:\omega\ldots\ldots\text{tang.}\, x:\omega$$

è $\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}dz(1-z^x)(z^{-x-1}-1)}{(1-z)(1-z^{\pi:a})}=(F)$

(Mem. della *Soc. Italiana* pag. 300.) poſta $a=1:\omega$; e ſe nelle due eſpreſſioni (D), (E) del §. III. ſi metta $2x$ in luogo di x, sì che (D) diventi (D''), (E) diventi (E''), ſi trova eſſere $(D'')-(E'')=AS.\frac{1}{K^{2x}+1}$. Dunque eſſendo

$\omega S.\,\text{tang.}\, x:\omega=S.\frac{K^{2x}}{K^{2x}+1}-S.\frac{1}{K^{2x}+1}$, ſarà

$$A\omega(F)+S.\frac{A}{K^{2x}+1}=S.\frac{AK^{2x}}{K^{2x}+1}=A\omega(F)+(D'')-(E'')$$

Ma ſi è trovato (§. VI.) $Ax-(D)+(E)=S.\frac{AK^x}{K^x+1}$; dunque mettendo, come qui innanzi, $2x$ in luogo di x, ſarà parimenti $2Ax-(D'')+(E'')=S.\frac{AK^{2x}}{K^{2x}+1}=A\omega(F)$ $+(D'')-(E'')$, e però avrà luogo nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione l' equazione ſeguente

$$2Ax-A\omega(F)-2(D'')+2(E'')=0$$

Similmente ſommeremo la ſerie

$$\frac{AK^3}{K^4-1}+\frac{AK^6}{K^8-1}+\frac{AK^9}{K^{12}-1}\ldots\ldots\frac{AK^{3x}}{K^{4x}-1}$$

giacchè il termine generale ſi riſolve ne' due termini generali particolari

$$\frac{AK^x}{2(K^{2x}-1)}+\frac{AK^x}{2(K^{2x}+1)}$$

ed è $\frac{1}{2}(D)=S.\frac{AK^x}{2K^{2x}-1}$ (§. V.), e $\frac{\omega}{2}(D_{,})=S.\frac{AK^x}{2(K^{2x}+1)}$ (§. VII.). Nello ſteſſo modo conſeguiremo la ſomma della ſerie

$$\frac{AK}{K^4-1}+\frac{AK^2}{K^8-1}+\frac{AK^3}{K^{12}-1}\dots\dots\frac{AK^x}{K^{4x}-1}$$

riſolvendoſi il termine generale di lei ne' due termini

$$\frac{AK^x}{2(K^{2x}-1)}-\frac{AK^x}{2(K^{2x}+1)}$$

§. IX.

Ma veggiamo di ſpignere più oltre la generalità per altra via, ſenza farlo a parte a parte combinando le eſpreſſioni ritrovate. Il faremo ſopra alcune forme principali, e reſterà così fatta ſtrada a chi voleſſe applicare il metodo a caſi particolari ſecondo l' occorrenza. Si ripigli perciò la formula $\frac{1}{2\omega\,\text{ſen.}\,x:\omega}=\frac{K^x}{K^{2x}-1}$ (§. I.), e poſto $p+qx$ in luogo di x, affinchè gli eſponenti poſſano procedere in qualunque progreſſione aritmetica, dando i valori convenienti a p, e q, ſommeremo generalmente le ſerie

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{2(p+q)}-1}+\frac{AK^{p+2q}}{K^{2(p+2q)}-1}+\text{ecc.}\dots\dots\frac{AK^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}-1}$$

Si ricorra dunque alla noſtra Memoria nel I. Vol. della *Società* pag. 369; ed eſſendoſi ivi determinata la ſomma della ſerie avente per termine generale $\frac{1}{\text{ſen.}\,(p+qx)\,a}$, vi ſi metta $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a, e ſi moltiplichi l' eſpreſſione per A, e la ſi divida per 2ω; ſarà

$$S.\frac{A}{2\omega\,\text{ſen.}\,(p+qx):\omega}=S.\frac{AK^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}-1}$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(1-z^{qx})(z^{p+q}+z^{\pi\omega-p-qx})}{(1-z^{q})(1+z^{\pi\omega})}\cdot\frac{dz}{z} = (\mathcal{Q})$$

Di nuovo eſſendo (§. I.) $\frac{1}{2\,\text{coſ.}\,x:\omega} = \frac{K^{x}}{K^{2x}+1}$, e

$$S.\frac{1}{\text{coſ.}\,(p+qx)\,a} = \frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}+z^{p+q})}{(1-z^{q})(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z} = (R)$$

per ſemplicità di calcolo (ivi pag. 370), ſi metta $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a nell'eſpreſſione (R) sì che diventi (R'), $p+qx$ in luogo di x nell' eſpreſſione $\frac{1}{2\,\text{coſ.}\,x:\omega} = \frac{K^{x}}{K^{2x}+1}$, ſarà

$$S.\frac{A}{2\,\text{coſ.}\,(p+qx):\omega} = \frac{A}{2}\,(R') = S.\,\frac{AK^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}+1},$$

ch'è la ſomma delle ſerie

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{2(p+q)}+1} + \frac{AK^{p+2q}}{K^{2(p+2q)}+1} + \text{ecc.}\ldots\ldots \frac{AK^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}+1}$$

§. X.

Inoltre ſommeremo con pari generalità le ſerie aventi per termini generali le eſpreſſioni

$$\frac{K^{2(p+qx)}-1}{K^{2(p+qx)}+1},\quad \frac{K^{2(p+qx)}+1}{K^{2(p+qx)}-1}$$

Imperciocchè eſſendo $\frac{\text{ſen.}\,x:\omega}{\text{coſ.}\,x:\omega} = \text{tang.}\,x:\omega = \frac{1}{\text{coſ.}\,x:\omega} : \frac{1}{\text{ſen.}\,x:\omega}$,

ſarà $\frac{1}{2\,\text{coſ.}\,(p+qx):\omega} : \frac{1}{2\omega\,\text{ſen.}\,(p+qx):\omega}$

$$= \omega\,\text{tang.}\,(p+qx):\omega = \frac{K^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}+1} : \frac{K^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}-1} = \frac{K^{2(p+qx)}-1}{K^{2(p+qx)}+1}$$

Ma ripigliando la ſomma della ſerie $\text{tang.}\,(p+qx)\,a$ determinata nelle Mem. ſopraccitate alla pag. 368, e ponendo $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a ſarà

$$A\omega^2 \int \frac{z^{\pi\omega:2}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}-z^{p+q})}{(1-z^q)(1-z^{\pi\omega:2})} \cdot \frac{dz}{z}$$

la ſomma della ſerie

$$\frac{AK^{2(p+q)}-A}{K^{2(p+q)}+1} + \frac{AK^{2(p+2q)}-A}{K^{2(p+2q)}+1} + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots \frac{AK^{2(p+qx)}-A}{K^{2(p+qx)}+1}$$

Similmente eſſendo

$$\frac{K^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}-1} : \frac{K^{p+qx}}{K^{2(p+qx)}+1} = \frac{1}{2\omega\,\text{ſen.}\,(p+qx):\omega} : \frac{1}{2\,\text{coſ.}\,(p+qx):\omega}$$

$= \frac{1}{\omega\,\text{tang.}\,(p+qx):\omega}$, ſe nell' eſpreſſione della ſomma di $\frac{1}{\text{tang.}\,(p+qx)\,a}$ (ivi pag. 371) ſi metta $\frac{1}{\omega}$ in luogo di a, ſarà

$$A \int \frac{(1-z^{qx})(z^{p+q}-z^{\pi\omega-p-qx})}{(1-z^q)(1-z^{\pi\omega})} \cdot \frac{dz}{z}$$

nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione la ſomma generale della ſerie

$$\frac{AK^{2(p+q)}+A}{K^{2(p+q)}-1} + \frac{AK^{2(p+2q)}+A}{K^{2(p+2q)}-1} + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{AK^{2(p+qx)}+A}{K^{2(p+qx)}-1}$$

Di nuovo poichè $\frac{K^{(p+qx)}}{2(K^{2(p+qx)}-1)} + \frac{K^{(p+qx)}}{2(K^{2(p+qx)}+1)}$ $= \frac{K^{3(p+qx)}}{K^{4(p+qx)}-1}$, ſarà manifeſtamente $\frac{A}{2}(\mathcal{Q}) + \frac{A}{4}(R')$ la ſomma della ſerie

$$\frac{AK^{3(p+q)}}{K^{4(p+q)}-1} + \frac{AK^{3(p+2q)}}{K^{4(p+2q)}-1} + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{AK^{3(p+qx)}}{K^{4(p+qx)}-1}$$

Nello ſteſſo modo ſi troverà eſſere $\frac{A}{2}(\mathcal{Q}) - \frac{A}{4}(R')$ la ſomma generale della ſerie

$$\frac{AK^{p+q}}{K^{4(p+q)}-1} + \frac{AK^{p+2q}}{K^{4(p+2q)}-1} + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{AK^{p+qx}}{K^{4(p+qx)}-1}$$

§. XI.

Veduto di una natura di potenze reciproche affette, reſta che ſi faccia per occaſione parola di un altro genere di ſimili potenze. In quelle che abbiamo maneggiato ſinora, aſſunto che ſiaſi un numero qualunque per K, come baſe de' logaritmi iperbolici, egli è radice coſtante delle potenze ſucceſſive d' ogni termine nella ſerie propoſta. All' oppoſito è d' un' altra natura la ſerie, ne' di cui termini è bensì coſtante l' eſponente delle potenze, ma la radice varia in ogni termine rappreſentando ella l' eſponente ſucceſſivo de' termini, come ſarebbe per eſempio la famiglia delle ſerie eſpreſſe dalla formula $\frac{A}{ax^m \pm b}$. Non abbiamo, ch' io ſappia, altri tentativi ſu queſt' indole di ſerie, fuorchè alcuni di *Leibnitz*, di Jacopo *Bernoulli*, e di Leonardo *Eulero*, e niente più che oltrepaſſi le ſeconde potenze. Il primo negli Atti di Lipſia in occaſione di parlare della quadratura del cerchio fa menzione di alcune ſerie infinite reciproche de' quadrati de' numeri naturali ſcemati di un' unità, tenendo ſecreto il metodo miſterioſamente. Il ſecondo trova i valori delle ſteſſe ſerie, eſſendo ſcemati i medeſimi quadrati in genere di un comune quadrato, e quei pure di ſerie reciproche aventi al denominatore numeri trigonali diminuiti d' un coſtante numero trigonale nel Trattato delle ſerie infinite poſto in calce del Libro che ha per titolo *Ars conjectandi*. L' *Eulero* finalmente nel I. Vol. dell' Analiſi degl' Infiniti §. §. 181. 182. ſomma le ſerie aventi per termine generale $\frac{1}{n^2x^2 - m^2}$, ove x è l' eſponente de' termini.

Come da principio avea preſo a credere, che ſimili ſerie foſſero aſtruſe, così mi feci a tentare la ſomma di loro all' infinito per una via, che mi conduſſe a farle dipendere dalle ſerie conoſciute a fattori ſempre creſcenti. Ma tutto ad un tratto riconobbi, che non le ſole ſeconde poteſtà maneggiate da' tre nominati illuſtri uomini, ma generalmente tutta queſta Claſſe di ſerie, qualunque ſieno le poteſtà, e comunque affette, è reducibile a quelle, di cui ho trattato nel V. Capitolo della Mem. citata intorno alle ſerie, e non richieggono al più, che le note quadrature dell' iperbola, e del cerchio, qualor non ſono algebraicamente ſommabili. Queſto ſchiaramento mi fè vedere, che non ſempre i più ſemplici e migliori penſieri ſono i primi ad offerirſi, di che ſi può avere una prova anche in queſto caſo rivedendo attentamente ciò che ne hanno laſciato *Leibnitz*, *Bernoulli*, ed *Eulero* ſucceſſivamente. Ma mi ſia conceduto di paſſar prima di fuga ſul primo tentativo, perchè ottenendo altri riſultamenti col metodo più ſemplice e naturale, i quali debbono in fondo coincidere co' primi, ſi potrà trarne qualche nuova verità non diſpregevole.

Sia primamente da ſommarſi la ſerie infinita

$$(A)\ldots\ldots\frac{1}{1+1}+\frac{1}{4+1}+\frac{1}{9+1}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{1}{x^2+1}$$

S' inſtituiſca la continua diviſione del termine generale, e ſi avrà

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^8}+\text{ecc.}$$

Se dunque poteſſero averſi le ſomme all' infinito $S.\frac{1}{x^2}$, $S.\frac{1}{x^4}$ ecc. e tutte inſieme eſpreſſe per una ſola quantità finita M, ſarebbe $M=S.\frac{1}{x^2+1}$. Ricorriamo dunque alla Mem. noſtra intorno alle ſerie citata qui innanzi, e alla pag. 304 troveremo eſſere nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$S.\frac{1}{x^2}=\frac{1}{1}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)$$

$$S.\frac{1}{x^4}=\frac{1}{1.2.3}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)^3$$

$$S.\frac{1}{x^6}=\frac{1}{1.2\ldots.5}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)^5$$

. . . .

$$S.\,\frac{1}{x^{2n}}=\frac{1}{1.2....(-1+2n)}\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\,\frac{1}{z}\right)^{-1+2n}$$

Poſto pertanto $l.\,\frac{1}{z}=Z$ per ſemplicità di calcolo, ſarà

$$\int\frac{dz}{1-z}\left(\frac{Z}{1}-\frac{Z^3}{1.2.3}+\frac{Z^5}{1.2....5}-\frac{Z^7}{1.2....7}+\text{ecc.}\right)=S.\,\frac{1}{x^2+1}$$

Ma $Z-\frac{Z^3}{1.2.3}+\frac{Z^5}{1.2....5}-\text{ecc.}......=\text{ſen.}\,Z$ in un cerchio avente l' unità per raggio. Dunque

$$\int\frac{dz}{1-z}\,\text{ſen.}\left(l.\,\frac{1}{z}\right)=S.\,\frac{1}{x^2+1}$$

ch' è la ſomma ricercata all' infinito della ſerie (*A*)

§. XII.

Ma il valore di queſta ſerie trovato dal Sig. *Eulero* alla pag. 143, poſto -1 in luogo di a, è $\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\,\text{tang.}\,\pi\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}$. Dunque abbiamo queſto nuovo Teorema, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{dz}{1-z}\,\text{ſen.}\left(l.\,\frac{1}{z}\right)=\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\,\text{tang.}\,\pi\sqrt{-1}}-\frac{1}{2};$$

ma $\frac{1}{2\omega\,\text{ſen.}\,m:\omega}=\frac{K^m}{K^{2m}-1}$ (§. I.), poſto $\omega=\sqrt{-1}$, m quantità reale, K la baſe de' logaritmi; e $\frac{1}{2\,\text{coſ.}\,m:\omega}=\frac{K^m}{K^{2m}+1}$; e inoltre, eſſendo $\frac{\text{coſ.}\,m:\omega}{\omega\,\text{ſen.}\,m:\omega}=\frac{1}{\omega\,\text{tang.}\,m:\omega}$, ſe facciaſi $\frac{m}{\omega}=\pi\omega$, ſarà $m=-\pi$, e $\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\,\text{tang.}\,\pi\sqrt{-1}}=\frac{m}{2\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,m:\sqrt{-1}}$

$$= \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{\omega \,\text{tang.}\, m:\omega} = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{K^{2m} + 1}{K^{2m} - 1} \right) = - \frac{\pi}{2} \left(\frac{K^{-2\pi} + 1}{K^{-2\pi} - 1} \right)$$

$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{K^{2\pi} + 1}{K^{2\pi} - 1} \right)$ e però di nuovo nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione ſarà

$$\int \frac{dz}{1 - z} \,\text{ſen.} \left(l. \frac{1}{z} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{K^{2\pi} + 1}{K^{2\pi} - 1} \right) - \frac{1}{2}$$

quantità eſponenziali reali, il che ſomminiſtra un altro Teorema degno di conſiderazione

§. XIII.

Con un ſimile metodo ſommeremo pure la ſerie avente per termine generale $\frac{1}{x^2 - 1}$. Imperciocchè eſſendo

$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} +$ ecc., e laſciando ſuſſiſtere

$Z = l. \frac{1}{z}$, ſarà

$$\int \frac{dz}{1 - z} \left(Z + \frac{Z^3}{1.2.3} + \frac{Z^5}{1.2....5} + \text{ecc.} \right) = S. \frac{1}{x^2 - 1}$$

Ma, preſa K per baſe de' logaritmi iperbolici,

$$K^Z - 1 = Z + \frac{Z^2}{1.2} + \frac{Z^3}{1.2.3} + \text{ecc.}$$

$$1 - K^{-Z} = Z - \frac{Z^2}{1.2} + \frac{Z^3}{1.2.3} - \frac{Z^4}{1.2....4} + \text{ecc.}$$

e però ſommando

$\frac{K^Z - K^{-Z}}{2} = Z + \frac{Z^3}{1.2.3} + \frac{Z^5}{1.2....5} +$ ecc. cioè paſſando agli archi immaginarj, ſarà la medeſima ſerie

$$Z + \frac{Z^3}{1.2.3} + \text{ecc.} = \omega \,\text{ſen.}\, Z : \omega$$

e però nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$\omega\int\frac{dz}{1-z}\,\text{ſen.}\left(l.\frac{1}{z}\right)\omega = S.\frac{1}{x^2-1}$$

E poichè in queſto caſo il valore della ſerie ſecondo il Sig. *Eulero* è $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\,\text{tang.}\,\pi}$; ſarà integrando da $z=0$ ſino a $z=1$

$$\omega\int\frac{dz}{1-z}\,\text{ſen.}\left(l.\frac{1}{z}\right)\omega = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\,\text{tang.}\,\pi}$$

nuovo Teorema da non traſcurarſi.

§. XIV.

Ma generalmente

$$\frac{1}{x^m\pm1}=\frac{1}{x^m}\mp\frac{1}{x^{2m}}+\frac{1}{x^{3m}}\mp\frac{1}{x^{4m}}+\text{ecc.}$$

ed è pel noſtro metodo (Mem. della *Soc. Italiana* pag. 304)

$$\frac{1}{1.2....(m-1)}\int\frac{dz}{1-z}Z^{m-1}=S.\frac{1}{x^m}$$

$$\frac{1}{1.2....(2m-1)}\int\frac{dz}{1-z}Z^{2m-1}=S.\frac{1}{x^{2m}}\ \text{ecc.}$$ Dunque

$$\int\frac{dz}{1-z}\left(\frac{Z^{m-1}}{1.2....(m-1)}\mp\frac{Z^{2m-1}}{1.2....(2m-1)}+\frac{Z^{3m-1}}{1.2...(3m-1)}\mp\text{ecc.}\right)$$

$=S.\frac{1}{x^m\pm1}$. Con che abbiamo l' eſpreſſione generaliſſima di queſte ſerie ridotta alle ſerie conoſciute a fattori creſcenti.

§. XV.

Paſſiamo ora al metodo diretto e ſempliciſſimo di ſommare sì fatte ſerie con tutta la poſſibile generalità , e prendiamo per gradi la ſerie di *Leibnitz*

$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+$ ecc. all' infinito

Si trovi il termine di lei generale, il quale ſarà manifeſtamente $\frac{1}{2x+x^2}$. Ma $\frac{1}{2x+x^2}=\frac{1}{x(2+x)}$. Dunque è ella una ſerie algebraica reciproca di ſecondo ordine, che ha per fattori x, $2+x$. Poſto ciò ricorriamo alle formule generali della noſtra Memoria, e ſi tragga dall'eſpreſſione della Prop. XI. pag. 294 i due ultimi integrali, cioè

$$\frac{A}{nq}\int\overline{z^{p:q-m:n-1}dz\int\overline{z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)}}\text{, e poichè}$$

$A=1$, $m=0$, $n=q=1$, $p=2$, queſt' eſpreſſione diverrà

$$\int\overline{zdz\int\overline{dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)}}=\frac{z^2}{2}\int dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)-\frac{1}{2}\int z^2dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)$$

e fatto $z=1$ fuori del primo ſegno, avremo, riducendo, integrando, e facendo $z=1$, la formula $\frac{3}{4}-\frac{1}{2(x+1)}$ $-\frac{1}{2(x+2)}$, che ſarà la ſomma generale della ſerie; e poſto $x=\infty$ reſterà $\frac{3}{4}$ per la ſomma all' infinito, come quel gran Geometra ha trovato. Di poi pigliamo a maneggiare un termine generale di queſta forma $\frac{1}{ax^2+b}$ qualunque coſa ſiaſi a, e b. Toſto veggiamo, che $\frac{1}{ax^2+b}$ $=\frac{1}{(-\sqrt{-b}+x\sqrt{a})(+\sqrt{-b}+x\sqrt{a})}$. Dunque ripigliando lo ſteſſo integrale precedente, e ponendo $x=\infty$, onde cercar toſto la ſomma all'infinito, diverrà $\frac{1-z^x}{1\mp z}$ $=\frac{1}{1\mp z}$, e però dividendolo in due, e riducendolo, prenderà eſſo queſta forma

$$\frac{1}{nq\left(\frac{p}{q}-\frac{m}{n}\right)}\int\frac{(z^{m:n}-z^{p:q})dz}{1\mp z}$$

valendo il ſegno ſuperiore per la ſerie

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{9a+b}+\text{ecc.}$$

e l' inferiore per la ſerie

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{9a+b}-\text{ecc.}$$

Ora eſſendo nel caſo noſtro $m=-\sqrt{-b}$, $p=\sqrt{-b}$, $n=q=\sqrt{a}$, ſe ſi faccia $\sqrt{-\frac{b}{a}}=c$ per ſemplicità, avremo

$$\frac{1}{2ac}\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1\mp z}=\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{-c}dz}{1\mp z}-\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{c}dz}{1\mp z}\ \ldots\ldots(A)$$

Ma $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\text{ecc.}$

$$\int\frac{z^{-c}dz}{1-z}=\frac{z^{-c+1}}{1-c}+\frac{z^{-c+2}}{2-c}+\frac{z^{-c+3}}{3-c}+\text{ecc.}$$

Dunque nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{-c}dz}{1-z}=\left(\frac{1}{1-c}+\frac{1}{2-c}+\frac{1}{3-c}+\text{ecc.}\right)\frac{1}{2ac}$$

e però anche

$$\frac{1}{2ac}\int\frac{z^{c}\,dz}{1-z}=\left(\frac{1}{1+c}+\frac{1}{2+c}+\frac{1}{3+c}+\text{ecc.}\right)\frac{1}{2ac}\ ;$$ quindi

$$\text{l' integrale }(A)=\frac{1}{2ac}\left\{\begin{array}{l}\ \ \frac{1}{1-c}+\frac{1}{2-c}+\frac{1}{3-c}+\text{ecc.}\\ -\frac{1}{1+c}-\frac{1}{2+c}-\frac{1}{3-c}-\text{ecc.}\end{array}\right\}$$

E poichè l' aggregato di queſte due ſerie è lo ſteſſo che $\frac{1}{2ac}\left(\frac{1}{c}-\frac{\pi}{\text{tang. }c\pi}\right)$ (Com. nuovi dell' Accad. di Pietrob. Vol.

XIX

XIX. pag. 30) poſto $n=1$ nell' eſpreſſione Euleriana ſarà

$$\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}-\frac{\pi}{\text{tang.}\,\pi\sqrt{-b:a}}\right)=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{4a+b}$$

$$+\frac{1}{9a+b}+\text{ecc.}$$

Se dunque ſia b quantità poſitiva, eſſendo a negativa, ſarà

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{\pi}{\text{tang.}\,\pi\sqrt{b:a}}\right)=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-4a}+\frac{1}{b-9a}+\text{ecc.}$$

il qual valore ſarà pure quello della ſerie

$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{4a-b}+\frac{1}{9a-b}+\text{ecc.}$, cioè eſſendo b negativa, e a poſitiva. E ſe foſſe b poſitiva, e a negativa, sì che il valore della ſerie foſſe eſpreſſo per funzione d' arco immaginario, potremo ſempre avere la medeſima ſerie eſpreſſa per eſponenziali reali come ſegue

$$-\frac{1}{2b}-\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{K^{-\pi h}+K^{\pi h}}{K^{-\pi h}-K^{\pi h}}$$ poſto $h=\sqrt{\frac{b}{a}}$, e K il numero

che ha per logaritmo iperbolico l' unità.

Che ſe foſſe c quantità razionale intera o rotta, ſi potrà ſempre avere il valore dell' eſpreſſione (A) nel caſo di $z=1$ particolarmente o algebraico, o traſcendente con facilità. Sia per eſempio $a=4$, $b=-9$, ſarà $c=\sqrt{-\frac{b}{a}}=\frac{3}{2}$, e però la formula diverrà $\frac{1}{12}\int\frac{(1-z^3)dz}{1-z}=\frac{11}{6.12}$ nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, e $\frac{1}{12}\int\frac{(1-z^3)\,dz}{1+z}=\frac{1}{6}\,l.\,2-\frac{5}{6.12}$; sì che ſarà

$$\frac{11}{6.12}=\frac{1}{-5}+\frac{1}{4.4-9}+\frac{1}{4.9-9}+\frac{1}{4.16-9}+\text{ecc.}$$

$$\frac{1}{6}\,l.\,2-\frac{5}{6.12}=\frac{1}{-5}-\frac{1}{4.4-9}+\frac{1}{4.9-9}-\frac{1}{4.16-9}+\text{ecc.}$$

Similmente ſommeremo la ſerie $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{9a+b}-\frac{1}{16a+b}+$ ecc. per cui il noſtro metodo ci dà la formula $(B)\ \frac{1}{2ac}\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1+z}$ da integrarſi da $z=0$ ſino a $z=1$. Operando come qui innanzi troveremo

$$(B)=\frac{1}{2ac}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1-c}-\frac{1}{2-c}+\frac{1}{3-c}-\text{ecc.}\\ -\frac{1}{1+c}+\frac{1}{2+c}-\frac{1}{3+c}+\text{ecc.}\end{array}\right\}$$

$=\left(\frac{\pi}{\text{ſen.}\, c\pi}-\frac{1}{c}\right)\frac{1}{2ac}$ (Com. nuovi di St. Pietrob. ivi) poſto $n=1$, ſu cui potremo inſtituire le medeſime operazioni del caſo precedente.

Ma ſenza ricorrere alla convenienza del noſtro integrale ſviluppato con le ſerie di *Eulero* citate qui ſopra, poſſiamo direttamente dimoſtrare il valore di lui. Imperciocchè è certo pe' principj del Calcolo Integrale (Com. nuovi di St. Pietrob. Vol. XIX. pag. 32.) che

$$(M)\ldots\ldots\int\frac{(z^{c-1}+z^{-c})dz}{1+z}=\frac{\pi}{\text{ſen.}\, c\pi}$$

$$(N)\ldots\ldots\int\frac{(z^{c-1}-z^{-c})dz}{1-z}=\frac{\pi}{\text{tang.}\, c\pi}$$

Si ſottragga pertanto dall' integrale (M) l' integrale noſtro (A) per le ſerie alternative, e ſi avrà

$$\int\frac{(z^{c-1}+z^{-c})dz}{1+z}-\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1+z}=\int\frac{(z^{c-1}+z^{c})dz}{1+z}$$

$=\int z^{c-1}dz=\frac{z^{c}}{c}=\frac{1}{c}$ poſto $z=1$. Dunque $\frac{\pi}{\text{ſen.}\, c\pi}-\frac{1}{c}=\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1+z}$. Steſſamente ſommando l' integrale (N) col noſtro per le ſerie poſitive, avremo

$$\int\frac{(z^{c-1}-z^{-c})dz}{1-z}+\int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1-z}=\int\frac{(z^{c-1}-z^{c})dz}{1-z}$$

$= \int z^{c-1}dz = \frac{z^c}{c} = \frac{1}{c}$ poſto $z = 1$; e però $\frac{1}{c} - \frac{\pi}{\text{tang.}\, c\pi}$ $= \int\frac{(z^{-c}-z^{c})dz}{1-z}$, come abbiamo per l' uno e per l' altro ſtabilito precedentemente.

§. XVI.

E paſſando alle terze potenze affette, ſia la ſerie (*C*)

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{8a+b}+\frac{1}{27a+b}-\frac{1}{64a+b}+\text{ecc.}\ldots\frac{1}{ax^3+b}\ldots(C)$$

Se facciaſi $\frac{b}{a} = f^3$, il termine generale diventa $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x^3+f^3}$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(x+f)\left(x+\frac{1}{2}(f+f\sqrt{-3})\right)\left(x+\frac{1}{2}(f-f\sqrt{-3})\right)}$$

Dunque ſcorgeſi immediatamente, che la ſomma della ſerie (*C*) ſi riduce a integrare da $z = 0$ fino a $z = 1$ la formula del Probl. XI. pag. 293 del I. Vol. della *Società Italiana*, allorchè ſieno i tre fattori al denominatore della forma qui propoſta. Il che non involgendo, che un puro affare di calcolo ſecondo i valori di a, e b, non mi vi trattengo di più.

Quindi poſſiamo agevolmente conchiudere, che qualunque ſia il grado n della potenza affetta, come nella ſerie generale

$$\frac{1}{a+b}\pm\frac{1}{a2^n+b}+\frac{1}{a3^n+b}\pm\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{1}{ax^n+b}$$

l' arcano di queſta ſerie ſta unicamente nel riſolvere in fattori ſemplici il denominatore, che può ſempre farſi, e ricorrere al metodo noſtro generale di ſommare le ſerie algebraiche reciproche nel luogo citato qui innanzi.

In queſta guiſa, ottenuto il valore della ſerie, avremo quello pure dell' eſpreſſione ſingolare

$$\int \frac{dz}{z}\left(\frac{(-l.z)^{n-1}}{1.2...(n-1)} \mp \frac{(-l.z)^{2n-1}}{1.2...(2n-1)} + \frac{(-l.z)^{3n-1}}{1.2...(3n-1)} \mp \text{ecc.}\right)$$

da $z=0$ ſino a $z=1$ trovata al §. XIII.

§. XVII.

E dando all' argomento tutta l'eſtenſione, di cui è ſuſcettibile, ſi vede, che le ſerie frazionali aventi al denominatore numeri figurati accreſciuti o ſcemati d' altro numero figurato recate dall' illuſtre *Bernoulli*, non ſono che caſi particolariſſimi del metodo, che abbiamo qui indicato. Imperciocchè ſia per eſempio

$$\frac{1}{8+10} \pm \frac{1}{69+66} + \frac{1}{224+196} \pm \frac{1}{515+430} + \text{ecc.}$$

In queſta ſerie non ſono altrimenti i numeri del denominatore potenze affette, ma sì bene numeri di una ſerie algebraica del terz' ordine affetta da un' altra dello ſteſſo ordine. Di fatti i numeri 8, 69, 224, 515 ecc. appartengono alla ſerie, che ha per termine generale $7x^3-3x+5x^2-1$, e il termine generale de' numeri 10, 66, 196 ecc. è $5x^3+7x^2-2$. Il metodo pertanto ſi riduce a ſommare i due termini, con che ſi avrà il termine

(*A*).... $12x^3+12x^2-3x-3$; e riſoluto queſto ne' fattori $2x-1$, $2x+1$, $3x+3$, non ſi tratta che di ſommare la ſerie $\frac{1}{(-1+3x)(1+2x)(3+3x)}$, che potrà ſempre farſi col metodo noſtro o algebraicamente, o per funzioni d'archi circolari, o per logaritmi. Di che avendo dato qui ſopra eſempli baſtevoli non occorre parlarne più diffuſamente.

ESPOSIZIONE ANATOMICA

DELLE PARTI RELATIVE ALL' ENCEFALO

DEGLI UCCELLI.

Del Sig. Vincenzo Malacarne Direttore delle R. Terme Acqueſi, e Chirurgo Maggiore del Real Preſidio di Torino.

CONTINUAZIONE

Del primo Trattato * *ſulle oſſa del Cranio degli Uccelli in generale, e particolarmente delle Oche, e delle Anitre.*

PARTE SECONDA.

Pareti interne della cavità del Cranio.

CAPITOLO PRIMO.

Diviſione generale.

IL celebratiſſimo *Alberto Allero* nella ſua per ogni titolo grande opera ſulla fabbrica, e l'uſo delle parti del corpo umano ha giuſtamente notato, che la cavità del cranio degli uccelli è capace di modo, che il cerebro ſi trova in proporzione non ſolamente uguale a quella, che tiene per entro al cranio dell' uomo, nei grandi uccelli, ma eziandio maggiore nei più piccioli. Avea pure indicato queſta cavità eſſere inſignemente alta, e rotonda.

Non contenti noi di queſte notizie, inſufficienti per ajutar-

---

* Mem. della *Soc. Italiana* Tomo I. pag. 747

ci a dar un' eſatta, e chiara ſpoſizione dell'encefalo, divideremo la cavità del cranio degli uccelli

1. In *volta*, o parte ſuperiore concava; in *pavimento*, o parte inſeriore diſuguale; in *pareti* anteriore, poſteriore, e laterali, tutte ſuddiviſibili in deſtra, e ſiniſtra.

2. Noteremo inoltre, che tale cavità, conſiderata come diceſi all' ingroſſo, è molto anguſta àl davanti, ſi allarga per ogni dimenſione verſo la metà alzandoſene la *volta*, e deprimendoſene il *pavimento* mentre che ſe ne ſcoſtano le *pareti*, che dove il pavimento ſi rialza per terminarſi al *gran foro occipitale*, queſte *pareti* ſe ne accoſtano per reſtrignerla; che ivi però il diametro verticale ſe ne mantiene aſſai lungo perchè la *volta* ſembra che ſe ne elevi.

3. Vi ſi diſtinguono molte *foſſe* circonſcritte da varie *eminenze*, e vi ſi oſſervano molti *fori*, delle quali coſe tutte verremo qui recando l' opportuna deſcrizione.

CAPITOLO II.

Foſſe della cavità del cranio degli uccelli.

Vediamo diciotto foſſe in queſta cavità, dodeci principali e ſei minori. Le principali ſono

Due *Olfattorie*,
Due *Maggiori*,
Due *Superiori di mezzo*,
La *Loggia del cervelletto*,
Due *Foſſe laterali di mezzo*,
Due *Foſſe dei Talami*, e
Del *Catino*

Le Foſſe minori ſono

L' Ottica,
Due *Sfondate*,
La Pituitaria,
Due ovali.

ARTICOLO I.

Foſſe principali.

1. Incominceremo a deſcrivere le *foſſe olfattorie* così dette perchè contengono, e danno uſcita dal cranio ai *nervi olfattorj*. Situate nella eſtremità anteriore quaſi acuta della cavità del cranio degli uccelli, queſte foſſe ſono ſtrette, coniche, aperte anteriormente come un imbuto a due cannelle; appoggiate ſui lati ſuperiori del pariete oſſoſo delle orbite, leggiermente diviſe in alto, e nella parte loro poſteriore più ampla, mediante un picciolo riſalto oſſoſo perpendicolare, cui è aderente la Dura-madre proprio dove ſe ne biſorca in avanti il *Seno longitudinale*. Queſto riſalto conſerva puranco negli uccelli il nome di *ſpina frontale* interna.

2. Non divide le due foſſe olfattorie per tutta l' eſtenſion loro, poichè la parte anteriore della *volta* comune, per uno ſpazio maggiore di tre linee, non ha nelle oche, e nelle anitre verun riſalto.

3. Oltre al paſſaggio, che danno ai N. *olfattorj* contengono le eſtremità anteriori pur coniche (alla foggia della parte più acuta de' lobi dell' aglio) degli emisferi del cervello, e laſciano aperto il varco al ſangue, che ſcorre per la biſorcazione accennata del *Seno longitudinale della D. M.* mediante due brevi canaletti, cui (ad imitazione del Santorini *) do il nome di *Emiſſarj* perchè ſi ſcarica per eſſi ** del ſangue onde i ſeni ſuoi ſono ripieni, e di *emiſſarj naſali* per il ſito dove metton foce.

4. Le foſſe olfattorie finiſcono verſo il naſo in due canali diſtinti, ſeparati mediante un tramezzo perpendicolare, che uniſce la *volta* al *pavimento*: indietro, e in baſſo poi terminano al margine anteriore della *Foſſa ottica*.

5. Le *Foſſe maggiori*, che meritano tal nome per la loro

---

* Jo. Dom. Santorini Obſervationum Anatomicarum cap. *III*.

** Vedremo a ſuo luogo la D. M. degli uccelli, e più paleſemente quella delle oche avere cinque para di *Emiſſarj*, cioè gli *Emiſſarj Naſali*, i *Pituitari*, i *Laterali eſterni*, i *Laterali poſteriori*, e gli *occipitali*.

ampiezza , e capacità, ſono ſcolpite nella faccia interna della volta , nella anteriore delle pareti, e del pavimento , anteriormente, e lateralmente alle due *foſſe ſuperiori di mezzo*, dalle quali le ſepara un riſalto oſſoſo , curvo , ed obbliquo.

6. Le *Foſſe ſuperiori di mezzo* ſi vedono nel centro della volta del cranio , ſeparate ſoltanto la deſtra dalla ſiniſtra mediante la *ſpina longitudinale* , che ſtendeſi per il tratto di 14 linee dal centro della volta delle foſſe olfattorie (1) al margine ſuperiore dell' *Arco*, ond'è circoſcritta al davanti la *Loggia del cervelletto*.

7. La ſpina longitudinale, che pur ora mentovammo, è ſolcata per dar luogo al *ſeno longitudinale* della *D. M.;* e queſto *ſolco* , di mediocre ampiezza in avanti , ſi reſtrigne alquanto nel centro della porzione frontale * per allargarſi di nuovo a miſura, che ſi accoſta all' Arco, (*6*) dove ha circa una linea d' ampiezza ; e qui sbocca nel *ſeno Long.* un groſſo tronco venoſo , che paſſa per un *foro* già ſtato deſcritto ** , e che ha le ſue radici nelle ſoſtanze molli , che veſtono il cranio.

8. Immediatamente dietro a quel foro il ſolco ſi biforca, e le due porzioni riſultanti da tale biforcazione ſi circonflettono in baſſo ſimmetricamente , per quel che ſpetta al corſo ; ma la porzion deſtra per l' ordinario ſi trova più larga. Ricevono i *Seni laterali della D. M.* , continuazioni, o ſia biforcamenti del *ſeno longitudinale* (1).

9. Nè tutta la parte anteriore della ſpina longitudinale interna è ſolcata (1 , 2), perciocchè la porzion della medeſima, che pur eſiſte nella volta della porzion poſteriore delle foſſe olfattorie (1 , 2) , non è nemmeno accompagnata dal ſeno longitudinale ; che anzi prima che la ſpina ivi ſi cancelli, la colonna del ſangue la quale qui ſi trova nel ſeno , dividendoſi queſto, prende una direzione obbliqua verſo le produzioni della D. M. onde i N. olfattorj ſono inguainati come in due cannelle (1) , e viene con eſſe divergendo per i *fori olfattorj* guidata fuori del cranio nelle orbite.

10. La

---

* Parte I. Cap. II. §. 4.

** Parte I. cap. II. §§. 2 , 3 .

10. La ſettima foſſa nominata *Loggia del cervelletto* perchè i lati dell' arco (6), e quelli del *gran foro occipitale* ne formano i pilaſtri, e ne ſoſtengono molto elegantemente la profonda volta, è ſituata nella ſommità poſteriore della cavità del cranio, ſeparata dalle foſſe ſuperiori di mezzo (6) mediante l' arco ſuddetto, munito d' un bell' orlo angolare quaſi tagliente, ſimile ad una mezza luna con le corna rivolte al baſſo.

11. Lo sfondo della Loggia è conſiderabile in tutti gli uccelli, e meglio che in neſſun altro nelle oche vi ſi veggono ſcolpiti due *ſolchi* irregolarmente ſerpeggianti, deſtinati a dar ricetto al ſangue, che riempie due *ſeni Subalterni* [*] comunicanti con il principio dei *ſeni Laterali* (8) *della Dura-madre*.

12. Tutta la Loggia del cervelletto delle oche è capace della punta del mignolo, eſſendo pur tale ordinariamente la groſſezza di queſta importante porzione del cerebro nelle medeſime.

13. La ottava, e la nona ſi dicono *foſſe Laterali di mezzo* per il luogo, che occupano in queſti cranj, eſſendo ſcolpite ai fianchi del pavimento aſſai più in baſſo, che non ſono le olfattorie, dalle quali vengono ſeparate mediante un *riſalto* obbliquo traverſale, che ſi curva allo insù contro le pareti del cranio. La loro profondità è maggiore al davanti, e ſulla faccia interna, corriſpondente delle apofiſi orbitarie poſteriori [**], ſono volte più allo in ſuori e contengono il lembo eſterno della faccia inferiore degli emisferi del cervello.

14. Nomino *foſſe dei Talami* quelle due, che occupano i lati del pavimento del cranio, diviſe dalle laterali di mezzo (13) per una *creſta oſſoſa ſemilunare* aſſai tagliente quaſi orizzontale: dal centro del pavimento del cranio queſte due creſte ſi portano in dietro verſo il margine anteriore delle picciole *foſſe auditorie*.

15. La profondità delle foſſe de' talami viene accreſciuta

---

[*] Nel Trattato delle Meningi dove ſi favella della D. M. vedremo queſti *Seni Subalterni* sboccare in due ricettacoli venoſi poſti, ai fianchi dell' articolazione dell' apofiſe occipitale con la prima vertebra.

[**] Loc. citato Artic. II. §. 6.

da due pieghe falcate della D. M., le quali attaccandoſi alla menzionata creſta, ne fregiano tutto il tagliente ſeguendone la concavità. Contengono gran parte dei *Talami de' N. Ottici*.

16. L' ultima foſſa delle maggiori ſituata nella parte poſteriore del pavimento, avendo nelle oche, e nelle anitre la figura d' un *catino* quaſi ovale, ne riceve anche il nome. E' aſſai più eſteſa in dietro che le precedenti, e contiene la *midolla allungata*, la quale ſul margine poſterior di queſta foſſa dolcemente ſi eleva per giugnere al *gran foro occipitale*, dove queſto margine ha nelle oche una breve *creſta* molto elevata. Negli uccelli di rapina e fra gli altri nel Nibbio, nel Falchetto, nello Sparviere, e nella Crivella tal *creſta* ſi ſtende per tutta la lunghezza del catino dividendone la parte deſtra dalla ſiniſtra.

ARTICOLO II.

Delle Foſſe Minori.

1. La prima a ſcoprirſi nel cranio degli uccelli è l'*Ottica* ſituata immediatamente dietro l' angolo, che s' incontra ſul margine poſteriore del pavimento delle foſſe olfattorie * verſo il centro; angolo che in molte ſpecie d' uccelli ivi fa un notabiliſſimo riſalto traverſale, tanto per lo ſuo inoltramento alio indietro, quanto per la profondità, e l' ampiezza dello sfondo, che viene dall' accennato riſalto limitato in avanti, e in parte naſcoſto ** : poſteriormente confina con il margine anteriore della foſſa *Pituitaria*.

2. La foſſa ottica è unica nella cavità del cranio, ma toſto degenera in due ampli fori perchè incontra il lembo ſuperior poſteriore del tramezzo delle orbite ***, il quale la divide perpendicolarmente in due mezze lune uguali una deſtra, e l' altra ſiniſtra; ed avendo lo ſteſſo tramezzo la porzione di quel margine, che divide la foſſa ottica, lunata, ciò dà

---

* Artic. preced. §. 4.

** Queſta coſa è più ch' altrove apparente nei Papagalli.

*** Parte I. cap. II. art. II. §. 9.

alla foſſa medeſima profondità maggiore, e maggiore ampiezza ai due fori obbliqui detti *fori ottici*, perchè danno paſſaggio al groſſo tronco dei N. ottici.

3. Alquanto più indietro, ed anche nel mezzo del pavimento vediamo la *foſſa Pituitaria*, l' entrata della quale è quaſi romboidea. E' ſeparata dall' ottica mediante un riſalto oſſoſo traverſale molto ſottile, e fragile.

4. E' pure doppia verſo le orbite, donde permette, che s' introducano nel cranio due notabili tronchi arterioſi * per due fori aſſai larghi, che sboccano nel di lei fondo.

5. E' molto eſteſa in baſſo; molto pure obbliquamente indietro ſotto il pavimento ſul margine del tramezzo delle orbite, le lamine del quale ſembra che ivi ſi diſcoſtino per dar ricetto alla porzion principale più baſſa e naſcoſta della *glandula pituitaria*.

6. Sui fianchi di queſta foſſa troviamo pure le bocche di quelli due canaletti nei quali s' inſinuano, e traſcorrono i *nervi motori comuni degli occhi*: la loro apertura eſteriore vedeſi nelle orbite una linea circa più addietro, e verſo le tempie, della uſcita dei *N. ottici*.

7. Nei lati della foſſa Pituitaria mettono foce i due *condotti delle Carotidi* cioè quei due canaletti oſſoſi, per la bocca inferiore dei quali, aperta ai fianchi della tuberoſità baſilare **, ſi cacciano, e portandoſi verſo la baſe del cervello i due groſſi tronchi di tali arterie paſſano dietro alla glandula pituitaria per giugnere a diramarſi nella ſuddetta viſcera.

8. Queſti due condotti, più larghi alla baſe del cranio fuori del medeſimo, ſi reſtringono a miſura che circonflettendoſi ne percorrono obbliquamente la ſpugnoſa ſpeſſezza del pavimento, ſicchè prendono la figura di due corna convergenti in alto e allo innanzi, cioè con le punte ridotte in una ſola nella foſſa pituitaria, mentre che le curvità più grandi ne ſono in fuori, e le baſi, come abbiamo detto, indietro e in baſſo.

9. La terza e la quarta delle foſſe minori ſono ſimmetri-

---

* Queſti ſono differenti dal tronco principale delle carotidi, che accenneremo fra breve.

** Loc. citat. §. 12. artic. IV. §. 4.

che, ed io le nomino *ſfondate* perchè in vece di fondo ſi aprono alla baſe del cranio con un' ampla bocca onde eſcono i groſſi tronchi de' *N. maſcellari ſuperiori ed inferiori*.

10. Le foſſe sfondate occupano i lati del pavimento al di dietro della pituitaria (5) tra le foſſe dei talami * (3, 4 ecc.) il catino **, e le *foſſe auditorie*, che quanto prima deſcriveremo. Danno ricetto ai tronchi de' N. ſuddetti, i quali affatto le riempiono mediante il groſſo *ganglio*, che queſti nervi fanno qui dopo eſſerſene allontanato il *N. oftalmico*. Danno pure uſcita ad una radice conſiderabile delle *vene jugulari*.

11. Non è raro trovare il margine poſteriore delle foſſe sfondate aſſai profondamente incavato per dare ricetto al ganglio mentovato, incavature, che ſi potrebbono conſiderare come due foſſette ſubalterne e ottenere il nome di *foſſette dei Gangli*.

12. Negli encefali freſchi, ancora tappezzati della D. M., le foſſe sfondate ſono in gran parte coperte d'una piega poco meno che perpendicolare fatta dalla ſteſſa meninge, e così eſattamente riempiute da quei nervi, e dal ganglio, che rieſce difficile conoſcerne a dovere l' eſtenſione e la capacità ſalvo nelle oſſa ſecche, e ben ripulite sì al di fuori, che al di dentro.

13. Le *foſſe ovali* ſono dette così dalla loro figura, e ſi trovano alquanto più addietro delle sfondate, e più alto ſulle pareti laterali della parte poſteriore della cavità del cranio: hanno molta profondità; l' orlo ne è molto rilevato, e conveſſo, e n' è quaſi verticale il diametro maggiore.

14. Si diſtinguono agevolmente da tutte le altre per la figura, e per la ſolidità del riſalto degli orli, fatto da uno dei *canali Semicircolari* deſtinati alla perfezione dell' udito, in tutti gli uccelli (e particolarmente nei più piccioli, e nei notturni) elegantiſſimi.

15. Le fa diſtinguere altresì la profondità loro, occupata da i nervi *acuſtici* avvolti in una groſſa *appendice* dei lati del cervelletto, molle, e cinericcia all' eſterno, che parte dai

---

* Artic. anteced. §. 14. 15.

** Ivi §. 16.

lati della baſe del cervelletto medeſimo ; la quale appendice è contenuta in una borſa della D. M. tappezzante con eſattezza amendue gli antri, tinta di colore piombino per il molto ſangue venoſo, che ſcorre ed empie varj ſeni oſſervabili tra le lamine di queſta meninge.

16. Sboccano queſti ſeni nelle foſſe sfondate mediante un largo ſolco ſuperficialmente ſcolpito nello ſpazio oſſoſo, che queſte dagli antri divide, e ch' è ſede d'un paro di *emiſſarj* detti *Laterali eſterni*, la direzione dei quali è obbliqua al davanti, e in baſſo.

CAPITOLO III.

Dei Fori oſſervabili nella cavità del cranio degli Uccelli.

Dovendoſi ora numerare i fori, che ſi veggono per entro al cranio degli uccelli, prenderemo ſempre a conſiderare quello delle anitre, e delle oche per eſſer coſa più facile a' principianti il tener dietro con l' occhio ſu queſte oſſa alla noſtra deſcrizione. Terremo pure qui l' ordine, che viene preſcritto dalla ſituazion de' fori ſteſſi cominciando dagli anteriori verſo il ceppo del becco, e terminando con quei dell' occipite, proccurando di dare ad ognuno d'eſſi tal nome, che indichi ſe vaſo, o nervo vi paſſi, e talvolta quale ne ſia la capacità, la figura, e la direzione.

Sono avvezzo ad oſſervarvene i ſeguenti

Due *Olfattorj*.
Due *Arteriali anteriori*.
Due *Ottici*.
Due *Motori comuni*.
Due *Patetici*.
Due *Venoſi della foſſa pituitaria*.
Due *Carotidei*.
Due *Oftalmici*.
Due *Motori eſterni*.
Due *Maſcellari ſuperiori*.
Due *Maſcellari inferiori*.
Due *Auditorj*.

Due *Piccioli Simpatici*.
Due *Vaghi*, o *Laceri*.
Due *Jugulari*.
Due *Palatini*.
Due *Ipogloſſi*, ed
Il *gran foro occipitale*.

ARTICOLO I.

Dei Fori Olfattorj.

I primi a ſcoprirſi nella parte anteriore del cranio d' ogni uccello ſono i due *fori Olfattorj* ſeparati mediante la parte ſuperiore del tramezzo delle orbite, * ſulle faccie laterali del quale ſi prolungano in una doccia di linee tre, che finiſce nell' ampia foſſa naſale occupata in amendue i lati dalla conca ſuperiore delle narici.

Per queſto paro di fori unitamente ai *N. Olfattorj* eſce dal cranio il primo paro degli emiſſarj della dura madre. **

ARTICOLO II.

Dei Fori arteriali.

§. 1. Il ſecondo paro dà paſſaggio ad una coppia di ramicelli arterioſi, che va indietro obbliquamente divergendo per diramarſi nel centro della faccia inferiore degli emisferi del cervello. Vedeſi quaſi mezzo pollice diſcoſto dal foro olfattorio.

2. Le aperture interne dei *F.* arteriali ſon naſcoſe in una profonda, e ſtretta ſcanalatura traverſale, alquanto curva nel mezzo della ſua lunghezza, che ha le eſtremità molto divergenti: è ſcolpita ſopra una ſpecie di creſta, e ſi continua in un ſolco pure obbliquo.

3. Le aperture eſteriori ſono nelle orbite quattro linee

---

* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 9.
** Cap. II. Art. I. §. 3. della Parte ſeconda.

poſteriormente all'orlo diretano dei *F.* olfattorj, e due linee anteriormente agli ottici, nel margine ſuperiore del tramezzo delle orbite. [*]

Articolo III.

Dei Fori ottici.

Queſto paro è ſeparato da quello dei precedenti fori, che vi ſta ſopra, mediante una forte, e ſpeſſa creſta oſſoſa traverſale. Già ſi conoſce la foſſa dalla quale i fori ottici procedono, [**] e ſi ſa che il fondo anteriore ne è diviſo dalla parte corriſpondente del tramezzo delle orbite, le faccie deſtra e ſiniſtra del quale tramezzo ne ſoſtengono le obblique aperture eſteriori, per le quali sboccan nelle orbite i *N.* ottici.

Articolo IV.

Fori dei N. motori comuni degli occhi.

1. Una linea + 1 : 2 circa poſteriormente, e ſui lati della foſſa ottica [***] ſi vedono i bislunghi fori, che danno uſcita ai *N. motori comuni degli occhi*, dai quali prendono il nome. La diſtanza del deſtro dal ſiniſtro è lin. 3. circa, e ſono ai fianchi della foſſa pituitaria, [****] dai margini della quale ſono ſeparati per una tenue *laminetta oſſoſa* alquanto più in alto ſulle pareti del cranio, che fanno le ſpalle della foſſa medeſima, corriſpondentemente all' *iſtmo* largo più d' una linea che divide la pituitaria dalla ottica.

2. Sono pure ſeparati da tale iſtmo per una larga e ſottile oſſoſa *Laſtra*; e la diſtanza loro dai fori oftalmici poſti più indietro è di tre quarti di linea, tale eſſendo la larghezza dell' *oſſoſa Liſca* che ne divide il margine diretano dall' orlo anteriore dei *fori patetici* loro paralleli, ma più proſſimi alla foſſa pituitaria.

---

[*] Par. I. Cap. II. art. II. §. 9.

[**] Vedi Cap. preced. art. II. §. 2.

[***] Ivi.

[****] Par. II. Cap. II. Art. II. §. 3.

3. Meritano d'eſſere notati in queſto ſito i *Solchi* lunghi più di una linea per li quali ſcorrono i *N.* motori comuni prima di arrivare all'apertura interna dei *canali* ai tronchi loro deſtinati, che guidano verſo le orbite, dove penetrano per un *foro bislungo* quaſi naſcoſto dalla radice di quelle brevi *ſpine oſſoſe*, che ſtanno ſul fianco eſterno dei *fori carotidei* a livello della radice delle apofiſi orbitarie poſteriori. *

ARTICOLO V.

De' Fori Patetici.

Si trovano proprio nella foſſa pituitaria ſotto quella oſſoſa laminetta, che fa l' interno margine degli ora deſcritti ſolchi, e canali, alquanto più ſulla parte anteriore dei parieti della ſuddetta foſſa, e ſul fianco eſterno dei *fori carotidei*. Si aprono il varco obbliquamente nelle orbite fra la apertura della coppia precedente, e quella dei *fori carotidei* medeſimi.

ARTICOLO VI.

Fori venoſi della foſſa Pituitaria.

Alla parte anteriore del fondo della foſſa pituitaria ſi veggono due aperture ovali poco meno larghe d' una linea, per le quali eſcono del cranio due *emiſſarj* della *D. M.* ſimili a due groſſe vene: diedi loro perciò il nome di fori venoſi della foſſa pituitaria.

ARTICOLO VII.

Fori Carotidei.

1. Alla parte poſteriore della medeſima foſſa, dove ſi va reſtringendo, ed abbaſſandoſi nella ſoſtanza cavernoſa della tuberoſità

---

* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 6.

beroſità baſilare * vi è la foce dei due ampli canali oſſoſi circonfleſſi, la bocca dei quali è già ſtata da noi mentovata qui ſopra, ** ne' fianchi della *colonna oſſoſa* tra le faccette articolari, e la porzione più baſſa della radice delle apoſiſi maſtoidee. Sono i fori carotidei interni, irregolarmente ovali, e larghi poco meno d'una linea. Per queſti canali o condotti nei cranj delle oche, delle anitre, delle galline, e della maggior parte degli uccelli ſcorrono i tronchi delle arterie carotidi, le quali uniformemente a quello, che ſi oſſerva nell' encefalo umano, vengono a sboccare nei lati della foſſa pituitaria per diramarſi nella ſoſtanza del cervello.

2. Danno pur anco paſſaggio al paro dei nervi *Intercoſtali, o grandi Simpatici*.

ARTICOLO VIII.

Fori Oſtalmici

1. Situati ſul margine inferiore delle foſſe dei *talami* ***, queſti fori vengono così detti perchè vi paſſa il tronco di quei nervi, che vedremo (aſſai più manifeſtamente ancora, che negli uomini) avere negli uccelli origine diſtinta da quella dei *N.* maſcellari ſuperiore, ed inferiore.

2. Nei cranj mondi ſi ſcorge il largo e profondo *ſolco*, ſul quale ſcorre il *N.* oſtalmico mentre che, ſcioltoſi dal *ganglio* **** comune ai due maſcellari ora accennati, ſi porta obbliquamente addentro per imboccare il proprio foro, che è ritondo, aſſai largo, e diſtante quello del lato deſtro più di lin. 3. dal ſiniſtro, di maniera che forma l' angolo eſterno d' un triangolo immaginabile tra queſto, la foſſa pituitaria, e il foro del *N.* motor eſterno degli occhi.

3. L' uſcita del *N.* oſtalmatico nelle orbite ſi trova fra

---

* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 12.

** E alla Par. I. Cap. II. Art. IV., e §. 4.

*** Par. II. Cap. II. Art. I. §.§. 14., e 15.

**** Cap. antecedente, Art. II. §.§. 10., 11., 12.

quella del patetico, quella del motor comune, e la faſcia interna della ſpina. *

4. Vi è pure una tenue lamina oſſoſa, che ſerve di volta al canale del *N.* oſtalmico, e di fondo al ſolco del *motor comune degli occhi*.

ARTICOLO IX.

Fori Motori eſterni.

Queſti fanno la nona coppia, e ſono lin. 3 + 1 : 4 poſteriormente alla foſſa pituitaria, lontani due linee il deſtro dal ſiniſtro, e lin. 1 + 1 : 2 dal margine delle foſſe sfondate: ** vi paſſano i *N. motori eſterni degli occhi* dopo aver fatto un lungo tragitto a traverſo della ſpeſſezza della baſe del cranio, al di ſotto della foſſa pituitaria, in un canale che sbocca nella parte poſteriore delle orbite; e qui amendue i nervi ſi diramano nei muſculi deſtinati al globo degli occhi, e nelle tuniche dei globi ſteſſi dal canto delle orecchie.

ARTICOLO X.

Fori maſcellari ſuperiori, ed inferiori.

1. La decima, e l'undecima coppia de' fori ſono nelle foſſe sfondate; e ſiccome ſervono amendue a dar paſſaggio ad un ramo diſtinto del *N.* maſcellar ſuperiore, così le comprendiamo in un ſolo articolo, ſebbene il primo più anguſto, occupato tutto dal ramo del ſuddetto, ne ritenga il nome, ed al ſecondo, perchè dà paſſaggio al tronco del *N. maſcellar inferiore* unitamente ad un' altra branca del maſcellar ſuperiore, io dia il nome di maſcellar inferiore.

2. Il *foro maſcellar ſuperiore* adunque ſi trova alquanto più innanzi e verſo l' aſſe del pavimento della cavità del cranio. Dà paſſaggio ad un groſſo ramo del *N.* maſcellar ſuperiore,

---

* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 16.

** Par. II. Cap. II. Art. II. §. 9., e 10.

delle diramazioni del quale favelleremo a lungo quando deſcriveremo la parte ſuperiore del becco.

3. Il *maſcellar inferiore* poi è aſſai più grande avendo due linee di diametro. Si trova alquanto più addietro del precedente. Si apre nella parte anterior eſterna delle foſſe sfondate per dar paſſaggio al tronco principale del *N.* maſcellar ſuperiore nel medeſimo tempo, che ne eſce pure il tronco del maſcellar inferiore, giacch' è appunto in queſto ſito il ganglio *, onde negli uccelli ſono inſieme confuſi queſti due tronchi.

4. Quinci eſce del pari il terzo paro degli *emiſſarj* ** della *D. M.* detti *emiſſarj laterali eſterni*.

5. La diſtanza dei fori maſcellari inferiori tra di loro è di ſette linee.

6. Tra queſti poi, e le foſſe ovali *** ſi vede un *iſtmo* oſſoſo molto ſpeſſo largo tre linee.

ARTICOLO XI.

Fori Auditorj.

Nelle foſſe ovali **** abbiamo indicato inſinuarſi una porzion notabile di ſoſtanza dependente dal cervelletto, nella quale dimoſtreremo a ſuo luogo eſſere avviluppato il vero nervo auditorio, cioè quello, che negli uomini ſuol eſſere conoſciuto ſotto il nome di porzion molle del nervo auditorio. Il fondo di queſti antri è minutiſſimamente crivellato per dar paſſaggio a' rami proporzionati di tal nervo.

---

* Cap. precedente Art. II. §. 10., 11., e 12.

** Par. II. Cap. II. Art. II. §. 15.

*** Ivi §. 13.

**** Cap. precedente Art. II. §. 15.

ARTICOLO XII.

Fori piccioli ſimpatici.

1. Tra il margine anteriore delle foſſe ovali, il poſteriore delle sfondate, e l'orlo vicino dei *fori laceri* ſi vede una foſſicella ſuperficiale, anch' eſſa ovale. In queſta ſi contano diverſi forellini (talora cinque per parte, talora ſei, talora quattro, altre volte da un canto ve n' ha più che dall'altro incoſtantemente per quello, che riguarda il lato deſtro, o ſiniſtro) e per queſti forellini penetrano nel labirinto, deſtinato alla perſezione dell'udito negli uccelli, i fili dei nervi piccioli ſimpatici.

2. Non meritano nemmeno in queſti animali il nome di porzion dura dei *N.* auditorj, ripugnante alla deſtinazione loro, perciocchè ſebbene da queſti nervi la membrana bipartita del timpano, gli oſſetti, e le apofiſi bizzarre loro ne ſono provveduti negli uccelli di qualche filuzzo nervoſo, come la ſuddetta membrana, e i muſculi del martello e della ſtaffa nell' uomo e nei quadrupedi; tuttavia i rami principali vanno a diramarſi nelle parti molli eſteriori dei lati della teſta.

3. Queſta diſtribuzione oſſervaſi anche meglio ne' volatili più groſſi, come ſono le oche, le anitre, i barbagianni, le grù, gli aghironi, i galli d' india, gli ſparvieri, i nibbj, le galline, e può da ognuno vederſi anche nei minori purchè vi abbia l'occhio per vedere e la mano per notomizzare avvezzi; che altrimenti la ſottigliezza di tali diramazioni per entro ad un compleſſo di parti in apparenza aſſai confuſa, in ſoſtanza tenere, molli, e minute, può deludere l' acume d' un ornitotomiſta meno eſercitato.

ARTICOLO XIII.

Fori laceri.

1. Una linea poſteriormente alla foſſicella ſuperficiale ora deſcritta, ed una linea pure al di ſotto delle foſſe ovali, ſi trova la coppia dei fori equivalenti ai laceri, o ſtracciati

del cranio umano, deſtinata eziandio negli uccelli a dar paſſaggio ai tronchi del par vago.

2. Se poteſſi uniformarmi all' uſo comune antico di numerare i nervi dell' encefalo, queſto paro ſarebbe anche qui l'ottavo; ma ſiccome debbo conformarmi alla natura, ed eſporre con tutta la chiarezza poſſibile quello ch'io veramente ci vedo, e che da chiunque ha da vederſi, così nella quarta parte dell' Encefalotomia umana ho dimoſtrato i nervi nell' encefalo umano eſſere quindici para, per quello che riſguarda i principali, e tre para d'acceſſorj; nè mi aſterrò a ſuo tempo di far vedere come in quel degli uccelli ſe ne diſcoprono pure quattordici para, dei quali il par vago viene ad eſſere il decimo, ſenza gli acceſſorj a me ſinora ignoti.

3. La lunghezza di queſti fori ſi accoſta alle due linee, e la larghezza a poco meno di una, di modo che il picciolo nervo, che vi paſſa, non occupandone intieramente l'apertura, per eſſa sbocca dal cranio un groſſo emiſſario della *D.* Madre, che ſi fa ſtrada verſo l' eſtremità diretana interna dei fori laceri, dopo d'aver fatto qualche tragitto ſull' orlo poſteriore delle foſſe ovali.

Articolo XIV.

Golfi delle Jugulari.

Nella ſpeſſezza delle oſſa, che fanno il contorno dei fori laceri, ſi vede un incavo ſimile alla foſſa ſcolpita nella rupe delle oſſa temporali umane atta a dar ricetto ad un gozzo venoſo non diverſo dal golfo delle jugulari; e in queſto mettono foce non ſolamente l' emiſſario poc' anzi mentovato, ma eziandio una groſſa vena, che vi diſcende dalla caſſa del timpano; danno inſieme origine alle vene jugulari: e quantunque nella cavità del cranio i fori laceri abbiano una ſola apertura piuttoſto ſpazioſa, alla baſe del cranio però, cioè eſteriormente, al di dietro delle apofiſi maſtoidee, * nella

---

[*] Par. I. Cap. II. Art. I. §. 9.

foſſa, che dà maggiore riſalto a tali apofiſi *, il foro è ſempre doppio, e per il medeſimo, come nei cranj umani, il nervo paſſa per l'apertura anteriore, e per la poſteriore sbocca nelle vene jugulari, per il golfo loro, il ſangue portato dal ſuddetto emiſſario, che tien negli uccelli il luogo dei ſeni laterali notiſſimi nell' uomo, e ne' quadrupedi. Queſti *emiſſarj* ſono i *laterali poſteriori*.

ARTICOLO XV.

Fori Palatini.

La coppia de' fori, che ſta immediatamente dietro ai vaghi, è deſtinata al paſſaggio di due tronchi nervoſi, che vanno a diramarſi nella membrana del palato. Il deſtro foro è lontano quaſi due linee dal ſiniſtro, e tre dal *gran foro occipitale*, ſui margini laterali del catino **, e ſono come il paro ſeguente paralleli all' aſſe longitudinale del catino medeſimo.

ARTICOLO XVI.

Fori Ipogloſſi.

I veri *nervi ipogloſſi*, che negli uccelli naſcono ſempre con due piatte radici per lato dai fianchi anteriori della *midolla allungata*, eſcono del cranio per una coppia di fori ſituati nel catino, mezza linea più addietro de' fori palatini. In molti individui però, anche nelle ſpecie diverſe, queſti fori, ch' io nomino *ipogloſſi*, ſi trovano a due per lato, ſimmetrici, e paralleli all' aſſe longitudinale del catino. In amendue i caſi i tronchi nervoſi, o unite, o diviſe avendo le piatte radici loro, attraverſano la ſpeſſezza della baſe del cranio, alquanto obbliquamente inclinando verſo l' incavatura maſtoidea ***, ed uſcendo dalla parte anteriore della medeſima traforano le parti vicine per diramarſi nella ſoſtanza della lingua.

---

* Ivi Art. III. §. 9.

** Cap. precedente Art. I. §. 16.

*** Par. I. Cap. II. Art. III. §. 9.

ARTICOLO XVII.

Gran foro Occipitale.

1. Finalmente vediamo il *gran foro occipitale* ſituato quaſi nel mezzo della poppa, o faccia poſteriore del cranio. A lin. 4 + 1 : 2 di diametro verticale, e lin. 4 + 2 : 3 di diametro traverſo. E' molto arcato all' orlo ſuperiore, ed al margine inferiore porta affiſſa eſteriormente la apofiſe occipitale *, coperta di liſcia cartilagine, cui mediante il capo ſi articola con la prima vertebra cervicale.

2. Queſto foro dà paſſaggio alla ſpinal midolla, e a due ampli emiſſarj, che formano il quinto paro, detti *emiſſarj occipitali:* contengono molto ſangue, che sbocca in due groſſe vene, coſteggianti nella diſceſa loro i lati delle vertebre del collo, ingroſſate da altri vaſi. **

3. A tali vene ſono paralleli due mediocri tronchi arterioſi, che aſcendono ſu per il collo verſo l'encefalo; s'introducono nella cavità del cranio per il gran foro occipitale, e ſono le arterie vertebrali deſtinate ad irrigare la ſoſtanza del cervello.

---

* Par. I. Cap. II. Art. II. §. 14.

** Vedi l' Art. XIII., e il XIV. precedenti.

DELLE OSSERVAZIONI

SOLSTIZIALI.

Fatte allo Gnomone della Cattedrale Fiorentina nell' Anno 1782, *e de' loro Riſultati paragonandole colle ſimili Oſſervazioni del* 1756, 1764, *e* 1775.

Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di S. A. R. il Granduca di Toſcana.

INTRODUZIONE.

LE oſſervazioni ſolſtiziali fatte al vaſto Gnomone della Cattedrale Fiorentina col paragone al Marmo ſolſtiziale del 1510 ſono ſtate da me lungamente deſcritte nel mio Volume ſu queſta materia. (*a*)

Le oſſervazioni del 1764 ſono ſtate da me racchiuſe in un Opuſcolo inedito, del quale ſomminiſtrerò tutto ciò che concerne il preſente argomento negli Articoli ſeguenti.

Le altre oſſervazioni del 1775 ſono ſtate ſtampate a Livorno l' anno 1776. (*b*)

Era da me atteſo con impazienza il corrente anno 1782, nel quale, eſſendo il nodo aſcendente lunare preſſo il principio dell' Ariete, mi ſomminiſtrava il termine di un importante paragone con tutte le altre oſſervazioni dal 1756 ſino al preſente.

Poichè due ſono gli elementi, che io mi ſon propoſto a verificare con queſto altiſſimo, ed immobiliſſimo Settore, il cui

---

(*a*) Veggaſi il Tomo intitolato: *Del Vecchio, e nuovo Gnomone Fiorentino* ecc. ſtampato a Firenze l' anno 1757.

(*b*) Veggaſi l' Opuſcolo intitolato: *Diſſertazione intorno alle oſſervazioni del* 1775 *allo Gnomone della Meridiana Fiorentina* ecc. Livorno 1776.

cui raggio ſupera piedi parigini 277. Il primo intorno al periodo ſecolare dell'obbliquità dell'ecclittica, nel quale la diſcordia degli Aſtronomi era tanto grande, quanto era grande l' importanza di queſta ricerca, dalla quale, come ciaſcun ſa, dipendono alcuni piccoliſſimi movimenti apparenti delle ſtelle fiſſe, della terra, e de' pianeti, i quali hanno tormentati gl' ingegni degli Aſtronomi moderni. Or queſto primo elemento è ſtato da me verificato talmente ne' due Volumi citati, che parte per l' eſattezza delle oſſervazioni, e parte per il loro conſentimento con altre ſomiglianti oſſervazioni antiche, e moderne, i più inſigni Aſtronomi a tal nuova mia opinione ſi ſono accoſtati (*c*) recedendo dal periodo di 88″, di 47″, e di 45″, e tenendoſi all' altro periodo aſſai più riſtretto di 34″. 42 centeſime, da me determinato colle oſſervazioni del 1756, e 1775.

Stabilito adunque queſto primo elemento, reſtava il ſecondo non meno importante del primo, ma di una indagine aſſai più malagevole, e queſto è il vero valore della nutazione dell' aſſe terreſtre, la quale va ſempre alterando le medie obbliquità dell'ecclittica, e non meno le poſizioni apparenti di tante migliaja di ſtelle fiſſe, i cui piccoliſſimi moti, tanto in latitudine, che in longitudine, ſono ſtati ſcoperti dalla moderna Aſtronomia, ed in particolare dal rinomato Ingleſe Aſtronomo il *Bradlejo*. Egli dal 1727 ſino al 1747 con grandiſſimo numero di oſſervazioni, che non potevano ſpiegarſi nè coll' annua parallaſſi, nè coll' aberrazione della luce, ritrovò, che detti fenomeni godevano di una ſemplice ſpiegazione, ſupponendo una nutazione dell' aſſe terreſtre, la quale ſi manifeſtava dipendente dal nodo aſcendente lunare, il quale quando trovavaſi al principio d' Ariete, la nutazione era maſſima boreale nelle ſtelle fiſſe, che erano proſſime al coluro de' ſolſtizj. E quando al contrario il detto nodo era paſſato al principio della Libra,

---

(*c*) Tra queſti uno è l'accuratiſſimo, e chiariſſimo M: de la *Lande* il quale nel Tomo IV. della ſua Aſtronomia ha fiſſato tal periodo ſecolare di 33″$\frac{1}{3}$, pochiſſimo differente dal mio di 34″. 2 centeſime.

la nutazione cambiavaſi in auſtrale, ed in tal ſenſo era pur maſſima.

Il valore di tal nutazione fu giudicato dal medeſimo Aſtronomo di 18″, e così è ſtato ſeguitato da altri Aſtronomi. Io dalle oſſervazioni del 1764, paragonate con quelle del 1756, l' ho dedotto maggiore, e come tale l' eſpongo nel citato Opuſcolo inedito. In eſſo mi mancavano le nuove oſſervazioni dell' anno corrente, le quali avendo fatte con particolar diligenza, mi ſon ritrovato nel grado di eſaminare la ſteſſa ricerca della nutazione, non già con una, ma bensì con quattro combinazioni.

La prima delle oſſervazioni del 1756 paragonate a quelle del 1764.

La ſeconda di queſte colle oſſervazioni del 1775.

La terza del 1775 con quelle del corrente anno 1782.

E finalmente la quarta del 1756 con quelle dello ſteſſo anno 1782.

In queſti anni due volte il nodo aſcendente lunare ſi è ritrovato proſſimo al principio d' Ariete, cioè nel 1764, e 1782.

Due volte pure ſi è incontrato nelle vicinanze della Libra, come nel 1756, e 1775.

Nel primo periodo ci corrono anni 18, e nel ſecondo anni 19. Il vero periodo del nodo aſcendente lunare è di anni 18.63 parti centeſime. La frazione, che manca, o eccede ne' due periodi, è tale, che facilmente riduceſi co' ſoliti metodi.

Per la qual coſa, eſſendo io in grado di provare il valore della nutazione con quattro combinazioni formate in detti due periodi, ho intrapreſa queſta fatica, eſſendo impazientiſſimo di verificare queſto ſecondo elemento della nutazione dell' aſſe terreſtre. Quale ſia il riſultato, ſi vedrà in queſta breve Memoria, che è l' eſtratto di una aſſai lunga, che io differiſco ad altro tempo, non potendo per ora renderla pubblica. Ma non ho voluto differire l' edizione del preſente riſtretto per la ſua graviſſima importanza nell' Aſtronomia.

Non poſſo diſſimulare, che fino dal principio dell' opera più oſtacoli mi ritardavano, e tacendo degli altri, un grave oſtacolo mi preſentava l' elemento del lunar perigeo, che doveva certamente influire nella nutazione deſiderata; ma non ſi ſapeva, ſe il ſuo influſſo foſſe ſenſibile, o no, e di qual valore eſſo ſi foſſe. Nacque il primo ſoſpetto nello ſteſſo *Bradlejo*, ma io non ſo, ſe egli, o altri Aſtronomi dopo di lui ſi ſiano applicati di propoſito a calcolarlo. Or ſe in altre ricerche Aſtronomiche è neceſſario un tale articolo, nella preſente mia ricerca egli è indiſpenſabile. Trattaſi qui d' indagare, ſe la nutazione ſia di 18″, di 19″, ovvero di 20″, parendomi che tali ſiano i limiti della nutazione. Se adunque l' equazione del lunar perigeo per aumentare la nutazione foſſe di uno, o due ſecondi, eſſo verrebbbe ad alterare tutta queſta ricerca. Potrebbe apparire la nutazione di 20″, quando collocato il lunar perigeo diverſamente, cioè in maniera tale, che correſſe la diſtanza media lunare, eſſa nutazione ſcemaſſe di 2″, e così foſſe di 18″, ſecondo l' ipoteſi di *Bradlejo*. Ed in ſenſo contrario, ſe la nutazione foſſe boreale, ed il lunar perigeo ſi ritrovaſſe ne' ſegni auſtrali, e ſpecialmente verſo il principio del Capricorno, la nutazione attuale ſcemando di 2″ apparirebbe di 18″, quando eſſa foſſe di 20″.

A' primi calcoli da me teſſuti, come eſpongo lungamente nella Memoria eſteſa, ho ritrovato appunto, che l' equazione maſſima del lunar perigeo, per aumentare, o per diminuire la nutazione, ſi accoſtava a 2″. Potendo eſſi adunque far variare i riſultati in una materia così ſottile, e così geloſa, mi è convenuto tener dietro alla teoria del lunar perigeo, ed alle ſue equazioni. Mi è convenuto formare una Tavola, per l' equazioni dello ſteſſo perigeo. Mi è convenuto ridurre le quattro mie combinazioni non ſolamente al principio della Libra, o dell' Ariete, ma ancora alla diſtanza media lunare, affinchè la ſua azione ſia nulla, e così non poſſa nè aumentare, nè diminuire il vero valore della nutazione.

Stabilito così queſto ſecondo elemento, ho dovuto con eſſo ricalcolare la Tavola, che ho inſerita alla pagina 82 della Diſſertazione del 1775, introducendo in eſſa queſto nuovo elemento, cioè dell' equazione per il lunar perigeo. Nella detta nuova Tavola ſono calcolate le vere obbliquità dell' ecclittica dal 1775 al 1802 coll' elemento del perigeo lunare. In eſſa pure la nutazione, che facevaſi di 20″, è ſtata corretta ſecondo le moderne oſſervazioni. In eſſa finalmente è ſtato meſſo un accordo nell' epoca dell' obbliquità oſſervata a Parigi, ed a Firenze. In tal epoca vi era una differenza di 6″ incirca. Io dunque avendo diminuita la latitudine Fiorentina di 6″, riſpetto a quella fiſſata nel 1756 nel mio Gnomone, ho proccurato un accordo tra le due epoche, per andare in avvenire con tutta l' uniformità, e corriſpondenza nelle oſſervazioni Parigine, e Fiorentine.

Non ſo ſu quali oſſervazioni la latitudine Fiorentina nella *Connoiſſance des temps* di queſti anni ſi ſtabiliſca di 43°. 46′. 30″, quando eſſa è certamente maggiore.

Nel libro dello Gnomone ſono ſtate deſcritte tutte le oſſervazioni da me fatte nel 1755, e 1756 ſulla ſtella polare, ed il loro riſultato, che fu della latitudine di 43°. 46′, 53″. Avendone ora detratti 6″ per le ragioni, che accennerò, reſterà tal latitudine alla Cupola della Cattedrale di 43°, 46′, 47″.

Formate le due Tavole, cioè delle diverſe nutazioni del polo terreſtre a diverſe poſizioni del nodo aſcendente lunare, e delle diverſe equazioni, ora additive, ed ora ſottrattive, che corriſpondono alle diverſe longitudini del lunar perigeo, ora altro non reſterebbe, ſe non che la formazione delle altre Tavole, per ben rappreſentare i piccoli apparenti movimenti delle ſtelle fiſſe, che ſi trovano ſenſibilmente lontane dal coluro de' ſolſtizj. Ma una tal ricerca è per ſe ſteſſa aſſai facile, applicandole gli elementi da me ritrovati, ed è eſtranea all' oggetto preſente, che conſiſte nel ben rappreſentare le oſcillazioni delle obbliquità dell' ecclittica per la combinazione del ſuo moto ſecolare periodico, e del moto oſcillatorio originato da' nodi lunari, e dal lunar perigeo.

Se l' eſito di queſte mie ricerche corriſponderà negli anni futuri alle immediate oſſervazioni dell' obbliquità dell' ecclittica, e delle poſizioni delle ſtelle fiſſe, vuol rimetterſi alla deciſione del tempo, e de' più accurati oſſervatori. Queſta è la più ſottile ricerca della moderna Aſtronomia. Onde ſenza un tempo ben lungo, ed una ſerie di ſquiſitiſſime oſſervazioni, non potremo ottenere certezza maggiore della preſente.

ARTICOLO I.

Delle oſſervazioni Solſtiziali fatte allo Gnomone della Cattedrale Fiorentina queſt' anno 1782.

Incomincerò queſta breve Memoria dalle oſſervazioni ſolſtiziali fatte al grande Gnomone della Cattedrale Fiorentina del corrente anno 1782, tralaſciando per brevità tutte le annotazioni, e ricordi del regiſtro originale.

Per ridurre dette oſſervazioni al momento ſolſtiziale vi va detratta la differenza in declinazione tra 'l dì ſolſtiziale, che fu il dì 21 di Giugno, ed il dì di una data oſſervazione. E come le Tavole ſolari del Sig. *Abb. la Caille* ſono calcolate al meridiano di Parigi, la detta differenza va ridotta al meridiano Fiorentino. Con tali riduzioni riporterò le diſtanze del centro ſolare dal vertice, detraendo da eſſe la differenza in declinazione colla riduzione al meridiano.

La prima oſſervazione fu fatta il dì 15 Giugno, ma paſſando per i trafori del feneſtrone auſtrale del Cupolino de' raggi di una luce ſpuria, che alteravano l' immagine ſolare formata da' raggi centrali, eſſa reſtò tanto dubbioſa, che non potè farſene conto. Indi è che io comincerò il preſente regiſtro dall' oſſervazione del dì 17, che ſecondo l' ordine ſarebbe la ſeconda, ma tralaſciata la prima, eſſa occuperà il ſuo poſto.

OSSERVAZIONE I.

Del dì 17. *Giugno.*

	Gradi	*Min'.*	*Min''.*	*Cent.*
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	37'.	17''	
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20.	5.	24.	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	0.	15.	56.	50.
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	21.	20.	50.

	Gradi	Min'.	Min''.	Cent.
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino . . .		3.	10.	
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	10.	50

OSSERVAZIONE II.

Del dì 18. *Giugno*.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	35'.	59''.	50
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20.	3.	36	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	0.	16.	11.	50.
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	19.	47.	50.
Riduzione al momento ſolſtiziale del meridiano Fiorentino . . .	0.	1.	42.	00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	5.	50

OSSERVAZIONE III.

Del dì 19. *Giugno*.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	35'.	18''.	50
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20.	2.	36.	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	21.	25
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	18.	57.	25.
Riduzione al momento ſolſtiziale del meridiano Fiorentino . . .		0.	45.	
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	12.	25

OSSERVAZIONE IV.

Del dì 20. Giugno.

	Gradi	*Min'.*	*Min''.*	*Cent.*
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	34'.	43''.	
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	1.	54.	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	24.	50
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	18.	18.	50
Riduzione al momento ſolſtiziale del meridiano Fiorentino			10.	
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	8.	50

OSSERVAZIONE V.

Del dì 21. Giugno giorno ſolſtiziale.

Il ſolſtizio dell' anno corrente è accaduto quaſi ore 2 prima del mezzogiorno.

Diſtanza dell' orlo auſtrale dal zenith	20°.	34'.	32''	
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	1.	49	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	21.	50
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	18.	10.	50

La riduzione tanto per la declinazione, quanto pel meridiano Fiorentino, quanto pure della diſtanza del momento ſolſtiziale dal mezzogiorno è affatto inſenſibile. Onde ſi tralaſcia.

OSSERVAZIONE VI.

Del dì 22. Giugno.

	Gradi	*Min'.*	*Min''.*	*Cent.*
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	34'.	51''.	50
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20.	2.	00.	00
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	25.	75
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	18.	25.	75
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino . . .			16.	00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	9.	75

OSSERVAZIONE VII.

Del dì 24. Giugno.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	35'.	28''	
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20.	2.	44	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	21.	75
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	19.	6.	25
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino . . .		0.	54.	00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	12.	25

OSSERVAZIONE VIII.

Del dì 24. Giugno.

	Gradi	Min'.	Min''.	Cent.
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	36'.	30''.	
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20.	3.	46	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	22	
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	20.	8	
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino . . .		2.	00	
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	8	

OSSERVAZIONE IX.

Del dì 25. Giugno.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20.	37.	59.	
Diſtanza dell' orlo boreale . .	20.	5.	14.	50
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	22.	25
Diſtanza del centro ſolare dal zenith.	20.	21.	36.	75
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino . . .		3.	29	
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	7.	75

OSSERVAZIONE X.

Del dì 26. Giugno.

	Gradi	*Min'.*	*Min''.*	*Cent.*
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	39'	52''.	50
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	7.	00.	00
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	26.	25
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	23.	26.	25
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino		5.	20.	40
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	5.	45

OSSERVAZIONE XI.

Del dì 27. Giugno.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	42'.	11''.	50
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	9.	24.	20
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	23.	65
Diſtanza del centro ſolare dal zenit	20.	25.	47.	95
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino		7.	38.	06
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	9.	89

OSSERVAZIONE XII.

Del dì 28. Giugno.

	Gradi	*Min'.*	*Min".*	*Cent.*
Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20°.	44'.	48"	
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	12.	06	
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto		16.	21	
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	28.	27	
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino		10.	19.	68
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotto	20.	18.	7.	32

OSSERVAZIONE XIII.

Del dì 30. Giugno.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20.	51.	34.	25
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	18.	42.	00
Semidiametro ſolare indi dedotto . .	00.	16.	55.	81
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	35.	8.	12
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino	00.	16.	55.	81
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	12.	31

OSSERVAZIONE XIV.

Del dì 1. Luglio.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20.	55.	24.	00

	Gradi	Min'.	Min''.	Cent.
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	22.	38.	00
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	00.	16.	23.	00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	29.	01.	00
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino	00.	20.	56.	36
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	4.	64

OSSERVAZIONE XV.

Del dì 2. Luglio.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	20.	59.	46.	00
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	26.	56.	00
Simidiametro apparente ſolare indi dedotto	00.	16.	25.	00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith	20.	43.	21.	00
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino	00.	25.	16.	00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	5.	00

OSSERVAZIONE XVI.

Del dì 3. Luglio.

Diſtanza dell' orlo ſolare auſtrale dal zenith	21.	4.	32.	50
Diſtanza dell' orlo boreale	20.	31.	42.	50
Semidiametro apparente ſolare indi dedotto	00.	16.	25.	00
Diſtanza del centro ſolare del zenith	20.	48.	7.	50
Riduzione al momento ſolſtiziale, ed				

	Gradi	Min'.	Min''.	Cent.
al meridiano Fiorentino	00.	30.	0.	00
Diſtanza del centro ſolare dal zenith ridotta	20.	18.	7.	50

Della media diſtanza del centro ſolare dal vertice ridotta al momento ſolſtiziale, ed al meridiano Fiorentino.

Eſſendo deſcritta, come dubbioſa, la prima oſſervazione del dì 15. Giugno, a motivo de' raggi eſtranei ſolari che turbavano la terminazione degli orli ſolari, dovremo eſcluderla, e prevalerci ſoltanto delle XVI oſſervazioni ſuſſeguenti dal dì 17. Giugno ſino al dì 3. Luglio. Recapitolando adunque i loro riſultati ſarà

	Gradi	Min'.	Min''.	Cen.
Per l' oſſervazione II. diſtanza dal zenith corretta	20.	18.	10.	50
Per la III.			5.	50
Per la IV.			12.	25
Per la V.			8.	50
Per la VI			10.	50
Per la VII.			9.	75
Per la VIII.			12.	25
Per la IX.			8.	00
Per la X.			7.	75
Per la XI.			5.	45
Per la XII.			9.	89
Per la XIII.			7.	32
Per la XIV.			12.	31
Per la XV.			4.	64
Per la XVI.			5.	00
Per la XVII.			7.	50
Eſſendo la ſomma de' ſecondi 137''. 11 cen. dividendola per le XVI oſſervazioni, ſarà la diſtanza media ſolare dal zenith	20.	18.	8.	55

ARTICOLO II.

Rifleſſioni ſulla diſtanza media già dedotta, e corriſpondenza delle oſſervazioni tra di loro.

Prima di oltrepaſſare alle conſeguenze, che da queſte oſſervazioni ſi dedurranno, ſarà ben fatto di riflettere, che la diſtanza ſolare media al zenith ridotta, come è ſtato fatto, concorda così bene con un buon numero di oſſervazioni, che il ſuo divario da eſſe batte ad 1″, o poco più.

Tali ſono le oſſervazioni V, VII, IX, X, XII, XIII, e XVII. Onde, come ciaſcuno potrà riſcontrare, la media diſtanza già dedotta differiſce da queſte VII oſſervazioni preſſochè di 1″, argomento aſſai certo della preciſione di queſte oſſervazioni.

Le più diſcordanti dalla media, una per difetto, e l' altra per eceſſo, ſono la XV, e la XIV. La prima ci preſenta 4″. 64 cen. Ond' eſſa è minore della media di . . 3″. 91 cen.
La ſeconda, che è l' eceſſiva, ci dà . . . . 12. 31 cen.
che differiſce da . . . . 8. 55 cen.
di 3″. 36. cen.
Tutte le altre o eccedono, o ſcarſeggiano più di 1″, e meno di 3″. 36 cent. Il che pure ci paleſa l'eſattezza di queſte oſſervazioni al vaſtiſſimo Gnomone della Cattedrale.

Merita però, che alla prima rifleſſione ſi aggiunga la ſeconda, particolarmente per gli Aſtronomi, che non hanno mai fatte delle oſſervazioni alle gran meridiane, e perciò ne hanno un' idea molto confuſa, per non dire erronea. Queſta è che una buona parte di tali differenze hanno un' origine, che non dipende dalla natura delle meridiane, ma bensì dall' indole delle refrazioni, che ſono ſuſcettibili di qualche varietà ſecondo i venti, ſecondo gli ſtati dell' atmosfera, che attraverſano i raggi ſolari, e ſecondo i terreſtri vapori, che in ſu ſi ſollevano paſſando a traverſo de' raggi, che ſi portano o al corno della meridiana, o ancora a teleſcopj i più perfetti. Io parlo di quella oſcillazione, di quel tremolío, che ſi oſſerva negli orli ſolari dell' immagine, che paſſa per una meridiana. Il filo della penombra, benchè aſſai diſtinto, vacilla ſenſibilmente, ſcintillando, per così dire, come ſanno le ſtelle fiſſe, ed è coſa aſſai malagevole nel mezzo di tal tremolío, che i due oſſervatori o dell' orlo auſtrale, o del boreale poſſano con ogni preciſione collocare i loro fili ad ugual diſtanza dal centro. Oſſervando io attentamente tale oſcillazione, e paragonandola alle diviſioni della meridiana, ho giudicato che paſſi i 2″ per parte. E ſiccome tal tremolío dipende dalle attuali, e momentanee diſpoſizioni della terreſtre atmosfera, così era da ſoſpettare che lo ſteſſo fenomeno accadeſſe ancora ne' migliori teleſcopj.

Ho voluto verificare il mio ſoſpetto colla immediata oſſervazione ſolare nel ſuo paſſaggio al meridiano ne' giorni ſuſſeguenti al dì 3 Luglio, in cui furono compite le oſſervazioni allo Gnomone della Cattedrale.

Ho traſcelto un teleſcopio acromatico dollondiano di braccio 1 $\frac{1}{4}$ di foco, che fanno qualche coſa più di piedi 3 Parigini. Ho collocato eſattamente il filo orizzontale del ſuo micrometro, paragonandolo con alcune ſabbriche orizzontali. Indi dirigendolo al Sole ſul punto del mezzogiorno in tal maniera, che il filo radeva preciſamente l' orlo ſolare boreale, un tal orlo ancor eſſo vacillava, ora naſcondendoſi affatto ſotto del filo, ed ora traſparendo ſopra il medeſimo. La differenza per quanto può giudicarſi non era minore di 2″, particolarmente in giornate calide, e vaporoſe, che fanno un cambiamento momentaneo, e continuo nell' atmosfera. Per la qualcoſa, ſe qualche Aſtronomo non verſato nelle oſſervazioni delle gran meridiane voleſſe avere una riprova della loro eſattezza, altro far non dovrebbe, che con un quadrante di ſei piedi di raggio fare una quindicina, o ventina di oſſervazioni prima, e dopo il ſolſtizio eſtivo, e poi riteſſendo i ſuoi calcoli dedurre la diſtanza media corretta. Benchè io non abbia fatta alcuna ſerie di tali oſſervazioni, pure ardiſco di ſoſpettare, che detta media diſtanza ſi ſcoſterà, o ugualmente, od ancora più dalle altre diſtanze medie ridotte col preſente mio metodo.

Un altra riprova potremo dedurre intorno alla corriſpondenza di queſte mie oſſervazioni, riflettendo a' ſemidiametri ſolari oſſervati dal dì 19 Giugno ſino al dì 3 Luglio. E ſtato avvertito nel regiſtro delle mie oſſervazioni , che paſſava una luce ſpuria ſulla meridiana, la quale alterava il filo delle due penombre . Nell' oſſervazione I. tale alterazione era troppo ſenſibile . Era minore nella II , e nella III, ma non ſi potè giugnere ad eſcludere ogni raggio eſtraneo , ſe non dopo il dì 18. Onde da quel giorno ſino all' ultimo la luce dell' immagine era viviſſima, e così il diametro della medeſima fu maggiore , come ſuol eſſere , ma reſtando coſtante la chiarezza dell' immagine ſino al dì 3 Luglio ; veggiamo in detto tempo qual corriſpondenza abbiano i ſemidiametri ſolari apparenti. Il regiſtro di tali ſemidiametri baſta per decidere. Sarà dunque ſemidiametro ſolare nell'

	min'.	*min''.*	*cen.*		*min'.*	*min''.*	*cen.*
Oſſervazione IV.	16.	21.	25	Nella XI.	16.	26.	25
Nella V.	16.	24.	55	Nella XII.	16.	23.	65
Nella VI.	16.	21.	50	Nella XIII.	16.	21.	00
Nella VII.	16.	25.	75	Nella XIV.	16.	26.	12
Nella VIII.	16.	21.	75	Nella XV.	16.	23.	00
Nella IX.	16.	22.	00	Nella XVI.	16.	25.	00
Nella X.	16.	22.	25	Nella XVII.	16.	25.	00

Ora tra queſte XIV oſſervazioni calcolando il ſemidiametro medio eſſo ſi troverà di 16′ 23″, 50 centeſime, che dalle oſſervazioni eſtreme per ecceſſo , o per difetto non diſcorda di 3″, e che ſi accorda con tutte le altre con una differenza di 1″ in 2″.

Avvertaſi, che il ſemidiametro ſolare calcolato con le Tavole dal dì 19 Giugno al dì 3 Luglio non differiſce , che di $\frac{1}{4}$ di ſecondo. Onde può conſiderarſi nel caſo noſtro, come coſtante.

Non eſſendo coteſte le oſſervazioni dell' immagine ſolare colle correzioni delle penombre , come ho fatto nelle oſſervazioni del 1755 , e 1756 , non dee far maraviglia, che l' apparente ſemidiametro della meridiana ſia maggiore del giuſto . Ma adoperando la debita correzione , o col metodo del Sig. *Manfredi* di ſottrarre il ſemidiametro del foco , o coll' altro mio metodo eſpoſto nel mio Tomo dello Gnomone , eſſo ſi accoſterà a 15′, 47″, che è il ſemidiametro calcolato nelle Tavole .

Ancor qui ripeterò, che facendo ſedici, o più oſſervazioni con un teleſcopio acromatico, o con un buon quadrante murale, pigliando ne' giorni ſolſtiziali coll' immediata miſura il ſemidiametro ſolare, forſe la miſura media diſcorderà ugualmente dalle miſure eſtreme, che non deducaſi dalle mie oſſervazioni meridiane.

La riprova tanto delle medie ſolari dal vertice, quanto de' ſemidiametri ſolari in buon numero di oſſervazioni ſtarà ſempre in mano degli Aſtronomi, che non hanno la giuſta idea delle grandi meridiane. Ed io altro non poſſo fare, che eſortargli alla pazienza neceſſaria in ſomiglianti lunghe oſſervazioni.

Nè fa difficoltà, che o per una luce eſtranea, o per la caligine dell' atmoſfera i ſemidiametri ſolari alle meridiane diminuiſcano. Poichè la penombra auſtrale, e la boreale ſi alterano ugualmente. Indi è, che non per queſto reſta alterata la diſtanza del centro.

ARTICOLO III.

Equazione generale additiva alla media diſtanza ridotta del centro ſolare dal vertice dell' obbliquità dell' ecclittica nell' anno corrente 1782.

Aſſicurata, com' è ſtato fatto, la diſtanza media ſolare dal vertice, ed eſſendo ſtata indi dedotta la detta diſtanza ridotta tanto al momento ſolſtiziale, quanto al meridiano, ora altro non reſta, ſe non che applicare alla medeſima l' equazione generale già fiſſata all' articolo X, pag. 67 della mia prima Diſſertazione.

E' compoſta tal' equazione, come potrà vederſi, di partite additive, e ſottrattive, ed il reſiduo rimane additivo, ed è ſecondo il citato articolo di 20″. 69 centeſime, come alla pag. 68. Eſſendo però incluſa in tali partite quella, che appartiene al nodo aſcendente lunare del 1775, che è additiva, ed ivi è ſtata calcolata di 0′. 55 centeſime, eſſa va eſcluſa nella preſente ricerca, dovendoſi introdurre l' equazione competente all' anno corrente, come ſi farà a ſuo luogo.

Adunque detraendo all' equazione dalla totale di . . . . 20″. 69 cent.,
reſterà l' equazione per l' anno corrente di 20. 14 cent.

Eſſendo adunque la diſtanza media ridotta di . . . . : . 20°. 18′. 8″. 55 cent.

avremo la diſtanza dal vertice aggua-gliata per il dì ſolſtiziale di . . . . . 20°. 18′. 28″. 69 cent.

Per ottenere l' obbliquità attuale dell' ecclittica ne' dì ſolſtiziali del 1782, convien ripigliare la latitudine Fiorentina al punto della Cattedrale, che fu da me dedotta con molte oſſervazioni della ſtella polare l' anno 1756, e 1757. Eſſa fu di . . . . 43°. 46′. 53″. 00,

come potrà vederſi nel Tomo dello Gnomone Fiorentino.

Onde ſottraendo la diſtanza dalla latitudine, ne dedurremo l' obbliquità dell' ecclittica pel dì 21 Giugno 1782 di . 25°. 28′. 24″. 31 cent.

ARTICOLO IV.

Paragone di tal obbliquità con quella oſſervata da me allo ſteſſo Gnomone nel 1775.

Nella mia Diſſertazione Aſtronomica pubblicata in Livorno nel 1776 ſono regiſtrate tutte le oſſervazioni di quell' anno, ed applicate le debite equazioni è ſtata dedotta l' obbliquità di quell' anno.

Prima di farne il paragone, convien togliere dall' equazion generale quella, che vi è introdotta per la differenza della nutazione per la poſizione diverſa del nodo lunare del 1756, e del 1775, la qual differenza, come è ſtato rilevato, è di 0″. 55 centeſime.

Indi è, che l' equazione generale riduceſi a . . . . 20. 14 cent.

La media delle XIII oſſervazioni di

quell' anno fu di . . . . 20° 18′. 22″. 85 cent.

A cui aggiungendo l' equazion generale di 20. 14

otterremo la diſtanza del centro ſolare dal vertice di 20. 18. 42. 99

Ma la latitudine Fiorentina è di 43. 46. 53

Onde ſottraendo la diſtanza dalla latitudine, ſarà . . . . 23°. 28′. 10″. 01 cent.

che è l' obbliquità attuale del 1775.

Avvertaſi, che tale obbliquità alla pag. 73 di quella Diſſertazione è ſtata dedotta di 23°. 28′. 9″. 46 cent., e ciò per l' equazione de' nodi lunari, che ivi è racchiuſa, la quale eſſendo ſtata tolta, ſarà l' obbliquità ſenza tal equazione di . , ... 23°. 28′. 10″. 01 cent.

Ma l' obbliquità del corrente anno 1782 è di 23. 28. 24. 31

Onde vi ſi ſcorge la differenza additiva di . . . . 00. 00. 14″. 30 cent.

Or queſta differenza, quando ſarà ridotta coll' equazione del nodo aſcendente lunare, tanto nel 1775, quanto nel corrente anno 1782, inſieme coll' altra riduzione del periodo ſecolare dell' ecclittica, ci paleſerà la nutazione totale dell' aſſe terreſtre.

ARTICOLO V.

Paragone di tale obbliquità con quella della Conoſcenza de' tempi di Parigi nell' anno corrente.

A dì 21 Giugno è regiſtrata nella Conoſcenza de' tempi, che annualmente ſi pubblica a Parigi, di 23°. 27′ 59″

Eſſendo l' obbliquità da me dedotta di 23. 28. 24. 30,

tra l' una e l' altra vi corre il divario di 0. 0. 25. 30.

Un tal divario naſce dall' opinione ſeguitata finora da' Compilatori di quella Efemeride, cioè, che il periodo ſecolare della diminuzione dell' ecclittica ſia di 47″. Indi è, che incominciando dall' epoca del 1750, o altra, che eſſi hanno ſeguitata, le ſottrazioni per il periodo ſecolare ſono ſtate maggiori del vero. Qualche differenza vi ſarà pure nell' epoca. Per tal cagione adunque le obbliquità attuali di quella Efemeride ſarà ſempre minore della vera. Se ſi è ſeguitata l' ipoteſi del periodo ſecolare di 88″, queſti in anni 32, dal 1750 al 1782 porterebbero la differenza di 28″, che ſono più di 25″. 30 centeſime. Comunque ſiaſi, certo è che l' obbliquità di quella efemeride è troppo ſcarſa. Eſſa è ancora tale riſpetto alle oſſervazioni aſtronomiche fatte in queſt' anno a Parigi dal Sig. de la *Lande* a tenore delle quali l' obbliquità attuale è di 23°. 28′. 16″, come appariſce da corteſe lettera del medeſimo Aſtronomo.

Paragonando tale oſſervazione alle mie, non altro divario ſi trova, che di 8″.

ARTICOLO VI.

Paragone di tal obbliquità da me oſſervata con quella del 1956 regiſtrata nel mio Volume dello Gnomone.

Per le prime oſſervazioni fatte allo Gnomone Fiorentino dopo la coſtruzione della preſente meridiana, l' obbliquità dell' ecclittica del 1756 dedotta con gran numero di oſſervazioni fu di . . . . 23°. 28′. 15″, 58 cent.

Eſſendo adunque l' obbliquità dell' anno corrente di 23. 28. 24. 30

tra l' una e l' altra vi corre la differenza di . . . . 00. 0. 8. 32 cent.

Conviene avvertire, che nel 1756 il nodo lunare va non lungi dalla Libra, come ſi calcolerà in appreſſo. In oltre da tal tempo ſino al preſente anno vi corrono anni 26, a cui ſecondo il periodo ſecolare di 34″. 42 centeſime competono 8″. 95 centeſime. Si vedrà in appreſſo nel calcolo, che ſi farà della maſſima nutazione, che tutto queſto combina colle leggi di detta nutazione, e col periodo ſecolare di 34″. 42 centeſime.

ARTICOLO VII.

Paragone della ſteſſa obbliquità con quella, che è regiſtrata nella Tavola della mia prima Diſſertazione.

Alla pagina 82 della prima Diſſertazione pubblicata nel 1776 ſono ſtate calcolate tutte le obbliquità dell' ecclittica, incominciando dal 1775 ſino al 1801. Conſultando in detta Tavola l' anno preſente 1782 vi ſi vede regiſtrata l' attual obbliquità dell' ecclittica di . . . . . 23°. 28′. 25″. 26 cent.
Eſſendo eſſa per le oſſervazioni di 23. 28. 24. 30
non vi ſi ſcorge altro divario che di . 0. 0. 0. 96 cent.

Ora una sì ſtretta corriſpondenza tra l' oſſervazione e la Tavola fa ben comprendere, che le ipoteſi, ſulle quali eſſa è fondata, ſono aſſai vicine alla verità. Queſte ipoteſi ſono, che la nutazion totale ſia, non già di 18″, ma bensì di 20″.

E che il periodo ſecolare della diminuzione dell' obbliquità ſia, non già di 47″, ma bensì di 34″ incirca.

ARTICOLO VIII.

Del vero valore della nutazion totale dell' aſſe terreſtre dedotto da più combinazioni maneggiate colle oſſervazioni ſolſtiziali del 1756, 1764, 1775, *e* 1782.

L' oggetto principale di queſta diſſertazione è ſtato quello di verificare con tutte quelle combinazioni, che ſi potrà, qual ſia il vero valore della nutazione dell' aſſe terreſtre, mentre il nodo aſcendente lunare paſſa dal principio della Libra ſino al principio d' Ariete con moto retrogrado. Quanto una ſimil ricerca ſia rilevante per la moderna Aſtronomia, e per correggere, e ridurre con eſſa tutte le oſſervazioni delle ſtelle ſiſſe, e delle declinazioni ſolari, ſi comprende da ognuno, ſenza che io mi metta a comprovarlo.

Il Sig. *Bradlejo*, come è ſtato diviſato nell' art. I., faceva tal nutazione di 18″, e deduceva dalle ſue oſſervazioni, fatte dal 1728 al 1747, che con tale ipoteſi felicemente ſpiegavanſi alcune varietà, che ſoffrivano le ſtelle fiſſe, che non potevano ſoggettarſi nè alla legge delle aberrazioni, nè a quella della paralaſſi dell' orbe annuo. Egli però non nega, che qualche divario di 2″ in 3″ ſi ravviſa in alcune poſizioni delle ſtelle fiſſe.

Dopo di lui tutti gli Aſtronomi hanno ſeguitata la di lui ipoteſi di 18″. Se non che il chiariſſimo Sig. de la *Lande*, oſſervando, che tal ipoteſi non corriſpondeva a' fenomeni delle maree, ſecondo i quali le forze ſolari, e lunari avevano una diverſa proporzione di quella, che naſceva da tal ipoteſi, propoſe, che detta nutazione ſi aumentaſſe di 1″, facendola di 19″, invece di 18″. Ma egli ſi ſerve di tale ipoteſi non appoggiandola ad alcuna oſſervazione.

Io ho fatto vedere nell' art. I. della Prop. XV, che la nutazione, ancora di 20″, corriſpondeva beniſſimo a' fenomeni delle maree, e ad altri fenomeni della preceſſione degli equinozj.

Inoltre nel 1775 io ho adoperata una tale ipoteſi per le oſſervazioni ſolſtiziali comparative dal 1756 al 1764, ſecondo le quali ſembra indubitato, che la nutazione ſia di 20″, ed ancora di più.

Ripigliando ora da capo queſta ſottile, ma importante ricerca, io mi sforzerò di eſaminarla in alcune combinazioni; e ſono le ſeguenti

Combinazioni formate colle oſſervazioni ſolſtiziali del 1756, 1764, 1775, *e* 1782, *per dedurne la vera nutazione dell' aſſe terreſtre, riducendola al principio di Ariete, o della Libra, e correggendola coll' equazione del lunar perigeo.*

COMBINAZIONE I

Delle oſſervazioni del 1756 *con quelle del* 1764.

Nel 1756 l' obbliquità immediatamente oſſervata e dedotta con gran numero di oſſervazioni alla
Cattedrale fu di . . . . 23°. 28′. 15″. 58 cent.,
come può riſcontrarſi nel mio Gnomone Fiorentino.

Non giungeva allora il nodo aſcendente lunare al principio della Libra, e per ridurvi la nutazione mancava 1″. Onde la nutazione auſtrale ſarebbe diminuita di queſto 1″, che è ſottrattivo.

Onde l'obbliquità ridotta al principio della Libra ſarà di	23°. 28′. 14″. 58 cent.
Il lunar perigeo era ne' ſegni auſtrali, ne' quali era la nutazione. Onde tendeva ad aumentare tal nutazione di 1″. 92 cent. ſecondo il calcolo. Onde in vece di 10″ tal nutazione era di 11″. 92. E così all' obbliquità dell' ecclittica toglieva 1″. 92 di più, che non ſarebbe alla media lunar diſtanza, e perciò conviene aggiungere tale equazione di	0. 0. 1″. 92
Così ſarà l'obbliquità doppiamente ridotta di	23°. 28′. 16″. 50 cent.
Per le oſſervazioni del 1764 era l'obbliquità di	23°. 28′. 32″. 17 cent.

come rilevaſi da una mia Memoria inedita compoſta in quell' anno. Ma qui è convenuto ridurla ſecondo il nuovo metodo.

L' equazione per ridurla al principio d' Ariete è inſenſibile, giacchè il nodo lunare era così proſſimo al 0 d' Ariete, che mancavano ſoli 35′, che ſanno un' equazione inſenſibile, come ciaſcuno comprenderà.

L' equazione del perigeo lunare era additiva di	0″. 82 cent.
onde aggiungendole a	23. 28. 32. 17
ci paleſa l' obbliquità ridotta di . .	23. 28. 32. 99
Ma eſſendo traſcorſi anni 8 dal 1756 al 1764, intanto per il periodo ſecolare è accaduta la diminuzione di . .	2″. 75
che va ſupplita con aggiungerla.	
Onde l' obbliquità con tal nuova riduzione ſarà di	23. 28. 35. 74
Da cui detraendo l' obbliquità ridotta del 1756	23. 28. 16. 50

reſterà la nutazione corretta di . . .	0. 0. 19. 24

COMBINAZIONE II

Delle oſſervazioni del 1764 *con quelle del* 1775.

L' obbliquità oſſervata nel 1775 fu di come potrà rilevarſi dalla mia Diſſertazione ſtampata in Livorno l' anno ſuſſeguente 1776.	23°. 28′. 9″. 46 cent.
Nel detto anno era auſtrale la nutazione, e non giungeva a 0 della Libra, mancandone ancora 1″. 35 cent. le quali avrebbero fatto diminuire di più l' obbliquità. Sicchè ſottraendo	0. 0. 1. 35
ſarà l' obbliquità per la prima riduzione di	23°. 28′. 8″. 11 cent.
L' equazione del perigeo lunare additiva di	1. 26
Onde per la ſeconda riduzione ſarà	23°. 28′. 9″. 37 cent.
Dal 1764 al 1775 ſono ſcorſi anni 11, in cui l' obbliquità è diminuita per il periodo ſecolare di	3. 78
Onde aggiungendole ſarebbe l' obbliquità del 1775 per le tre riduzioni di	23°. 28′. 13″. 75 cent.
Ma nel 1764 per le due riduzioni era di	23. 28. 32. 99
Sicchè detraendo dalla medeſima . .	23. 28. 13. 15
reſterà la nutazione di queſta combinazione di	0. 0. 19″ 84 cent.

COMBINAZIONE III

Delle oſſervazioni del 1775. *con quelle del corrente anno* 1782.

Nel 1782 l' obbliquità oſſervata fu di	23°. 28′. 24″. 30 cent.
Per ridurla al principio dell' Ariete ſi aggiunga	0. 0. 0. 24
E per ridurla alla diſtanza media lunare ſi aggiunga l' equazione . . .	0. 0. 1. 25
Sarà l' obbliquità colla doppia riduzione di	23. 28. 25. 80
Dal 1775 al 1782 ſono corſi anni 7, in cui il moto periodico porta additivi	0. 0. 2. 40
Onde l' obbliquità del 1782 colle tre riduzioni ſarà di	23. 28. 28. 20
Ma quella del 1775 per le due riduzioni era di	23. 28. 9. 31
E così la nutazione per queſta combinazione ſarà di	0. 0. 18″. 89 cent.

COMBINAZIONE IV

Delle oſſervazioni del 1756 *con quelle del* 1782.

Obbliquità del 1782 colle due riduzioni	23°. 28′. 25″. 80 cent.
Obbliquità del 1756 colle due riduzioni	23. 28. 16. 50
Loro differenza	0. 0. 9″. 30
In anni 26 dal 1756 al 1782 la diminuzione ſecolare è ſtata di 8″. 95 cent. ſecondo la ſolita ragione di 32″. 42 per ſecolo. Onde ſupplendo	0. 0. 8. 95
ne riſulterà la media nutazione di	0. 0. 18″. 25 cent.

Recapitolazione delle nutazioni per le IV Combinazioni.

Nutazione ridotta per la Combinazione I.	19″. 24 cent.
Per la Combinazione II.	19. 84
Per la Combinazione III.	18. 89
Per la Combinazione IV.	18. 25
Somma delle nutazioni	76. 22 cent.
Tra le quali la media è di	19. 05 $\frac{1}{2}$ cent.

Ora tal media nutazione ſi accorda colle altre più diſcrepanti in meno di 1″.

La più diſcorde per eceſſo è la II di 19″. 84, e la differenza è di 0″. 78 centeſime.

La più diſcorde per difetto è la quarta di 18″. 25 , e la loro differenza è di 0″. 80 cent.

L' uniformità di tali riſultati, che dipendono da molti elementi, ci fa conoſcere la loro preciſione.

Sarebbe maggiore la diſcordanza di una coll' altra, ſe non s' introduceſſe l' elemento del lunar perigeo. Onde queſto vien comprovato col fatto medeſimo.

Forſe queſto nuovo elemento combinato colla nutazione, che ſenza la frazione di 5 $\frac{1}{2}$ centeſime può farſi in avvenire di 19″, cioè 1″ di più del *Bradlejo*, metterà un accordo maggiore, non ſolo tra le oſſervazioni Braldejane, ma ancora tra le altre aſſaiſſime di altri Aſtronomi. Ma per decidere vi vogliono nuove eſattiſſime oſſervazioni delle ſtelle fiſſe fatte con grandi ſettori di 14, e di 16 piedi. Intanto però io fiſſerò la nutazione di 19″, e con eſſa continuerò gli altri calcoli, che occorreranno.

ARTICOLO IX.

Conſeguenze, che ſi deducono dal vero valore della nutazione.

Confrontando così bene tra di loro le quattro Combinazioni dalle quali è ſtata dedotta la nutazione totale, potremo con ſicurezza ſeguire da ora innanzi la media nutazione già dedotta di 19. 05,

giacchè eſſa non differiſce da' limiti delle eſtreme, e più diſcordanti, ſe non che di 0. 80 cent. che è una aſſai piccola frazione. E per ſecondare frazioni più ſemplici, eſſa potrà fiſſarſi di . . . . 19. 00.

Prima di far paſſaggio alle conſeguenze della nutazione, già determinata, piacemi di ſciogliere una difficoltà, che far ſi potrebbe contro il metodo delle riduzioni, che è convenuto fare per ottenere le intere nutazioni. Poichè potrebbe opporſi, che tali riduzioni ſuppongono la nutazione totale di 20″, onde eſſe ſuppongono fiſſato quel valore, che per mezzo di eſſe va rintracciandoſi. Ma ſparirà tal obbietto agli occhi di coloro, che rifletteranno intorno al valore di tali riduzioni, il quale è così piccolo, che l' errore, che potrebbe naſcere di 1″, o nell' ipoteſi di 9″ ſecondo il *Bradlejo*, o nella mia di 10″, non può mai generare una differenza ſenſibile.

Sia per primo eſempio la Combinazione II, nella quale è ſtata calcolata la nutazione auſtrale di 8″. 65 centeſime, e così la ſua equazione del nodo di 1″. 35 cent. Se invece del ſeno totale eſpreſſo per 10″ valeſſe quello di 9″, altro non dee farſi, ſe non che diminuire detta equazione nella ragione del 10 : 9, ed allora l' equazione ſarebbe di 1″. 215 milleſime, che differiſce dalla prima di ſole 145 milleſime.

Minore ſarà la differenza nella Combinazione I, in cui l' equazione del nodo per il 1756 è di 1″. 00. Onde diminuendo ancor qui nella ragione del 10 : 9 otterremo 0″.90 cent. con differenza di un decimo di ſecondo.

E molto minore ancora ſarà la riduzione del nodo per il 1782 nella Combinazione III, in cui l' equazione è ſtata di 0. 24 centeſime. Onde fatta la riduzione ſarà di 0″. 216 milleſime.

Indi è che per tal tenuità delle differenze, che naſcono dalle due ipoteſi di 10″, e di 9″, e molto più di 9″½, il preſente metodo non può mai dirſi difettoſo.

Che ſe, eſſendo ora più preciſamente fiſſato il vero valore della nutazione, voleſſero con eſſo rifarſi i computi delle quattro Combinazioni, ſparirebbero così quelle piccole differenze, che ſi oſſervano nel primo calcolo, come ſi rileverà dalle conſeguenze, che ne riſultano.

Ed appunto la prima ſarà, che le nutazioni boreali, ed auſtrali tanto in declinazione, che in latitudine ſaranno in avvenire ne' medeſimi punti del nodo aſcendente lunare alquanto maggiori dell' ipoteſi Bradlejana, e minori della mia adoperata nella Diſſertazione del 1775. Eſſendo adunque nella mia Tavola del 1775 adoperata l' ipoteſi di 10″, di nutazione boreale, ed auſtrale, converrà ridurre tutte le obbliquità vere dal 1775 al 1801 colla nuova, e più preciſa ipoteſi di 9″. 50 cent. Sicchè laſciando tutte le obbliquità medie tali quali ſono ſtate in detta Tavola regiſtrate, vi occorre la ſola riduzione delle obbliquità vere.

Seconda conſeguenza. Dovendoſi inoltre introdurre la nuova Teoria del perigeo lunare, l'obbliquità, ridotta per la prima riduzione, va modificata per mezzo della poſizione del lunar perigeo, ſecondo la legge da me diviſata nella Teoria.

Terza conſeguenza. Combinando inſieme le due riferite riduzioni, ne naſce una Tavola delle obbliquità vere corrette dal 1775 al 1802, ed è la ſeguente

NUOVA TAVOLA

Delle obbliquità medie, e vere dell' ecclittica dal 1775 ſino al 1802, calcolata ſull' epoca del corrente anno 1782 ſull' ipoteſi della nutazione de' 19", ſull' elemento del lunar perigeo, e della ſua maſſima equazione di 2", e ſulla latitudine Fiorentina di 43°. 46". 47".

I	II	III	IV	V	VI	VII
Anni dal 21 Giugno	*Obbliquità medie dell' ecclittica.*	*Equazione additiva, o ſottrattiva del nodo lunare.*	*Longitudine del nodo aſcendente lunare*	*Longitudine del perigeo lunare*	*Equazione del perigeo lunare*	*Obbliquità vera ridotta dell' ecclittica*
	Gradi M. M". cent.	*Min". Cent.*	*Segni Gra. M'. M".*	*Segni Gra. M'. M".*	*Secondi Cent.*	*Gra M'. M". Cent.*
1775	23. 28. 11. 91	8. 13 ſott.	IV. 27. 41. 00	X. 7. 22. 39	1". 26. add.	23. 28. 2. 52
1776	11. 56	5. 93	IV. 8. 21. 17	XI. 18. 9. 11	0. 11. add.	5. 52
1777	11. 22	3. 08	III. 19. 1. 34	O. 28. 49. 1	0. 46. ſott.	8. 60
1778	10. 87	0. 48 add.	II. 21. 41. 51	II. 9. 28. 52	1. 74. add.	13. 09
1779	10. 53	3. 18	II. 10. 22. 8	III. 20. 8. 42	1. 78. add.	15. 49
1780	10. 19	5. 96	I. 21. 2. 25	V. 0. 55. 14	0. 49. add.	16. 64
1781	9. 84	8. 46	I. 1. 42. 42	VI. 11. 35. 4	0. 09. ſott.	18. 21
1782	23. 28. 9. 50	9. 27	O. 12. 22. 00	VII. 22. 14. 5	1. 25. ſott.	23. 28. 17. 52
1783	9. 15	9. 52	XI. 23. 3. 16	IX. 2. 54. 45	1. 99. ſott.	16. 68
1784	8. 81	8. 51	XI. 3. 43. 33	X. 13. 41. 17	1. 07. ſott.	16. 25
1785	8. 46	6. 64	X. 14. 23. 50	XI. 24. 21. 7	0. 03. ſott.	15. 07
1786	8. 11	4. 01	IX. 25. 14. 7	I. 5. 0. 58	0. 65. add.	23. 28. 12. 77

Anni dal 21 Giugno	*Obbliquità media dell' ecclittica*	*Equazione additiva, o ſottrattiva per il nodo lunare*	*Longitudine del nodo aſcendente lunare*	*Longitudine del perigeo lunare*	*Equazione del perigeo lunare*	*Obbliquità vera ridotta dell' ecclittica*
	Gra. M′. M″. Cent.	*Secondi Cent.*	*Segni Gradi M′. M″.*	*Segni Gradi M′. M″.*	*Secondi Cent.*	*Gra. M′. M″. Cent.*
1787	7. 77	0. 44 add.	IX. 25. 44. 24	II. 15. 40. 48	0. 99 add.	9′. 9″. 70
1788	7. 42	2. 25 ſott.	VIII. 16. 24. 41	III. 26. 27. 20	1. 64 ſott.	6. 81
1789	7. 08	5. 14	VII. 27. 4. 58	V. 7. 7. 10	0. 33 ſott.	2. 27
1790	6. 74	7. 50	VII. 7. 45. 15	VI. 17. 4. 1	0. 19 add.	23. 27. 59. 05
1791	6. 39	9. 00	VI. 18. 25. 32	VII. 28. 27. 51	1. 43 add.	55. 96
1792	6. 05	9. 49	V. 29. 5. 49	IX. 9. 13. 23	1. 96 add.	55. 60
1793	5. 71	8. 91	V. 9. 46. 6	X. 19. 53. 13	0. 86 add.	55. 94
1794	5. 37	7. 31	IV. 20. 26. 23	O. 0. 33. 4	0. 00	23. 27. 58. 06
1795	5. 02	4. 99	IV. 1. 6. 40	I. 11. 12. 54	0. 86 ſott.	23. 28. 0. 89
1796	4. 68	1. 93	III. 11. 46. 57	II. 21. 59. 26	1. 95 ſott.	4. 66
1797	4. 33	0. 27 add.	II. 22. 27. 14	IV. 2. 39. 16	1. 43 add.	5. 93
1798	3. 99	4. 39	II. 3. 7. 31	V. 13. 19. 7	0. 19 add.	23. 28. 8. 57
1799	3. 65	6. 84	I. 13. 47. 48	VI. 23. 58. 57	0. 30 ſott.	10. 19
1800	3. 30	8. 64	O. 24. 28. 5	VIII. 4. 38. 47	1. 61 ſott.	10. 33
1801	2. 96	9. 45	O. 5. 9. 0	IX. 15. 18. 37	1. 88 ſott.	10. 53
1802	2. 62	9. 20	XI. 15. 49. 0	X. 25. 58. 28	0. 65 ſott.	23. 28. 11. 17

Rifleſſioni ſulla nuova Tavola delle obbliquità medie, e vere dell' ecclittica.

La Tavola delle obbliquità da me regiſtrate alla pag. 28 della Diſſertazione del 1775 va ridotta ſecondo le nuove oſſervazioni o riſultati del corrente anno 1782.

Per uniformarſi all' epoca di Parigi, nella ſeconda colonna vanno ſempre detratti 6″ dall' obbliquità media, eſſendo ſtato fiſſato di ſcemare la latitudine Fiorentina di 6″ ed aumentare la Parigina di 2″. Allora tanto in Firenze, che a Parigi l' epoca dell' anno preſente porterà
l' obbliquità di . . . . 23°. 28′. 18″
cioè 6″ di meno delle mie oſſervazioni, e 2″
di più delle oſſervazioni Parigine, ſecondo la
quale eſſa è ſtata di 23. 28. 16,
come appariſce da lettera a me ſcritta dal Sig. de la *Lande*.

Sicchè incominciando la Tavola, in detto anno l' obbliquità media è regiſtrata di 23. 28. 17. 91. centeſime; e fatta la riferita detrazione ſarà di 23. 28. 11. 91. centeſime, e così diſcorrendo di tutte le obbliquità medie ſino al 1802, dove la Tavola ſiniſce.

Nella terza colonna di detta Tavola è regiſtrata l' equazione o additiva, o ſottrattiva della nutazione, la quale ho calcolato ſecondo l' ipoteſi ivi adoperata della nutazione ſemplice di 10″. Ma è ſtato dimoſtrato nelle recenti oſſervazioni, che detta nutazione dee ſtimarſi di 9″ $\frac{1}{2}$, giacchè la nutazione compoſta viene di 19″ con una tenue frazione, che ſi traſcura.

Indi è che ritenendo le ſteſſe equazioni, che ſolo vanno ſcemate nella ragione del 100 : 95; così otterremo l' equazione corriſpondente alla nuova ipoteſi di 19″, o che ſia additiva, o ſottrattiva.

Una nuova colonna merita la nuova Tavola per l' elemento del lunar perigeo, introdotto da me nel calcolo delle nutazioni. La ſua maſſima equazione auſtrale, o boreale ſi fa da me di 2″, e potrà ſempre rettificarſi dagli Aſtronomi con nuove, e lunghe oſſervazioni.

Per tal nuova equazione biſogna riflettere primieramente, che quando il lunar perigeo ritrovaſi o nel principio dell' Ariete, o in quello della Libra, la ſua equazione è nulla, giacchè allora operano le medie diſtanze lunari, che non aumentano, nè diminuiſcono le nutazioni.

In ſecondo luogo, che quando il detto perigeo trovaſi nel principio del Cancro, allora l'equazione è maſſima boreale, giacchè alla minima diſtanza lunare dalla terra dee corriſpondere la maſſima ſua energia, ed alla maſſima diſtanza la minima azione.

Che ſimilmente, quando il perigeo trovaſi nel principio del Capricorno, allora la nutazione auſtrale è maſſima, e la boreale è minima. Indi è, che in tali due caſi compete l' equazione di 2″ additiva, o ſottrattiva. Stando il perigeo al principio del Cancro la nutazione boreale va accreſciuta di 2″, e l' auſtrale va ſcemata di 2″.

Stando eſſa al principio del Capricorno la nutazione auſtrale va aumentata di 2″, e la boreale va ſcemata di 2″, ſecondo che trovaſi la nutazione.

In generale quando la nutazione, ed il perigeo ſi trovano ne' ſegni della medeſima ſpecie, cioè o boreale o auſtrale, amendue, allora l'equazione del perigeo è additiva all'attual nutazione. Ma quando al contrario la nutazione, ed il perigeo ſi combinano in ſegni di ſpecie diverſa, cioè eſſendo la prima ne' ſegni boreali, il ſecondo trovaſi ne' ſegni auſtrali, e per converſo, allora l'equazione del perigeo è ſottrattiva alla nutazione attuale.

Tale addizione, o ſottrazione va così oſſervata, quando trattaſi di voler computare la nutazione attuale compoſta, cioè la nutazione, che l' Aſtronomo deve oſſervare. Mutano però i ſegni di additivi in ſottrattivi, e per converſo, quando trattaſi di dedurre le nutazioni totali dalle nutazioni immediatamente oſſervate, come è ſtato praticato nelle mie IV Combinazioni, da cui è ſtata dedotta la nutazione del polo.

Quando il lunar perigeo foſſe lontano da' quattro punti indicati, cioè da' due punti equinoziali, e da' due ſolſtiziali, allora le equazioni ſono in ragion duplicata de' complementi de' ſeni di quegli archi, che o a deſtra, o a ſiniſtra ſi trovano lontani da' due punti ſolſtiziali. Così ſe in un dato tempo il lunar perigeo ſi trovaſſe a ſegni III gradi 20. dell' Ariete, allora eſſo ſarebbe diſcoſto gradi 20 dal o del Cancro. Il ſuo complemento ſarà dunque di gradi 70. Onde facciaſi, come il quadrato del ſeno totale al quadrato del ſeno di gradi 70, così il 2'', che è l' equazione maſſima, al quarto termine, che ſarà l' equazione del perigeo lunare,

La ſteſſa equazione ſarà, ſe il perigeo ſe ne ſcoſtaſſe dalla parte oppoſta, come accaderebbe, quando ſi trovaſſe a II ſegni 10°, , poichè allora ſi ſcoſterebbe dal Cancro gradi 26, come dianzi, e così dee ricercarſi l' equazione con gradi 70, come prima. Se tal equazione ſi combina colla nutazione boreale, che è della ſteſſa ſpecie, eſſa ſarà additiva; ma incontrandoſi colla nutazione auſtrale, divien ſottrattiva, come è ſtato già rilevato.

Tali ſono le leggi colle quali è ſtata calcolata la colonna IV della nuova Tavola, notando in eſſa ſolamente il valore dell' equazione del perigeo. La ſpecie di additiva, o ſottrattiva dipende dalle due ſuſſeguenti colonne, cioè V, e VI: nella V vien regiſtrata la longitudine del nodo aſcendente lunare,

nare, che è la medeſima della Tavola del 1775, ed aggiungendovi 90°, deduceſi la nutazione. Nella ſeſta poi ſi colloca la longitudine del lunar perigeo.

Paragonando inſieme le longitudini della colonna V colla giunta di gradi 90 con quella della VI, ſe eſſe ſono della ſteſſa ſpecie, l' equazione del perigeo ſi aggiunge all' equazione del nodo, e ſe ſono di ſpecie diverſa, ſi ſottrae.

L' ultima colonna, cioè la VII della nuova Tavola, contiene l'obbliquità attuale dell'ecclittica totalmente ridotta, tal quale deveſi oſſervare dagli Aſtronomi nell' anno che corre. Tutti queſti precetti ſi renderanno più chiari negli eſempj, che ne addurrò.

ESEMPIO I

Per l' anno 1775.

Eſſendo queſto l' anno primo della Tavola, in eſſo noteremo l' obbliquità media corretta di 23°. 28′. 11″. 91 cent. colla ſottrazione di 6″.

L' equazione ſottrattiva del nodo è di 8″. 45 cent. che va diminuita nella ragione del 100 : 95. Onde eſſa ſarà di 8″. 13 centeſime. L' apogeo lunare nel Gennajo del 1775 era a 3^{s}. 18°. 12′. Onde il ſuo perigeo era a 9^{s}. 18°. 12′. Il ſuo moto ſino al 21 Giugno è ſtato ſecondo le Tavole di 19°. 9′. Onde il lunar perigeo il dì medeſimo era a 10^{s}. 7°. 21′. Cioè eſſo era ne' ſegni auſtrali; e trovavaſi gradi 37°. 21′ diſtante dal Capricorno. Il complemento era dunque a 54°, 49′, il cui ſeno è di 7949 al raggio di 10000. Onde ſe facciaſi, come il quadrato del ſeno totale al quadrato di 7949, così 2′ al quarto termine, queſto ci darà l'equazione del perigeo, che ſarà di 1″. 26 centeſime.

La longitudine del nodo in detto anno era di IV. 27. 41; a cui aggiungendo 3 ſegni la nutazione trovaſi a VII. 27. 41. cioè auſtrale. Onde eſſendo auſtrale pure il perigeo, la ſua equazione ſarà additiva.

Onde ſarà la nutazione auſtrale per il nodo	8″. 13 cent.
Equazione del perigeo	1. 26
Somma la nutazione	9. 39

che va detratta dalla media obbliquità di 23. 28. 11. 91.

Onde verrà l' obbliquità attuale oſſervabile di . . . . 23°. 28′. 2″. 52 cent.

Eſſa era nella Tavola del 1775 di 9″. 46 . Ma detratti 6″ per la correzione della latitudine, e di più 1″. 26 per il perigeo, e ridotta l' equazione diminuendola, come 100 : 95, ne viene la nuova obbliquità di . . 28. 28. 2. 52 cent.

ESEMPIO II

Per l' anno corrente 1782.

Per paragonare le oſſervazioni dell' anno corrente al calcolo della nuova Tavola, avremo l' obbliquità media di eſſo di . . . . 23°. 28′. 15″. 50 cent.
come alla pag. 82 della citata Diſſertazione, e detratti 6″, ſono 9. 50

In eſſa l' equazione del nodo è di 9″. 76 cent. che va ſcemata nella ragione del 100 : 95, come è ſtato rilevato, perciò eſſa ſarà di 9″. 27 centeſime.

Per paſſare all' equazione del perigeo, la ſua longitudine al principio di Gennajo dell' anno corrente era a . . . . VII. 3°. 5′.
Il ſuo moto ſino al 21 Giugno di . . . 19. 9′.
Onde la ſua longitudine a dì 21 era . . . VIIˢ. 22°. 14′.

Si deve cercare il ſeno di 52°. 14′, dal cui quadrato dipende l' equazione del perigeo, che ſarà di 1″. 25 centeſime. Eſſendo adunque la nutazione boreale, e la longitudine del perigeo auſtrale, la ſua equazione va detratta da 9. 27
1. 25

Onde l' equazione ridotta ſarà di . 8. 02,

la quale eſſendo aggiunta all' obbliquità media . . . . , . 23. 28. 15. 50,
ci paleſa l' obbliquità attuale del 1782 di 23. 28. 23. 52
Ma eſſa è ſtata da me oſſervata di . . 23. 28. 24. 31.
Onde la differenza tra 'l calcolo e l' oſ-

ſervazione ſarà di . . . . 0. 0″. 79 cent.

Colla detrazione ſolita de' 6″, eſſa de-
ve regiſtrarſi nella nuova Tavola di 23. 28. 17. 52,
che differiſce di 1″. 32 dall'obbliquità oſſervata in Parigi.

Quella della mia prima Tavola di 23°. 28′. 17″. 52 cent.
rieſce alquanto eceſſiva, perchè in eſſa manca l' equazione del perigeo, e perchè ancora in eſſa ſi ſuppone la ſemplice nutazione di 10″, e non già di 9″ $\frac{1}{2}$, come nuovamente è ſtata dimoſtrata.

ARTICOLO X.

Della maniera di far corriſpondere le attuali obbliquità dell' ecclittica oſſervate in Firenze colle analoghe oſſervazioni di Parigi.

Fino dalle mie prime oſſervazioni ſolſtiziali del 1756, il Sig. Ab. la *Caille* mi reſe avviſato, che tra le ſue e le mie oſſervazioni ſull' obbliquità dell' ecclittica vi era una differenza di 5″ in 6″, come rilevaſi da una ſua corteſiſſima lettera ſcrittami immediatamente dopo l' edizione del mio Gnomone. Avendolo egli letto, e conſiderato, ſi compiacque della ſua gentile approvazione, come di tutte le oſſervazioni, e riſultati, e ſoltanto mi accennò, che per far concordare inſieme le oſſervazioni Parigine e Fiorentine baſtava detrarre 6″ dalla latitudine Fiorentina, fiſſata in quel vo-
lume di . . . . 43°. 46′. 53″

Se dunque facciaſi una tal detrazio-
ne, eſſa reſta di 43. 46. 47

Ora ſe da eſſa ſi detraggano . . . . 20°. 18′ 28″. 69 cent.
reſterà l' obbliquità dell' ecclittica dell'
anno corrente di . . . . 23°. 28′. 18″,
tralaſciando la piccola frazione. Ma è ſtato già avvertito, che nel ſolſtizio di queſt' anno l' obbliquità oſſervata dal Sig. de la *Lande* con ogni maggior diligen-
za è ſtata di . . . . 23°. 28′. 16″.
Onde la differenza di 2″, che reſta, è così tenue, che in avvenire le oſſervazioni Parigine e Fiorentine potranno dirſi concordi.

Ma per le nuove oſſervazioni, e rifleſſi fatti dallo ſteſſo chiariſſimo Aſtronomo nel ſuo quarto volume dell' Aſtronomia il periodo ſecolare della diminuzione dell' obbliquità è ſtato dedotto di $33'' \frac{1}{7}$, che pochiſſimo differiſce dal mio di $34''$. 42 centeſime. Dall' uniformità adunque tanto del periodo ſecolare, quanto dell' epoca dell' obbliquità del corrente anno 1782 ne dovrà naſcere una perfetta corriſpondenza delle future obbliquità tanto medie, che vere, sì nell' Efemeridi Parigine, che nella mia nuova Tavola. E tal corriſpondenza ſarebbe ancora maggiore, ſe nelle annuali obbliquità dell'ecclittica delle future Efemeridi Franceſi vi ſi introduceſſe l' elemento del lunar perigeo, che può cagionare una nuova diſcrepanza di $2''$, o additivi, o ſottrattivi.

Ed affinchè queſta terza riduzione appariſca ancora nella mia Tavola, in eſſa oltre la terza colonna delle obbliquità vere ridotte colle prime due riduzioni, vi ho ancora ſoggiunta la quarta, in cui è introdotta queſta terza riduzione. Dalla terza alla quarta colonna non vi è altro divario, che di ſoli $6''$, che ſono ſtati ſottratti dalla terza colonna per la corriſpondenza delle oſſervazioni Parigine, e Fiorentine.

ARTICOLO XI.

Tavole delle nutazioni, e degli elementi, che ſi ſuppongono

Eſſendo ſtato più preciſamente determinato il valore della nutazione colle quattro combinazioni diſcuſſe nell' articolo VIII, le nutazioni corriſpondenti a' diverſi punti del nodo lunare rieſciranno alquanto maggiori delle Bradlejane, e minori delle mie, che ſono ſtate computate nella Diſſertazione I colla figura dell' analemma. Veramente era aſſai comodo il valore di $10''$ ivi adoperato in quella coſtruzione. Poichè in tale ipoteſi le nutazioni venivano a corriſpondere a' ſeni de' complementi in diverſi quadranti del nodo lunare aſcendente; laddove facendo il raggio di $9''$, come il Bradlejo, di $9''$. 50 centeſime, com' è ſtato da me dedotto, i ſeni delle Tavole Trigonometriche non poſſono più rappreſentare le nutazioni ſenza una correzione.

Vero è, che queſta è ſempliciſſima. Poichè dato il ſeno dell' arco, che corriſponde ad una data poſizione del nodo, altro non dee farſi, ſe non che diminuire lo ſteſſo ſeno nella ragione del 10 : 9 ½ coſa aſſai facile. Adunque con tal riduzione è ſtata formata la Tavola I, nella quale, come ognun vede, le nutazioni ſono le medeſime ne' ſegni boreali, e negli auſtrali, colla ſola differenza, che eſſe ne' primi ſono additive al polo medio, e ne' ſecondi ſono ſottrattive. Indi è, che ne' titoli della Tavola ſi mettono inſieme l' Ariete e la Libra, il Toro e lo Scorpione ecc. Poichè la nutazione è la medeſima, ma per l' Ariete è additiva, e per la Libra è ſottrattiva. E così dicaſi degli altri ſegni, come leggeſi ne' medeſimi titoli.

TAVOLA I.

Della nutazione dell' Aſſe terreſtre ſecondo le diverſe longitudini del nodo aſcendente lunare, nell' ipoteſi, che la ſemplice nutazione auſtrale, o boreale ſia di 9″ ½.

Gradi delle longitudini del nodo lunare.	Segni Zod. O. VI. *Bor. Auſt.* *Nut.*	Segni Zod. I. VII. *Bor. Auſt.* *Nut.*	Segni Zod. II. VIII. *Bor. Auſt.* *Nut.*	Segni Zod. III. IX. *Auſt. Bor.* *Nut.*	Segni Zod. IV. X. *Auſt. Bor.* *Nut.*	Segni Zod. V. XI. *Auſt. Bor.* *Nut.*
1°.	9″. 498	8″. 141	4″. 607	0″. 161	4″. 892	8″. 303
2	9. 494	8. 056	4. 455	0. 332	5. 035	8. 388
3	9. 487	7. 961	4. 313	0. 504	5. 168	8. 464
4	9. 471	7. 875	4. 161	0. 665	5. 313	8. 531
5	9. 462	7. 780	4. 009	0. 826	5. 443	8. 637
6	9. 443	7. 965	3. 866	0. 988	5. 591	8. 693
7	9. 434	7. 581	3. 705	1. 159	5. 719	8. 740
8	9. 405	7. 486	3. 553	1. 310	5. 842	8. 806
9	9. 376	7. 381	3. 401	1. 482	5. 975	8. 863
10	9. 348	7. 277	3. 249	1. 643	6. 108	8. 910
11	9. 319	7. 163	3. 087	1. 814	6. 232	8. 977
12	9. 291	7. 058	2. 935	1. 976	6. 355	9. 034
13	9. 253	6. 945	2. 764	2. 137	6. 479	9. 082
14	9. 215	6. 830	2. 612	2. 299	6. 593	9. 129
15	9. 177	6. 717	2. 450	2. 450	6. 717	9. 177
16	9. 129	6. 593	2. 299	2. 612	6. 830	9. 215
17	9. 082	6. 479	2. 137	2. 764	7. 945	9. 253
18	9. 034	6. 355	1. 976	2. 935	7. 058	9. 291
19	8. 977	6. 232	1. 814	3. 087	7. 163	9. 319
20	8. 910	6. 108	1. 643	3. 249	7. 277	9. 348
21	8. 863	5. 975	1. 482	3. 401	7. 381	9. 376
22	8. 806	5. 842	1. 310	3. 553	7. 486	9. 405
23	8. 740	5. 719	1. 159	3. 705	7. 581	9. 434
24	8. 693	5. 591	0. 988	3. 866	7. 965	9. 443
25	8. 637	5. 443	0. 826	4. 009	7. 780	9. 462
26	8. 531	5. 313	0. 665	4. 161	7. 875	9. 471
27	8. 464	5. 168	0. 504	4. 313	7. 961	9. 487
28	8. 388	5. 035	0. 332	4. 455	8. 056	9. 494
29	8. 303	4. 892	0. 161	4. 607	8. 141	9. 498
30	8. 227	4. 750	0. 000	4. 750	8. 227	9. 500

Per intelligenza della preſente Tavola convien ridurſi a memoria, che data la longitudine del nodo aſcendente lunare, per trovare nel cerchietto delle nutazioni, ovvero nell' analemma da me deſcritto nella Diſſertazione del 1775, conviene a detta longitudine aggiungere gradi 90, o ſiano ſegni III, ed a tal punto, o punti corriſponde l' arco, ed il ſeno della nutazione cercata. Così per eſempio ſiano dati nella Tavola ſegni VI, gradi 10 longitudine del nodo lunare colla giunta de' ſegni tre, avremo ſegni IX, gradi 10. Onde la linea della nutazione ſi troverà a gradi 10 dopo il Capricorno, il cui complemento è di gradi 80. Diminuendo il ſeno di detti gradi nella ragione del 100 : 95, rinverraſſi la nutazione di 9''. 34 cent., e tal nutazione è auſtrale, perchè trovaſi ne' ſegni auſtrali. Perciò nella Tavola a ſegni VI, gradi 10. s' incontra la riferita nutazione col titolo di auſtrale, come eſſer deve.

L' ipoteſi, nella quale procede la preſente Tavola, ſi è che la nutazione compoſta ſia di 19'', come rilevaſi dalle quattro Combinazioni. E così la nutazione ſemplice ſarà di 9 ½, ſicchè il ſen totale ſarà al ſeno dell' arco dato, come il 100 al 95. E con tal analogia ſono ſtate conteggiate tutte le nutazioni della preſente Tavola

Dato che ſia il ſegno, ed il grado, nel quale trovaſi il nodo aſcendente lunare, altro non dee farſi, che pigliare il ſegno, o ſegni nella colonna orizzontale in teſta della Tavola, e poi nella prima colonna verticale appuntare il numero de' gradi. Dove le due colonne corriſpondenti s' incontreranno inſieme, ivi ſi troverà regiſtrata la nutazione, che ſi domanda. Così domandiſi la nutazione competente a ſegni V gradi 17. I ſegni V ſono nell' ultima colonna coll' indicazione di *auſtrale*. I gradi 17 s' incontrano nella prima colonna verticale; dove la linea del 17° incontraſi colla linea de' ſegni VI, ſi troverà la nutazione di 9''. 25 centeſime. E queſta ſarà la nutazione auſtrale competente alla data longitudine del nodo. Queſta diſpoſizione di Tavola mi ſembra più ſemplice di altre ſimili, giacchè non occorre qui aver l' avvertenza di pigliare ora i ſeni degli archi, ora i ſeni de' loro complementi. In queſta Tavola tutto è racchiuſo, ſenza fare una tal diſtinzione.

Eſſendo uguali le nutazioni auſtrali, o boreali ne' punti corriſpondenti, eſſe nutazioni nella Tavola ricorrono due volte, e ciò appunto porta il vantaggio di non dover badare a' complementi, o a' ſeni diretti.

Non mi ſon curato di calcolare le nutazioni più minutamente, che a gradi, perchè colle proporzionali tra un grado all' altro ſi giunge a tutta l' eſattezza, che mai in tal materia deſideraſi.

Che ſe io nelle frazioni delle nutazioni non ſolo ho riguardato le parti centeſime, ma vi ho ancora aggiunte le milleſime, queſto è ſtato appunto per ottenere le parti proporzionali con tutta la preciſione. Sono ſtate pur neceſſarie le parti milleſime per diſtinguere le nutazioni de' primi, e degli ultimi gradi del quadrante, le quali differiſcono meno di una centeſima, e perciò ſenza le parti milleſime ſarebbero tornate uguali tra di loro. Il che non può ſtare.

Queſta adunque ſarà la Tavola I, per ottenere le nutazioni corriſpondenti alle diverſe longitudini del nodo aſcendente lunare, ſenza la riduzione già accennata del perigeo lunare, il quale nelle minori diſtanze lunari aumenta le nutazioni, e nelle maggiori le diminuiſce di una maniera, che a me ſembra ſenſibile.

Volendo poi introdurne l' elemento del lunar perigeo, la cui azione non è affatto inſenſibile, ma fa variare la nutazione almeno di 2″ per parte, cioè sì dalla parte boreale, che dall' auſtrale, alla prima Tavola ſarà bene di aggiungere la ſeconda, per l' equazione propria del detto perigeo.

La maſſima equazione, tanto boreale, che auſtrale ſi ſuppone di 2″, benchè eſſa poſſa farſi qualche coſa di più. Nondimeno eſſendo piccola la frazione, ho giudicato di tralaſciarla, e ciò tanto più, quantochè le azioni momentanee lunari vanno riportate al centro de' momenti, tanto nel ſemidiametro ſuperiore dell' equatore, quanto nell' inferiore. Queſti due centri ſono tra loro lontani un ſemidiametro, ed $\frac{1}{7}$ di eſſo. Il che fa diminuire l' azion lunare riſpetto a quella, che foſſe riferita a' due punti eſtremi del diametro dell' equatore. Comunque ſiaſi, io ſtimo, che l' equazione maſſima del perigeo poſſa eſſere aſſai proſſima a 2″, e così la ſuppongo nella Tavola. In eſſa ancora le diverſe equazioni ſono le medeſime

medeſime per i ſegni boreali, ed auſtrali del lunar perigeo, e ſoltanto occorre la differenza de' ſegni; poichè ſe la nutazione, ed il perigeo ſi trovano ne' ſegni della medeſima ſpecie, cioè amendue boreali, o amendue auſtrali, l'equazione ſarà additiva. Ma trovandoſi la nutazione, ed il perigeo ne' ſegni di diverſa ſpecie, cioè uno ne' ſegni boreali, e l' altro negli auſtrali, ovvero al contrario, allora l' equazione del perigeo ſarà ſottrattiva dalla nutazione o boreale, od auſtrale.

Ancora nella preſente Tavola dobbiamo prima determinare il ſeno del cerchio, che corriſponde alla preſſione del perigeo, e poi diminuire tal ſeno nella ragione del 10 : 2; così ſarà

TAVOLA II.

Dell' equazione delle nutazioni per l' elemento del lunar perigeo, ſupponendo l' equazione maſſima di 2 ſecondi.

Segni O, e VI. Gradi.	Equazione del perigeo Min''.Mill.	I. e VII. Equazione Min''.Mill.	II. e VIII. Equazione Min''.Mill.	III. e IX. Equazione Min''.Mill.	IV. e X. Equazione Min''.Mill.	V. e XI. Equazione Min''.Mill.
0.	0''. 000					
1	0. 001	0. 530	1. 530	2. 000	1. 500	0. 499
2	0. 002	0. 561	1. 559	1. 999	1. 469	0. 470
3	0. 005	0. 593	1. 587	1. 997	1. 438	0. 440
4	0. 009	0. 625	1. 615	1. 994	1. 406	0. 412
5	0. 015	0. 657	1. 642	1. 990	1. 374	0. 384
6	0. 021	0. 690	1. 669	1. 984	1. 341	0. 357
7	0. 029	0. 724	1. 695	1. 978	1. 309	0. 330
8	0. 038	0. 757	1. 719	1. 970	1. 275	0. 305
9	0. 048	0. 791	1. 743	1. 961	1. 242	0. 280
10	0. 058	0. 826	1. 765	1. 951	1. 208	0. 256
11	0. 072	0. 860	1. 787	1. 939	1. 173	0. 233
12	0. 090	0. 895	1. 809	1. 927	1. 139	0. 211
13	0. 110	0. 929	1. 828	1. 913	1. 104	0. 190
14	0. 117	0. 964	1. 848	1. 896	1. 070	0. 170
15	0. 134	0. 999	1. 870	1. 883	1. 034	0. 151
16	0. 151	1. 034	1. 883	1. 870	0. 999	0. 134
17	0. 170	1. 070	1. 896	1. 848	0. 964	0. 117
18	0. 190	1. 104	1. 913	1. 828	0. 929	0. 110
19	0. 211	1. 139	1. 927	1. 809	0. 895	0. 090
20	0. 233	1. 173	1. 939	1. 787	0. 860	2. 072
21	0. 256	1. 208	1. 951	1. 765	0. 826	0. 058
22	0. 280	1. 242	1. 961	1. 743	0. 791	0. 048
23	0. 305	1. 275	1. 970	1. 719	0. 757	0. 038
24	0. 330	1. 309	1. 978	1. 695	0. 724	0. 029
25	0. 357	1. 341	1. 984	1. 669	0. 690	0. 021
26	0. 384	1. 374	1. 990	1. 642	0. 657	0. 015
27	0. 412	1. 406	1. 994	1. 615	0. 625	0. 009
28	0. 440	1. 438	1. 997	1. 587	0. 593	0. 005
29	0. 470	1. 469	1. 999	1. 559	0. 561	0. 002
30	0. 499	1. 500	2. 000	1. 530	0. 530	0. 001

La maniera di ſervirſi di queſta Tavola è ſtata già accennata all' art. IX.

Nondimeno per facilità maggiore, ſoggiungerò, che all' equazioni di queſta Tavola non ho aggiunta la circoſtanza di auſtrale, o boreale, perchè eſſa deſumeſi da' medeſimi ſegni notati in fronte della Tavola, giacchè dal ſegno O ſino a VI, cioè dal principio di Ariete ſino al principio della Libra, i ſegni ſono boreali, e perciò boreale pur ſarà l'equazione del perigeo. Ed al contrario dal ſegno VI al XII il perigeo ſi troverà dalla parte auſtrale, e così pur ſarà l' equazione del medeſimo.

Quando poi queſta equazione ſia additiva, o ſottrattiva dalla prima, cioè dalla nutazione del nodo, non può conoſcerſi dalla Tavola, ma combinando inſieme la ſpecie delle due equazioni; ſe eſſe ſiano amendue della ſteſſa ſpecie, cioè amendue auſtrali, o amendue boreali, allora ſarà ſegno, che l'equazione del perigeo ſarà additiva all' equazione del nodo: e quando al contrario la prima nutazione ſia ne' ſegni diverſi dalla ſeconda, allora ſarà indizio, che l'equazione del perigeo ſarà ſottrattiva a quella del nodo, cioè alla prima, e principal nutazione.

Quando poi tal nutazione ſarà corretta coll' equazione o additiva o ſottrattiva del perigeo, allora eſſa così corretta deve o aggiungerſi, o ſottrarſi dall' obbliquità media dell' ecclittica. Biſogna adunque attentamente conſiderare, che l' equazione del perigeo è fatta per ridurre quella del nodo, ma queſta così ridotta deve avere i ſoliti titoli di additiva, o ſottrattiva della media obbliquità. Si ſa, che è additiva, quando la prima nutazione cade ne' ſegni boreali, e che è ſottrattiva, quando eſſa trovaſi ne' ſegni auſtrali.

Ancora in queſta equazione vi ho computate le parti milleſime, non perchè poſſa giungerſi a tanta ſottigliezza, ma per poter diſtinguere le equazioni de' gradi proſſimi a ſegni III, e IX, i quali gradi ſenza le milleſime ſarebbero di 1. 99 dal primo grado ſino al quinto.

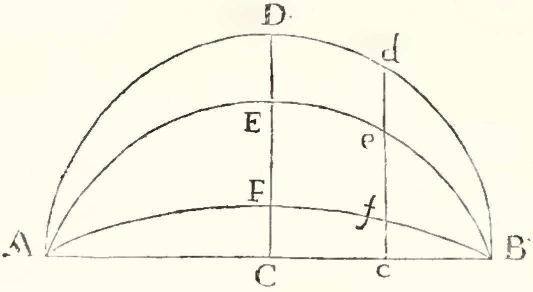
Suppongo in queſta Tavola la maſſima equazione di 2″, tanto auſtrale, che boreale. Onde nella lor ſomma ſarebbe un divario di 4″ dalla maſſima alla minima diſtanza lunare. E' ſtato già avvertito, ma qui convien rammentarlo, che in realtà il calcolo ſomminiſtra una frazione di più. Eſſa però è ſtata tralaſciata per non eſſer conſiderabile. Vi ſarà ſempre modo di meglio rettificare tal maſſima equazione.

Intanto però con eſſa ſi ſpiegano alcune differenze che ſi oſſervano nelle ſtelle ſiſſe, alcune delle quali non ſi ſoggettano accuratamente alle leggi della prima nutazione.

Inoltre non laſcierò di avvertire, che le equazioni ſon calcolate col Teorema della ragion duplicata de' ſeni delle longitudini del perigeo, e non già nella ragion ſemplice, perchè così è dimoſtrato in un particolar Teorema.

Se ho ſcelto piuttoſto il perigeo, che l'apogeo, ciò ho fatto per avere ſempre più in viſta la cagione degl' incrementi della nutazione. Vero è che poteva ancora adoperarſi l' apogeo lunare, mutando i titoli delle addizioni, o ſottrazioni.

Merita ancora, che ſi aggiunga per facilità delle due Tavole, che eſſe potrebbono formarſi con una ſempliciſſima coſtruzione. Poichè ſia, nella figura, *ADB* un mezzo cerchio, il qual ſia deſcritto con un raggio di pollici *6*.



Col ſemidiametro *CD*, e colla proporzione, che paſſa tra 10, e 9 $\frac{1}{2}$ ſi trovi la quarta proporzionale *CE*, e collo ſteſſo ſemiaſſe maggiore *CB*, e minore *CE* deſcrivaſi l' elliſſi *AEeB*.

Similmente facciaſi *CF* = a parti 2 del raggio *CD* ſuppoſto di parti 10, e col ſemiaſſe minore *CF* deſcrivaſi la ſeconda elliſſi *AFfB*, dico, che la prima elliſſi ſarà la ſcala delle nutazioni, e la ſeconda ſarà la ſcala delle equazioni del perigeo lunare.

Poichè ſia per il nodo lunare il punto *d* lontano gradi 90 dallo ſteſſo nodo . Per la natura dell' elliſſi ſarà $DC : FC = dc : fc$. Onde la *ec* ſarà uguale al valore della nutazione per il nodo lunare .

Per la ſteſſa ragione ſarà $DC : FC = dc : fc$. Onde ſarà *fc* l' equazione del perigeo . Più eſattamente ſarà *fc* quadrato .

Eſſendo adunque il raggio del mezzo cerchio di pollici 6, le ſemiordinate *ec*, *fc* ſaranno di tal grandezza, che potranno determinarſi con preciſione, non ſolo i ſecondi della nutazione, ed equazione del perigeo, ma eziandio le loro parti decime, ed ancora venteſime, che è baſtantiſſimo per l' uſo Aſtronomico di quelle due ſemiordinate . Ma volendole conteggiare col calcolo, ſi otterranno le parti centeſime, e le milleſime, quando occorreſſe .

Oltrepaſſerò ora alla terza Tavola degli elementi, la quale agli Aſtronomi ſpeſſo occorrerà . E' ſtata già una ſimil Tavola calcolata nel Coroll. IV. Prop. XV. dell' Art. III, ma allora in eſſa ſupponevaſi la nutazione totale di 20", la quale ora con più combinazioni eſſendo ſtata ridotta a - - - - 19" ſi modificano diverſamente tutti quegli elementi , e perciò conviene riconteggiarli ſecondo la più certa , e più preciſa nutazione . Formato adunque il calcolo ſarà

TAVOLA III.

Degli elementi della nutazione, e della preceſſione degli equinozj dedotti dalla nutazione totale di 19".

	Min. Secon.	*Cent.*
I. Che la nutazione auſtrale, o boreale ſia di .	9.	50
II. Che la preceſſione degli equinozj per le ſole forze ſolari ſia di	16.	09
III. Che la preceſſione relativa alle ſole forze lunari ſia di	34.	24
IV. Che le forze compoſte fanno la media preceſſione degli equinozj di	50.	33
V. Che la minima preceſſione ſia di	40.	83
VI. Che la maſſima ſia	59.	83
VII. Che la proporzione delle forze lunari alle ſolari ſia come	34 :	16

proſſimamente, ovvero, come 342 : 160, come certamente la moſtrano molti fenomeni delle maree, e come ſi ſuppone da più Autori.

Veggaſi ſu tal proporzione la mia Diſſertazione latina *De maris æſtu* ſtampata in Firenze l' anno 1755.

Detta proporzione in centeſime riduceſi, come 100 : 46, cioè come 5 : 2 $\frac{1}{3}$. Ora vi ſono degli Autori, che la fanno di $\frac{2}{5}$, come è ſtato avvertito. Non par veriſimile l' opinione di quegli Autori, che fanno ſalir le forze ſolari a 22". e 28". Poichè o ſi ſupponga la nutazione del Bradlejo, o la mia, tali forze non arrivano a 17". M. *Simpſon* la fa di 18".

Ma ſupponendo le forze perturbatrici ſolari di 22". togliendole dalla media preceſſione di 50". 33 cent., reſterebbono le forze lunari di 28". 33, e perciò ſarebbono le forze ſolari ridotte alle parti centeſime delle lunari di 78 centeſime, cioè le forze ſolari tornerebbero preſſochè $\frac{4}{5}$ delle lunari. Ora un tal riſultato è aſſolutamente contrario a' fenomeni delle maree oſſervate nelle Zizigie, e nelle quadrature, ſecondo i quali non ſi allontana la forza ſolare da $\frac{2}{5}$ della lunare. E così quella, che ſi calcola dall' ipoteſi di 22", è doppia della vera, e perciò detta ipoteſi non può in alcun conto ſoſtenerſi.

Le ſottiliſſime oſſervazioni di *Bradlejo* ſon tali, che la nutazione non può diſcoſtarſi da 18", ſe non che di 1", o al più 2", ſenza far violenza alle medeſime,

Le mie numeroſe oſſervazioni ſolſtiziali de' quattro anni citati, cioè 1756, 1764, 1775, e 1782 ſono di tal natura, che il loro riſultato per le quattro combinazioni calcolate non può diſcoſtarſi dal vero, che di 1", ed a mio credere, ancor meno, cioè di $\frac{1}{2}$ ſecondo. Ora per far tornare le forze perturbatrici ſolari di 22", converrebbe ridurre la nutazione a ſoli 15", che troppo diſcordano dalla nutazione Bradlejana di 18", e dalla mia di 19". Per la qual coſa ſi terranno gli elementi della mia Tavola III. come proſſimamente veri, mettendoſi con eſſi un accordo tra le oſſervazioni Bradlejane, tra le mie, tra' fenomeni delle maree, e tra le nutazioni dell' aſſe terreſtre immediatamente oſſervate.

ARTICOLO XII.

Della teoria della denſità de' pianeti in ordine al periodo ſecolare dell' obbliquità dell' ecclittica.

Con tutte le lunghiſſime oſſervazioni fatte ſul periodo delle obbliquità dell' ecclittica, per le quali eſſo deduceſi molto minore della comune opinione, vi ſono nondimeno degli Aſtronomi, che ſempre oppongono il valore di quel periodo, che è fondato ſulla teoria delle forze de' pianeti, che ſon quelle, che facendo retrocedere il nodo tendono a diminuire l' obbliquità. E perchè appreſſo di eſſi più vale la forza della teoria, che la preciſione, il conſenſo, ed il merito di tante oſſervazioni, convien finalmente eſaminare, ſe realmente la teoria ſia così ſondata da attenderne tutta la poſſibil certezza in confronto ancora di oſſervazioni certiſſime. Dipende tal teoria principalmente dalla denſità de' pianeti, che è quella che accreſce, o ſcema le forze per far retrocedere il nodo dell' orbita terreſtre. Tal denſità in que' pianeti, che ſon circondati da' ſatelliti, deduceſi dalle diſtanze, e tempi periodici degli ſteſſi ſatelliti. Così noi la deduciamo nel globo terreſtre, in Giove, ed in Saturno, i cui ſatelliti ci aſſicurano della loro gravità. Ma non avendo alcun ſatellite Marte, Venere, e Mercurio, noi non ſappiamo, qual ſia la lor denſità. Si è adunque ſuppoſto, che la denſità de' pianeti primarj ſia in ragion reciproca ſudduplicata de' tempi periodici, e ciò perchè rilevaſi che la denſità della Terra è maggiore di quella di Giove, e queſta è maggiore della denſità di Saturno. Indi è, che ſi è immaginato l' eſpoſto Teorema. Ma ſiccome tal Teorema include ancora la proporzione delle denſità, merita di eſſere eſaminato, ſe tal proporzione regna realmente ne' corpi planetarj, e ſe dalle ipoteſi alle vere denſità vi ſia diſcrepanza notabile, per aſſicurarſi del Teorema. Non è difficile un tal eſame, avendo noi tre pianeti, le cui denſità ci ſon note *aliunde*, e ſenza la eſpoſta teoria eſſe ſi deducono dimoſtrativamente da' loro ſatelliti. Indi è, che tenendo ferme le tre denſità della Terra, di Giove, e di Saturno potremo mettere a prova l' ipoteſi, oſſervando, ſe le denſità dedotte coll' ipoteſi ſiano almeno proſſime alle vere denſità, che ſon quelle calcolate coll' uſo de' ſatelliti.

Di tre pianeti ſi poſſono eſaminare tre combinazioni. Cioè della Terra con Giove, della Terra con Saturno, e di Saturno con Giove. Le denſità di tali pianeti io le ſuppongo quali ſono ſtate dedotte, e calcolate dal Sig. de la *Lande* colla parallaſſi ſolare ritrovata di 8″. 60 coll' ultimo paſſaggio di Venere nel 1769. E benchè vi ſiano degli Aſtronomi, che aumentino un poco più la parallaſſi ſolare, ſino a 8″. 80, pure un tale aumento non porta alcun ſenſibile divario nella preſente ricerca.

PRIMA COMBINAZIONE

Della Terra con Giove.

Moto periodico della Terra, giorni 365, ore 6, cioè 365. 25 centeſime, la cui radice quadrata è di parti 19, 11 cent.

Moto periodico di Giove giorni 4332. 50 cent.

Radice quadrata ſarà proſſimamente di 65. 82 cent.

Onde facciaſi, come 65.82 : 19.11 = 1, che è la denſità della Terra al quarto termine, che ſarà la denſità di Giove per l'ipoteſi Euleriana. E tal denſità, fatta la diviſione, torna di 0. 2903. Or la denſità di Giove, che ſi calcola dipendentemente da' ſuoi ſatelliti, ſi ſa comunemente di 0. 2298, come nella *Connoiſſance des temps*, ed altri volumi. Queſta è aſſai proſſima a 0. 23. Indi è, che la vera denſità a quella dedotta coll' ipoteſi Euleriana ſta, come il 23 : 29, che è una differenza non diſprezzabile, giacchè eſſendo eſſa di parti 5, riſpetto alle parti 23, trovaſi tra la parte quarta e la quinta.

SECONDA COMBINAZIONE

Della Terra con Saturno.

Il moto periodico di Saturno è di giorni 10579. 25, la cui radice quadra è di parti 102. 85. Onde facciaſi, come 102. 85: 19.11 = 1 al quarto, che ſarà la denſità di Saturno di 0. 1858. Tal denſità per mezzo de' ſuoi ſatelliti ſi fa ordinariamente di 0. 1045. Onde la differenza della denſità vera di Saturno dalla calcolata per l' ipoteſi Euleriana è di è di 0. 0813. Cioè ſta la prima denſità alla ſeconda, come il 18: 10, con diſcrepanza aſſai palpabile. Merita di eſſere avvertito, che tanto nella prima Combinazione, che nella ſeconda la denſità dell' ipoteſi torna molto maggiore della vera, e nella ſeconda Combinazione ſopra parti 10 vi ſono otto parti di ecceſſo. Se queſto medeſimo ecceſſo ſucceda nella denſità di Venere, eſſa per ridurla alla vera dovrebbe diminuirſi nella ragione del 18: 10, ed allora tal denſità ridotta ſarebbe aſſai proſſima a quella, che eſiggerebbe il periodo ſecolare dell' ecclittica di $34''$, e la teoria ſarebbe d' accordo colle oſſervazioni.

TERZA COMBINAZIONE

Di Saturno con Giove.

Benchè queſta terza Combinazione di Saturno con Giove deducaſi dalle due prime, con tutto ciò ſarà bene calcolarla ſeparatamente per paleſar ſempre più la diſcrepanza dell' ipoteſi dalle vere denſità de' pianeti.

Adunque è ſtata dedotta la radice quadrata del tempo periodico di Saturno, che è di parti 102. 85.

E' ſtata pur dedotta la radice quadrata del tempo periodico di Giove, che è di parti ſimili 65. 82. Onde a ſeconda dell' ipoteſi ſi faccia

Come 182 . 85 : 65 . 82 = così la denſità di Giove dedotta da' moti periodici de' ſuoi ſatelliti, la quale ſi fa di parti 2298, al quarto termine, il quale ci ſi paleſerà di parti 1470, ovvero avendo riguardo alla denſità della Terra, che ſi ſuppone = 1, ſarà di 0 . 1470. Ma la denſità del medeſimo pianeta dedotta dal tempo periodico de' ſuoi ſatelliti, cioè la ſua vera denſità è di 0. 1045. Onde deduceſi in numeri ſemplici, che la denſità ipotetica alla vera ſia come il 14 : 10 proſſimamente, cioè la denſità dell' ipoteſi eccede la vera di 4 parti decime della medeſima, diſcrepanza che fa vedere la falſità dell' ipoteſi

Se poi al contrario dalla denſità vera di Saturno vogliaſi coll' uſo dell' ipoteſi dedurne quella di Giove, allora ſi farà, come 65 . 82: 102 . 85 = 1045 al quarto termine, che ci ſi paleſerà di parti 1629.

Ma in realtà per il moto de' ſatelliti di Giove la ſua denſità è dimoſtrata di 2298. Onde tra la vera denſità di Giove e quella che ſi calcola coll' ipoteſi vi è la differenza di 0. 669 , che paragonata alla vera denſità è più , che la parte quarta della medeſima, ed ancor queſta differenza è conſiderabile

Indi è, che per queſte combinazioni l' ipoteſi delle denſità in ragion reciproca ſudduplicata de' tempi periodici è così diſcrepante dalla verità, cioè dal paragone de' tre pianeti, che avendo ſatelliti, ci fanno conoſcere la vera loro denſità, che non ſolamente non può dirſi proſſima alla vera, ma dee dirſi lontaniſſima, e perciò incapace di eſſere adoperata per le denſità degli altri tre pianeti, che ſono privi di ſatelliti, cioè di Mercurio, di Venere, e di Marte.

Dalla quantità del periodo ſecolare dell' ecclittica, inſieme cogli altri elementi del Problema , potremo dedurne la vera denſità di Venere, benchè priva di ſatelliti. Ma prima veggiamo qual ſarebbe la ſua denſità dedotta da quella di Saturno, di Giove, e della Terra.

Se ſi aſſume la denſità, e tempo periodico di Saturno per rilevarne la denſità di Venere, eſſa viene più piccola, che non ſi ſuppone da' moderni Aſtronomi.

Il moto periodico di Venere è di giorni 226, ore 17 proſſimamente, e riducendo le ore alle partionteſime ſarà giorni 224 . 71 centeſima proſſimamente. Eſtraendone la radice, queſta tornerà di parti 14. 99, cioè aſſai proſſimamente 15. 00.

La radice del tempo periodico di Saturno è 102. 85, e la ſua denſità vera di 1045. Onde facciaſi

Come 1500 : 10285 = 1045 al quarto termine, che ſarà di parti 7165, cioè . . . . 0, 7165.
Ma dagli Aſtronomi tal denſità ſi fa di. . . . . 1. 2750.
Onde la differenza è . . . . 0. 5505.

Indi è, che la denſità di Venere dedotta ancora coll' ipoteſi, ma applicata alla vera denſità di Saturno, vien tanto minore di quella , che gli Aſtronomi adoperano ne' loro elementi , che non ſi ſa , come poſſa adoperarſi . Onde deducaſi dalla denſità di Giove, e facciaſi, come

15 . 00 : 65 . 82 = 2298 al quarto, che ſarà 10085. E queſta denſità pure è minore di 1. 2750 , che ſi ſegue dagli Aſtronomi.

Deducaſi finalmente la ſteſſa denſità dalla denſità della Terra, e perciò dovrà farſi

Come 15.00 : 19.11 = 1000 al quarto. E queſto ſarà di 1274, e confronta beniſſimo col calcolo de' moderni, che è di 1275. Il divario di 1 parte ſarà cagionato dalle frazioni.

Non ſi vede per altro per qual ragione detti Aſtronomi invece di aſſumere per baſe del loro calcolo la vera denſità di Giove, o di Saturno dedotta da' loro ſatelliti (come la denſità della Terra è ſtata dedotta dalla Luna) ſi ſiano ſolamente contentati di argomentarla dalla denſità terreſtre.

Se l' ipoteſi della ragion reciproca ſudduplicata de' tempi periodici dee ſuſſiſtere in tutto il noſtro ſiſtema circumſolare, cioè in tutti ſei i pianeti primarj, perchè non conſiderare la denſità di Giove, e di Saturno, per dedurne la denſità di Venere, e ſoltanto prevalerſi della denſità terreſtre?

Deducendoſi adunque conſeguenze sì diſparate nella denſità di Venere, cioè deducendoſi eſſa coll' elemento della terreſtre denſità ſuppoſta come 1. di parti 1. 2740
deducendoſi per la denſità di Giove di 1. 0085
deducendoſi colla denſità di Saturno di 0. 7165
per qual ragione di queſti tre numeri ſi preſceglie ſolamente il primo, e gli altri ſi traſcurano?

Potrò io col medeſimo diritto, inſiſtendo ancor ſull' ipoteſi erronea, prevalermi del terzo numero, invece del primo; ed allora ſupponendo, che colla denſità di Venere di parti 1. 2740 ſi deduca co' ſoliti Problemi il periodo ſecolare di 47″, potrò abbaſſar detto periodo nella ragione del 1274: 716. Onde facendo come 1274: 716, così 47″ al quarto termine, queſto verrà di 26″. 41 centeſima. Sicchè colla ſteſſa ipoteſi, ma con aſſumere per elemento la vera denſità di Saturno, il periodo ſecolare in vece di 47″ tornerà 26″. 41, cioè meno del mio periodo.

E ſe ſi aſſuma la denſità di Giove, e ſi faccia, come 12740: 1008 = 47″ al quarto, eſſo ci tornerà di 37″, cioè poco più del mio periodo, che è proſſimo a 35″. Ecco adunque, che coll' iſteſſa ipoteſi delle denſità reciprocamente proporzionali alle radici de' tempi periodici ſi deduce quel periodo, che ſi vuole, cioè o di 47″, o di 27″, o di 37″, ſecondo la diverſa ſcelta dell' elemento del calcolo relativo alla denſità de' pianeti forniti di ſatelliti.

Nella mia Memoria del 1764 io ho calcolato, che la denſità di Venere aſſunta dall'Eulero alla denſità del mio nuovo calcolo ſta, come il 533 a 208. Onde eſſendo la detta denſità nell'ipoteſi, che la terreſtre ſia = 1, di parti 1. 2740, facciaſi come 533 : 208 = 1274 al quarto, queſto ſarà di parti 0. 4784

Ora eſſendomi pervenuto il Tomo IV dell' Aſtronomia del chiariſſimo M. de la *Lande*, oſſervo con mio ſommo piacere, che egli avendo ridotto il periodo della diminuzion ſecolare dell' ecclittica a 33″ e 3 decime, ed avendo ricalcolato ſecondo tal elemento la denſità di Venere, la ritrova di 0. 4971, con particolare uniformità al mio calcolo del 1764. Ma aggiungaſi, che allora era ſtata da me adoperata la variazione ſecolare dell' ecclittica di 29″, e con eſſa è teſſuto tutto il calcolo, il quale ora riducendolo colla diminuzione ſecolare dell' ecclittica di 34″, detta denſità ſarà alquanto aumentata. Ma convien ripigliare tutto queſto calcolo cogli elementi di queſta Memoria, cioè colla nuova proporzione tra le forze lunari, e ſolari riſpetto alla preceſſione degli equinozj, colla nutazione trovata di 19. 05 cent., colla parallaſſi ſolare di 8″. 80 centeſime, ed altri elementi.

Riteſſendo adunque tutto queſto calcolo riſulta aſſai proſſimamente la denſità di Venere di 0. 5000, che è la metà della terreſtre denſità, e che così bene ſi accorda con 0. 4971, denſità altrimente calcolata dal citato Aſtronomo.

Dobbiamo adunque concludere, che come non vi è nell' univerſo una legge, colla quale ſiano regolati i diametri, i volumi, le maſſe de' pianeti da Mercurio ſino a Saturno; così dee dirſi, che neppure vi ſia legge alcuna nelle denſità, le quali non dipendono da' tempi periodici, o dalle loro radici, ma dipendono dalle diverſe materie, colle quali i pianeti ſono ſtati fabbricati. Se le denſità doveſſero avere un rapporto col calor ſolare, dovendoſi queſto deſumere dall' intenſità della luce, che va ad illuminare, e riſcaldare i diverſi pianeti, dovrebbono tali denſità oſſervarſi in ragion reciproca duplicata delle diſtanze, e ciò ſecondo la legge dell' intenſità della luce, che appunto ſi regola con quella ragione. Ma noi ſiamo ben lontani ancora da tal legge, non meno che dalla ragion reciproca ſudduplicata de' tempi periodici.

Indi è, che non dobbiamo cercare alcun rapporto tra le diſtanze e le denſità, tra' tempi periodici e le ſteſſe denſità, ma dobbiamo penſare, che eſſendo i pianeti ſtati formati con materie di differente ſpecifica gravità, la loro denſità non abbia altra legge, che quella delle materie della prima formazione.

Co' ſatelliti di Saturno, di Giove, e della Terra ſapremo la loro denſità. Colle oſſervazioni del periodo dell' obbliquità dell' ecclittica dedurremo la denſità di Venere. Ma per Marte, e per Mercurio, non pare che vi ſia modo di determinarla.

Dal preſente eſame ſull' ipoteſi comunemente ricevuta dobbiamo argomentare, che eſſa non ha alcuna forza; che è aſſolutamente falſa; e che male alcuni Autori hanno dubitato delle lunghiſſime oſſervazioni ſull' obbliquità dell' ecclittica, perchè eſſe non ſono uniformi a quella teoria. Non poſſono mai eſſerlo, perchè la ſteſſa teoria è diſcordante da sè medeſima, ed è contraria alle più certe denſità de' tre pianeti forniti di ſatelliti.

Mi ſi dirà, che eſſendo la denſità di Venere quaſi la metà della terreſtre, ed eſſendo queſta minore di quella di Giove, e di Saturno, non ſi ſcorge nel ſiſtema elementario quell' armonia, quella perſetta corriſpondenza delle parti, che è tanto propria dell' onnipotente Fabbricator del ſiſtema. Poichè tal denſità da Venere alla Terra creſce, e dalla Terra a Giove e Saturno va ſempre ſcemando. Ma chi è mai tra gli uomini, che poſſa a profondo penetrare le vaſtiſſime mire del ſupremo Architetto della natura?

Chi ſa, che nella fabbrica del noſtro ſiſtema circumſolare il ſommo Artefice coll' accreſcere la terreſtre denſità, ed in conſeguenza la gravità, non abbia penſato a ritener così più fortemente la noſtra Luna nella ſua orbita, e diminuire quelle irregolarità, che pur troppo tormentano gl' ingegni degli Aſtronomi, quantunque eſſe ſiano minori, che non ſarebbono con una minor denſità? Chi ſa, che non vi ſiano altri oggetti degni del ſupremo Architetto, i quali eſiggano tal denſità maggiore di tutte le altre?

Contentiamoci di ſapere quali ſiano le vere denſità in que' pianeti, che ce ne danno un ſicuro argomento, e di rilevare indi le conſeguenze , che naſcono a tenor dell' univerſal gravità.

ARTICOLO XIII.

Riſpoſta agli Autori delle Efemeridi Milaneſi ſullo Gnomone Fiorentino.

Gli Autori delle Efemeridi Milaneſi dell'anno 1779 nell' articolo dell' obbliquità dell' ecclittica ragionano intorno al periodo ſecolare della medeſima, e dopo aver riferite le opinioni di diverſi Aſtronomi, che l' hanno creduto di 88", di 60", di 47", di 45", riportano il mio periodo, dedotto prima dalle oſſervazioni ſolſtiziali del 1756 allo Gnomone della Cattedrale, e poi riconfermato , e ridotto colle ſimili oſſervazioni del 1775, per le quali torna di 34".42 centeſime. Sul propoſito delle mie oſſervazioni eſſi aſſeriſcono che *nec comparationum numero*, *nec inſtrumenti natura*, *ſic coeteris præſtare videntur* , *ut rem prorſus definire cenſeantur* ecc.

Alquanto diverſa però è ſtata l' idea de' più inſigni Aſtronomi, che cogli occhi proprj hanno potuto oſſervare la grandezza , la preciſione , l' opportunità locale di queſto vaſto Gnomone.

Il Sig. de la *Condamine* fu quello, che lo giudicò di così grande importanza , che ne proccurò gli ordini Sovrani per riſtorarlo.

Il Sig. *Bernoulli*, che ſi trovò a più oſſervazioni, ne commendò pubblicamente il ſuo pregio , chiamandolo un iſtrumento ſingolare in tal genere.

Il Sig. de la *Lande* ne preſe così alta idea , che ricevendo poi ſucceſſivamente le mie oſſervazioni ſolſtiziali , cambiò la ſua opinione intorno al periodo ſecolare dell' obbliquità, riducendolo a 33". 3 decime , come potrà conſultarſi nel ſuo Tomo IV dell' Aſtronomia , ſegno aſſai chiaro , che egli le ha giudicate deciſive.

Tralaſciando i giudizj di altri Aſtronomi, che parte colla locale iſpezione , e parte colla conſiderazione delle oſſervazioni da me pubblicate ſi ſono aſſicurati della verità, mi farò lecito di avvertire, che le due ragioni riportate dagli Aſtronomi Milaneſi vanno maturamente eſaminate.

Toccano eſſi il piccol numero delle combinazioni, e la natura di queſto iſtrumento.

Va eſaminata la prima eccezione, giacchè le obbliquità da me in diverſi anni concluſe ſi appoggiano a gran numero di oſſervazioni.

Quella dedotta nel 1775 è fondata ſopra XV oſſervazioni
Quella del 1756 ſopra . . . . XVI (*a*)
Quella del 1764 ſopra V
Quella del 1775 ſopra . . . . XVI (*b*)
Quella del 1782 ſopra . . . . XVI.

Se poi detti Aſtronomi intendono di ragionare delle combinazioni colle antiche oſſervazioni, certo è, che l' oſſervazione fondamentale del 1510 è una ſola, ma eſſa è combinata con più e più moderne oſſervazioni. Eſſa è così ben rappreſentata dal marmo ſolſtiziale di quell' anno, che non può eſſervi error ſenſibile

Eſſa finalmente è riportata ad un lungo periodo di anni 272, riſpetto all' anno corrente, e tal periodo fa ſvanire qualunque piccolo errore, che poteſſe concepirſi nella poſizione del marmo ſolſtiziale.

Sulla natura dell' iſtrumento i due Profeſſori cambierebbono d' opinione, ſe foſſero ſul luogo, come gli altri Aſtronomi già citati. Poichè l' altezza dello Gnomone è di piedi Parigini 277.

Con tal altezza ſi combina una tal preciſione dell' immagine ſolare, che negli appulſi dell' orlo boreale, ed auſtrale non può errarſi di una linea, che in queſta vaſtità di raggio non porta error ſenſibile.

Contribuiſce a tal eſatta terminazione la riſpettiva piccolezza del foro centrale, e l' oſcurità di quel vaſtiſſimo tempio. In ſomma trattandoſi di tali iſtrumenti, biſogna prima vedere, e poi giudicare.

Tralaſcio le conſiderazioni delle moderne combinazioni, le quali, benchè riſtrette ad anni 26, come lo ſono quelle del 1756, paragonate a quelle del 1782, ovvero ad anni 20,

---

(*a*) Veggaſi il mio Volume del vecchio, e nuovo Gnomone Fiorentino, ſtampato in Firenze nel 1757.

(*b*) Veggaſi la Diſſertazione Aſtronomica del 1776.

come quelle del 1755 a quelle del 1775; contuttociò eſſe decidono, che il periodo ſecolare non può mai eſſere della grandezza ſinora giudicata dagli Aſtronomi, ma di un valore molto minore. E ſe con eſſe ſole non può preſcriverſi la frazione, ſi comprende nondimeno, che il periodo è poco più di 30″. Che ſe a tali moderne combinazioni ſi aggiunga la combinazione fondamentale del 1510 colle moderne oſſervazioni, ſi ſtabiliſce ancora con preciſione maggiore il periodo di 34″, come nella citata Diſſertazione.

I calcoli, che ſi accennano di M. de la *Grange*, dell' *Eulero*, e di altri eccellenti Matematici, non ſono mai da preferirſi alle più certe oſſervazioni, eſſendo eſſi fondati ſopra ipoteſi incerte, qual' è quella della denſità de' pianeti, che ſon privi di ſatelliti, di cui in conſeguenza ignoriamo la denſità. Venere è uno di tali pianeti, che moltiſſimo influiſce nella teoria fiſica della obbliquità. Meglio adunque ſarà il roveſciare il Problema, ed invece di calcolare il moto dell' obbliquità dalle denſità ipotetiche de' pianeti, dedurre piuttoſto la denſità dalle oſſervazioni certiſſime del moto progreſſivo della ſteſſa obbliquità. Allora la denſità di Venere tornerà meno della metà di quella, cha viene in conſeguenza dalle ipoteſi Euleriane, come ho fatto vedere in una mia Diſſertazione compoſta nel 1764, che è inedita.

Co' nuovi elementi dedotti dalle combinazioni della preſente Memoria un tal calcolo va perfezionato, e ridotto. Sempre però la denſità di Venere torna la metà incirca riſpetto a quella, che deduceſi dall' ipoteſi Euleriana delle denſità in ragion reciproca ſudduplicata de' tempi periodici. E queſta ipoteſi ſe ſi eſamina col rapporto delle denſità de' tre pianeti, le quali ci ſon note per i ſatelliti, che eſſi godono, cioè della Terra, di Giove, e di Saturno, non ſolamente dee dirſi dubbioſa, ma notabilmente aberrante riſpetto alle denſità verificate coll' elemento de' ſatelliti, come è ſtato provato nell' articolo antecedente.

Ma ſerve per ora di perſuaderci, che quell' ipoteſi va meglio eſaminata, e corretta, e che in vigore de' riſultati teorici della medeſima non poſſono revocarſi in dubbio le tante, e così certe oſſervazioni del periodo ſecolare, che è molto minore, che non eſiggerebbe quell' ipoteſi.

OSSERVAZIONE

OSSERVAZIONE

DELLA CONGIUNZIONE INFERIORE DI VENERE COL SOLE

A dì 20 Marzo 1782

CON ALCUNE RIFLESSIONI

Del Sig. Ab. ANGELO DE CESARIS R. Aſtronomo
all' Oſſervatorio di Milano.

E' Noto, che le oſſervazioni delle oppoſizioni col Sole ne' pianeti ſuperiori, e ne' pianeti inferiori quelle delle loro congiunzioni col Sole medeſimo ſono particolarmente pregiate dagli Aſtronomi, come le più opportune ed intereſſanti, per le utili conſeguenze, che ſe ne traggono. In tali circoſtanze la longitudine eliocentrica e la geocentrica ſono nella ſteſſa direzione eſattamente; e quindi dall' immediato confronto di ciò che ſi avrebbe pel calcolo delle Tavole, e di ciò che ſi è avuto in fatti per la via dell' oſſervazione, ſi ha un facile mezzo per verificare gli elementi, ſopra i quali le Tavole ſteſſe ſono coſtrutte.

Tra le congiunzioni poi le inferiori ſono da anteporſi alle ſuperiori, perchè nella più grande vicinanza del Pianeta alla Terra, più grandi comparire ci devono le piccole deviazioni del medeſimo, venendo eſſe oſſervate ſotto l' angolo più vantaggioſo. Se ſi conſideri il triangolo *SPT* (*fig.* 1.) formato al Sole, al Pianeta ed alla Terra, nel quale l'angolo in *S* corriſponde alla commutazione, o ſia alla differenza delle longitudini eliocentriche del Pianeta e della Terra; l'angolo in *T* alla elongazione, o ſia alla differenza delle longitudini geocentriche del Pianeta e del Sole; e ſe ne prenda l' eſpreſſione differenziale, ſi avrà la ragione delle riſpettive variazioni, e ſarà $ds : dt :: R : \text{ſen.}^2\, t - \text{ſen.}\, t \times \text{coſ.}\, t \times cot.\, s :: TP : SP \times \text{coſ.}\, p$. Quindi intorno alle maſſime digreſſioni fatto retto l'angolo in *S* ed eguale a zero la cotangente *s*, l' eſpreſſione ſi ridurrà a $ds : dt :: R : \text{ſen.}^2\, t :: TP^2 : SP^2 :: TS^2 + SP^2 : SP^2$; e nelle congiunzioni ſvanendo gli angoli T ed S, e diventando eguale al raggio il coſeno dell' angolo P, ſi avrà $ds : dt :: TP : SP$, o ſia nelle congiunzioni ſuperiori come $TS + SP : SP$, e nelle inferiori come $TS - SP : SP$.

Nel caſo pertanto di Venere, la cui diſtanza SP è alla diſtanza ST proſſimamente come 0,731 : 1, ſarà preſſo le maſſime digreſſioni $ds : dt :: 3 : 1$; nelle congiunzioni ſuperiori come 17 : 7; e nelle congiunzioni inferiori come 7 : 18. dal che è manifeſto che una deviazione, per eſempio, di un minuto primo nella longitudine eliocentrica influiſce di ſoli venti ſecondi nella geocentrica oſſervata all' occaſione delle maſſime digreſſioni: influiſce di venticinque nelle congiunzioni ſuperiori, e di cento cinquanta quattro nelle congiunzioni inferiori. Allo ſteſſo modo determinare ſi poſſono le ragioni delle variazioni di ciaſcuno elemento ch' entra nella formazione delle Tavole, ed aſſegnarne le circoſtanze più favorevoli all' oſſervazione.

Ma quanto è facile l' oſſervare un pianeta in oppoſizione quando paſſando eſſo al meridiano a mezza notte, prima e dopo è comodamente viſibile; altrettanto difficili a farſi ſono le oſſervazioni delle congiunzioni, quando il pianeta è immerſo e ſopraffatto dalla viviſſima luce del Sole, col quale trovaſi nella ſteſſa direzione, e non preſenta, come nelle congiunzioni inferiori, che una piccoliſſima parte della ſua faccia illuminata. Quindi oltre i pochi caſi, nei quali la latitudine geocentrica del pianeta eſſendo minore del ſemidiametro del Sole, ſe ne oſſerva l' intereſſante paſſaggio ſopra il Sole ſteſſo, trovanſi aſſai rare nella ſtoria dell' Aſtronomia le oſſervazioni delle congiunzioni, per le quali è neceſſario di unire alle più favorevoli circoſtanze nella poſizione del pianeta anche un buono iſtromento per l' Aſtronomo.

Prima di dare qui l' oſſervazione da me fatta, premetto l' eſpoſizione di alcune piccole ricerche relative alla medeſima, e che ſembranmi potere eſſere utili anche in altre circoſtanze. Queſte riguardano principalmente l' inclinazione della faſe di Venere, la quantità della luce, ed il maſſimo effetto prodotto dalla luce della medeſima. E primamente avendo io oſſervato il Pianeta per più giorni, avanti e dopo la congiunzione col Sole, ed avendo avuto il piacere di vedere il rivolgimento della faſe formata dal tenuiſſimo ſegmento lucido, il quale in diverſi giorni ſucceſſivamente ſi preſentava al meridiano ſotto diverſe inclinazioni, ho cercato di determinare la quantità di tali inclinazioni, determinandone gli angoli col meridiano. Così i tempi degli appulſi ai fili del micrometro, ch' erano notati per maggiore eſattezza e comodo al contatto della prima porzione lucida, che ſi preſentava, potevano con preciſione eſſere ridotti al centro del Pianeta, al quale tutto dovevaſi riferire. A tale oggetto io ho determinato l' angolo formato coll' ecclittica dal diametro, che paſſa per l' eſtremità del ſegmento lucido, e mi ſono ſervito de' ſeguenti principj, de' quali è dimoſtrata ed aſſai nota la verità. La faſe lucida de' pianeti è uguale alla porzione della loro ſuperficie compreſa tra il circolo, che termina l' emisfero viſibile dalla Terra, ed il circolo che termina l' emiſfero illuminato dal Sole: e la larghezza della faſe lucida ſtà al diametro del Pianeta, come il ſeno verſo dell' angolo eſterno formato al Pianeta dalle linee tiratevi dal Sole e dalla Terra ſta al doppio raggio. L' interſezione del circolo viſibile e del lucido è un diametro comune ad entrambi, il quale paſſa per le due eſtremità della faſe: e come ogni diametro è ſempre perpendicolare all' aſſe del ſuo circolo; così il diametro della faſe è ſempre perpendicolare alle due linee tirate dal Pianeta alla Terra ed al Sole, le quali ſono appunto gli aſſi de' circoli viſibile ed illuminato. E' parimente il diametro medeſimo ſempre perpendicolare al piano, nel quale trovanſi gli aſſi, e il quale paſſa pe' centri del Pianeta, della Terra, e del Sole: e data l' inclinazione di queſto piano al piano dell' ecclittica, ne ſarà egualmente data per complemento l' inclinazione di quel diametro.

Rappreſentino (*fig.* 2.) T la Terra, S il Sole, P il Pianeta, fuori del piano dell' ecclittica, nel quale ſempre ſono T ed S. Abbaſſata ſul detto piano la normale PP', e tirata $P'E$ normale a TS ſarà l' angolo PTP' eguale alla latitudine geocentrica; l' angolo PTE uguale alla elongazione del Pianeta; l' angolo PEP' eguale alla inclinazione del piano $TPSE$ al piano dell' ecclittica; e l' angolo $P'PE$ uguale alla ricercata inclinazione del diametro della faſe. Quindi ſarà $PP' =$

$TP' \times$ tang. latit; $P'E = TP' \times$ ſen. elong., e tang. $P'PE = \frac{PE}{P'P} = \frac{\text{ſen. elong.}}{\text{tang. latit.}}$

Conoſciuta quella inclinazione e combinata coll' angolo di poſizione nel Pianeta, ſi avrà l'inclinazione della faſe al meridiano: combinata nuovamente coll'angolo così detto parallattico, ſi avrà l' inclinazione al corriſpondente verticale: e nella circoſtanza, in cui Venere ſia occultata dalla Luna, ſi combinerà colla direzione dell' orbita apparente della medeſima, affinchè la ſomma de' ſemidiametri, che uſare ſi ſuole nel calcolo di ſimili oſſervazioni, ſi ſminuiſca della quantità, che compete al ſegmento oſcuro di Venere, o ritenuta la ſomma de' ſemidiametri, ſi applichi la dovuta equazione al tempo del contatto oſſervato dalla parte oſcura.

Applicando la ſormola alla Luna, per la quale eſſa ha luogo egualmente, ſi avrà il vantaggio di determinare la configurazione della medeſima nelle circoſtanze di occultazioni di ſtelle. Inoltre tra le varie conſeguenze che riſultano da tale applicazione, merita per la pratica aſtronomica di eſſere avvertita quella, per cui ſi dimoſtra, che come non vi ha novilunio, fuori del nodo, in cui non ſiavi un piccoliſſimo ſegmento lucido corriſpondente al mezzo ſeno verſo della latitudine della Luna; così non vi ha plenilunio, in cui parimente non ſiavi il ſuo ſegmento oſcuro. Quindi nell' oſſervare in ſimili circoſtanze la Luna ſarà neceſſaria la precauzione di ſcegliere quel lembo, che non ne reſta alterato; e nel computarne il diametro, o ſi dovrà miſurare nella direzione parallela all' ecclittica, o ſi dovrà aumentare della quantità di cui reſta ſminuito per la faſe oſcura. Il quale ſminuimento ſebbene per una parte debba ſvanire nelle oppoſizioni, ſvanendo l' angolo di elongazione; non laſcia però di avere luogo per l' altra cagione di eſſere fuori dell' ecclittica ed alla medeſima inclinato il piano dell' orbita lunare. E coerentemente a tale inclinazione può rifletterſi ancora al periodico rivolgimento della faſe oſcura, la quale dal lembo auſtrale della Luna paſſa ſucceſſivamente al lembo boreale, giuſta il periodico movimento in latitudine della Luna medeſima. Dal che è manifeſto come alcune parti del diſco lunare vicine al lembo auſtrale debbono ſcoprirſi, mentre altre parti nel lembo oppoſto debbono naſconderſi, avvicendandoſi così ſucceſſivamente il fenomeno, che forma una parte della librazione lunare.

Una ſeconda ricerca meno neceſſaria in vero per l' uſo e per la riduzione dell' oſſervazione, ma pure dalla oſſervazione non aliena, anzi occaſionata dalla medeſima, può farſi ſulla intenſità e quantità della luce, che veniva riflettuta dalla tenue faſe di Venere al tempo della congiunzione col Sole, e che in generale eſſer deve riflettuta in ogni altro punto della ſua orbita. Quanto all' intenſità del lume del Pianeta è ben manifeſto, che ſeguendo eſſa la ragione inverſa della ſomma de' quadrati delle diſtanze dal Sole e dalla Terra, doveva eſſere in queſta inferiore congiunzione tanto maggiore di quella che ſtata ſarebbe nella congiunzione ſuperiore proſſimamente come 42 : 1. La quantità poi del lume medeſimo, che corriſponde alla quantità della parte illuminata viſibile, eſſere doveva nel tenue ſegmento a quella di una piena faſe proſſimamente come 0,01 : 1.

Una ulteriore oſſervazione può farſi ancora in queſto argomento. La facilità provata nel vedere diſtintamente il Pianeta, che, come ſi è detto, appena preſentava una centeſima parte del ſuo diſco illuminato, mi ha fatto richiamare quanto aveva accennato nel ſuo Trattato di Ottica il Cel. *Bouguer* relativamente alla maggior luce, ch' egli credeva mandata dai pianeti nelle parti vicine ai lembi, che nelle parti poſte intorno al centro, e per lo contrario del più grande ſplendore del Sole vicino al centro, che preſſo il lembo. Ed a fine di ſvolgere alquanto più la cagione di queſto curioſo ma incerto fenomeno, non ſarà inutile il riflettere, che ſebbene da ogni punto lucido della ſuperficie planetaria ſi diffondono i raggi all' intorno; non può però eſſere uguale la copia de' medeſimi in ogni direzione: ed eſſere vi deve una ragione, per cui quanto più i raggi ſi diſcoſtano dalla linea perpendicolare alla ſuperficie d' onde eſcono, tanto minore ſia la forza ed il numero loro. Imperciocchè ſe ugualmente ſi ſpargeſſero in isfera, il diſco del pianeta riſplenderebbe tanto più, quanto più le ſue parti foſſero diſtanti dal centro, ed il contorno dovrebbe eſſere infinitamente più illuminato del mezzo.

La verità di tale apparente paradoſſo ſi rende facilmente manifeſta nell' oſſervare, che ſe ogni ſemicircolo ADB (*fig.* 3) nel Pianeta viſto ſecondo la direzione CDT è progettato ſulla retta ACB, le lineette $Cc = Ff = GA$ ſaranno le projezioni degli archetti corriſpondenti Dd, Ee, aA: e ſe da ogni punto ſpargeſi uguale copia di raggi in ogni direzione, la quantità de' raggi medeſimi dovrà eſſere come il numero de' punti, ed il numero de' punti tanto più grande, quanto più grandi ſaranno gli archi. Ma gli archi Dd, Ee, aA creſcono reciprocamente come i ſeni degli angoli dDM, eEo, AaG, i quali dall' angolo retto dDM formato dalla linea del centro CDT (dove diventa $cC = dD$) vanno ſucceſſivamente decreſcendo fino a ſvanire nel lembo. In oltre per la nota proprietà del circolo eſſendo $2AC : Aa :: Aa : AG$, ſe ſia l' arco Aa infinitamente piccolo riſpetto ad AC, ſarà pure il medeſimo infinitamente grande riſpetto ad $AG = fF = cC = dD$: d' onde è manifeſto, che la quantità di luce riferita in cC ſarà infinitamente minore della riferita in AG.

Quindi ſegue ancora, che ſe il Pianeta in ogni parte della ſua ſuperficie ci ſembra egualmente riſplendere, la quantità de' raggi ſparſi da ciaſcun punto ſotto diverſe inclinazioni ſarà direttamente come i ſeni delle inclinazioni medeſime, in ragione reciproca dei quali creſcono i piccoli archi: così che quanto ſi ſminuiſce la luce, ſminuendoſi i ſeni delle inclinazioni, altrettanto creſca la medeſima, creſcendo gli archi. Ma ſe la luce del Pianeta ci compare maggiore nel contorno del diſco che nel centro, o al contrario maggiore nel centro e minore nel lembo, la vivezza della luce medeſima ſeguirà nel primo caſo una ragione maggiore, e nel ſecondo caſo una ragione minore di quella dei ſeni delle inclinazioni.

Le varie ſperienze del *Bouguer* ci hanno fatto conoſcere la legge che proſſimamente oſſervaſi nella rifleſſione della luce ſotto diverſi angoli, nei corpi che ſembrano i più opportuni a ſimili ricerche, quali ſono l' argento, la carta, il geſſo. Nella ſeguente Tavola ſono i riſultati delle prove fatte ſul geſſo, che ſembra avere più di analogia alla materia de' pianeti.

Inclinazione de' raggi	90°.	75°.	60°.	45°.	30°.	15°.
Seni delle inclinazioni	1000.	966.	866.	707.	500.	259.
Luce	1000.	762.	640.	529.	352.	194.

Ma convien pure non diſſimulare, che paſſando da queſti corpi terreſtri ai corpi celeſti, la coſa anderebbe a roveſcio, ſe vera foſſe l'oſſervazione del *Bouguer* riſpetto alla diverſa luce dei lembi che del centro. Altronde credo di poter dire che nè a me, nè agli Aſtronomi, che ne ho interrogato, è ſtata generalmente ſenſibile tale differenza di luce: anzi riguardo al Sole oſſervato con un buon micrometro obbiettivo del Dollond ho fatto più lucente ora l'una ora l'altra delle due imagini formate dall' iſtromento, ottenendo tale avvicendamento di luce col più piccolo movimento, che produceſſe qualche inclinazione riſpettiva nelle due mezze lenti: onde fatto il paragone fra il centro di una imagine ed il lembo dell' altra, come fu praticato dal *Bouguer*, ſi ſarebbe trovata prima un' apparenza, poi un' altra contraria.

Ritornando ora all' argomento, d' onde ſono partito, ed alla quantità di luce riflettuta dal Pianeta in qualunque punto della ſua orbita, il già citato Ch. *Bouguer* dimoſtra, che la porzione di eſſa che ci viene da ogni trapezio elementare della ſuperficie del Pianeta ſi rappreſenta in generale per

$$\frac{dt.\,dy.\sqrt{a^2-y^2}\,.\sqrt{a^2-g^2}}{a}$$

$$+\frac{b.\,dt.\,dy.\left(a^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}m}\left(a^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}\left(a^2-g^2\right)}{a^{2m}}$$

nella quale formola ſi eſprime per a il ſemidiametro del Pianeta, per t e per y la poſizione di un punto C nella ſuperficie planetaria, del quale particolarmente ſi cerca la luce, per g il ſeno della metà dell'elongazione e della commutazione del Pianeta; per m l'eſponente di una quantità coſtante b, che, combinata coi ſeni delle inclinazioni dei raggi alla ſuperficie, miſuri la quantità de' medeſimi corriſpondente alle diverſe inclinazioni. Nel ſopraccitato Trattato di Ottica ſe ne può vedere la dimoſtrazione e l' integrazione in diverſe ipoteſi del valore di m. Intanto deve qui avvertirſi, che nella riportata formola non s' involge determinatamente la quantità di luce, che ſi diſperde nella ſuperficie planetaria, ſenza eſſere opportunamente riflettuta, e che perciò è ancora ignota l' aſſoluta ragione tra la luce che manda il Sole, e quella che ci viene dai pianeti. Ben è vero, che come il medeſimo *Bouguer* ha oſſervato, che il lume lunare in plenilunio è proſſimamente una parte trecentomilleſima della luce ſolare; ed il Ch. *Baylli* ha portato la ſagacità delle ſue ricerche nella luce de' ſatelliti: così ſembra che promovere ſi poſſa la delicatezza dell' oſſervazione, e raccolta nel foco di un eccellente obbiettivo la luce di ciaſcun pianeta tentare qualche paragone colla luce della Luna in diverſe faſi, o altrimenti eſaminarla con qualche fino ſtromento per determinarne i rapporti finora ſconoſciuti.

La terza ricerca tra le propoſte di ſopra riguarda il maſſimo effetto prodotto dalla luce di Venere, e la determinazione delle circoſtanze, nelle quali deve aver luogo. E ſebbene l' *Halley* abbia data la ſoluzione di tale problema, inſerita nelle Tranſazioni filoſofiche e riferita nell' Aſtronomia del *La Lande*; ſembra però che ſulle tracce di queſti celebri uomini ſi poſſa tornare ſu tale argomento, ſenza incorrere la taccia di ſare una inutile repetizione. Il fatto egualmente oſſervato dagli Aſtronomi, che ammirato dal ſemplice volgo, è, che Venere dentro certo periodo di anni in pieno giorno ſi può da tutti vedere, come una brillante ſtella, ſenza alcuno mezzo di cannocchiale o di altro ſimile ſtromento. Un tale fenomeno manifeſta abbaſtanza ch' eſſere vi deve un *maſſimo* dipendente dall' intenſità inſieme e dalla quantità di lume, che viene a noi riflettuto dal Pianeta: ed un tale maſſimo ſi determinerà, differenziata ed uguagliata a zero la formola, che eſprima i detti elementi.

Laſciata però quella del *Bouguer*, che ſolo rappreſenta la quantità della luce, ed è ſoverchiamente complicata al biſogno, è bene manifeſto altronde che potendoſi conſiderare riſpettivamente coſtanti le diſtanze dal Sole di Venere e della Terra, l' intenſità della luce di Venere deve dipendere dalla diſtanza della medeſima dalla Terra; ed a queſta diſtanza ſteſſa avendo una conoſciuta ragione anche la quantità della faſe, alla quale corriſponde la quantità della luce, l' effetto maſſimo prodotto dalle due cagioni combinate inſieme potrà eſſere determinato,

nato, determinando la corriſpondente diſtanza: col quale elemento ſi conoſcerà anche l'angolo di elongazione, nel quale il fenomeno deve accadere.

Già ſi è detto che l' area planetaria, e la quantità della faſe lucida ſono tra loro come il raggio alla metà del ſeno verſo dell' angolo eſterno formato al Pianeta dalle direzioni del Sole e della Terra. Se pertanto nel triangolo *SPT* (*fig.* 1) già ſopra conſiderato ſia $ST = m$, $SP = n$, $TP = x$, r il raggio, p l' angolo *SPT*, ſarà per le note formole trigonometriche

$$\frac{r^2}{nx} \times \frac{n+m-x}{2} \times \frac{m+x-n}{2} = \text{ſen.}^2 \tfrac{1}{2} p = \frac{r - \text{coſ.}\, p}{2}$$

$= \frac{1}{2}$ ſen. vers. p. Tal eſpreſſione ridotta all' angolo eſterno SPQ colla dovuta mutazione di ſegni diverrà la ſteſſa, che la data dall' *Halley*, e rappreſenterà la grandezza della faſe, e la quantità del lume, del quale parimente ſi eſprimerà l' intenſità, dividendo la formola per x^2 (*), e ſarà $\frac{n^2 + 2nx + x^2 - m^2}{4nx^3}$. Queſta differenziata e giuſta il canone de' maſſimi, e de' minimi fatta eguale a zero, darà

$(\overline{3m^2 - 3n^2} \times x^{-4} - 4nx^{-3} - x^{-2}) \frac{dx}{4n} = o$, e moltiplicando per $\frac{4nx^4}{dx}$, ſarà $3m^2 - 3n^2 - 4nx - x^2 = 0$; d' onde $x = \sqrt{3m^2 + n^2} - 2n = a$; e cos. elong. $= \frac{m^2 - n^2 + a^2}{2am}$.

E' perciò evidente che corriſpondendo x ad un *maſſimo* qualunque ſia il valore di m e di n, e verificandoſi in fatti tan-

---

(*) Ad eſprimere con più giuſta preciſione l' intenſità della luce, ſi dovrebbe dividere la formola per $n^2 + x^2$. In tal caſo il valore di x, dopo la differenziazione, ſi avrebbe per una equazione di quarto grado. Siccome però nella ſerie dell' operazioni ſi ſono ſuppoſte coſtanti le quantità m ed n, la intenſità del lume di Venere riſpettivamente alla Terra è baſtantemente e più ſemplicemente eſpreſſa pel ſolo $\frac{1}{x^2}$.

to il valore di x, quanto la corriſpondente elongazione due volte in ciaſcuna rivoluzione di Venere; altrettante volte dovrebbe vederſi il fenomeno, ſe il medeſimo poteſſe rappreſentarſi per qualunque di coteſti maſſimi. Ma l' oſſervazione eſſendo contraria, converrà cercare o il maſſimo fra i minimi, o almeno uno fra i medeſimi, che ſia de' favorevoli, e ſoprattutto che corriſponda all' attuale oſſervazione. Il maſſimo fra i maſſimi ſi avrà allora quando il valore di x ſia il minimo. Imperciocchè la quantità e l' intenſità del lume è come $\frac{(n+x)^2-m^2}{4nx^3}$, ed il coſeno della elongazione come $\frac{m^2-n^2+x^2}{2mx}$ Ora ciaſcuno di queſti elementi creſce tanto più favorevolmente all' uopo, quanto più decreſce l' x. Il valore poi di x ſarà tanto più piccolo, quanto più piccolo ſarà m, e più grande ſarà n: ciò che è manifeſto dalla ſola iſpezione della formola $x = \sqrt{3m^2+n^2} - 2n$.

Dalla medeſima formola, e dalla ragione tra m ed n che in qualunque circoſtanza ſi poſſa verificare riſulta ancora che nei valori di x influiſce più m, che n; quindi nel formare la ſerie delli x ſi combinerà prima m minimo, poi m medio, ed in fine m maſſimo con n maſſimo, medio, minimo: e ſi avranno nove valori dal più vantaggioſo decreſcenti fino al meno favorevole. Nella combinazione, per eſempio, che Venere e la Terra ſiano nelle loro diſtanze medie, e ſia $m=1$, ſarà $x=0,43036$, e l' elongazione 39°. 43'. 30''. Nella combinazione meno favorevole che ſia Venere nella minima ſua diſtanza e la Terra nella diſtanza ſua maſſima, ſarà $x = 0,46552$, e l' elongazione 39°. 5', 35''. E nella combinazione più vantaggioſa che ſia Venere nella diſtanza ſua maſſima, e la Terra nella diſtanza ſua minima, ſarà $x=0,39532$, e l' elongazione 40°. 21'. 36''.

Queſta ultima combinazione, che corriſponde al maſſimo fra i maſſimi, non può avere luogo ne' ſecoli vicini a noi per l' attuale poſizione dell' afelio di Venere, e del perihelio della Terra. Trovaſi quello a dieci ſegni e nove gradi di longitudine eliocentrica, e queſto a tre ſegni e nove gradi; quindi l' elongazione di Venere afelia viſta dalla Terra perihelia deve eſſere ſolamente intorno a tredici gradi, e la riſpettiva diſtanza $x = n.\ \frac{\text{ſen. commut.}}{\text{ſen. elong.}}$ è proſſimamente quattro volte maggiore di quella, che viene indicata dalla formola del maſſimo. La bella apparenza di Venere, che nel 1776, come ſi legge nelle Tranſazioni Filoſofiche, fu ammirata dal popolo di Londra, quaſi un prodigio, ſi oſſervò nel Luglio, quando la Terra e Venere erano preſſo il loro afelio, e perciò in una combinazione delle meno vantaggioſe. Queſto fatto ci dimoſtra abbaſtanza, che nella maggiore o minore facilità di vedere più luminoſo il fenomeno, deve particolarmente influire lo ſtato della noſtra atmosfera, non ſolamente per ciò che riguarda le ſenſibili nuvole o nebbie, ma per una più occulta cauſa, per cui ſi laſci un più facile o difficile paſſaggio ai raggi di luce. La coſa ſi conferma ancora dal riflettere che il fenomeno ne ritorna regolarmente dopo otto anni, quando pure Venere dentro tale periodo ritorna ſenſibilmente alla ſteſſa combinazione di poſizione: nè il medeſimo trovaſi oſſervato ſul finire o ſul cominciare dell' anno quando per una parte hanno luogo le combinazioni più favorevoli, ma per l' altra parte trovaſi l' atmosfera in uno ſtato di minore facilità alla traſmiſſione della luce: come ſi può provare paragonando la luce del Sole al mezzodì di un giorno ſereniſſimo del Decembre, con quella che il Sole medeſimo manda eſſendo a 21 gradi di altezza ſopra l' orizzonte in un giorno ſereniſſimo del Giugno.

Vengo ora in fine ad eſporre l' oſſervazione. Eſſa è ſtata fatta ad un quadrante murale di ſei piedi di raggio collocato nel meridiano. Le differenze d' aſcenſione retta tra Venere e la Stella β del Cane minore, colla quale è ſtata paragonata, ſono generalmente dedotte da tre appulſi ai fili del micrometro: le differenze di declinazione ſono corrette per l' effetto della piccola differenza di rifrazione, e per la parallaſſe di Venere. La poſizione vera della Stella preſa dal catalogo del *La Caille* e ridotta in apparente colle conſuete equazioni dell' aberrazione e della nutazione, era all' epoca dell' oſſervazioni in aſcenſione retta 108.° 50′. 8″; in declinazione boreale 8.° 43′. 2″. Le poſizioni apparenti di Venere dedotte dall' oſſervazione e ridotte in vere colle debite equazioni dell' aberrazione e della nutazione, ſono paragonate colle corriſpondenti poſizioni calcolate ſulle Tavole de *La Lande*.

1782 Marzo	Tempo medio dell' oſſervazione	Differenza d' Aſcenſion retta tra Venere e β del Cane Minore	Aſcenſione retta di Venere	Differenza di declinazione tra Venere e β	Declinazi di Vener
11	0^{h}. 51'. 26", 7	7^{h}. 5'. 39", 4 = 106°. 42'. 9"	2°. 7'. 59"	+ 1. 18. 58	10°. 2'. 0
14	0. 33. 52, 0	7. 11. 26, 5 = 108. 9. 21	0. 40. 47	+ 0. 51. 37	9. 34. 39
18	0. 9. 34, 8	7. 20. 1, 5 = 110. 18. 18	358. 31. 50	— 0. 3. 45	8. 39. 17
19	0. 3. 25, 8	7. 22. 14, 2 = 110. 51. 32	357. 58. 36	— 0. 20. 43	8. 22. 19
19	23. 57. 18, 4	7. 24. 26, 2 = 111. 24. 35	357. 25. 33	— 0. 38. 33	8. 4. 29
20	23. 51. 11, 5	7. 26. 37, 4 = 111. 57. 26	356. 52. 42	— 0. 57. 16	7. 45. 4

	Tempo medio	Longitudine di Venere oſſervata	Longitudine calcolata dalle Tavole	Differenza	Latitudine di Venere oſſervata	Latitudine calcolata dalle Tavole	Diffe za
11	0^{h}. 51'. 26", 7	0^{s}. 5°. 58'. 36"	0^{s}. 6°. 2'. 25"	+ 3'. 49"	8°. 20'. 59" B	8°. 19'. 40" B	– 1'.
14	0. 33. 52, 0	0. 4. 27. 57	0. 4. 31. 58	+ 4. 1	8. 30. 35	8. 29. 14	– 1.
18	0. 9. 34, 8	0. 2. 7. 34	0. 2. 11. 43	+ 4. 9	8. 31. 6	8. 29. 45	– 1.
19	0. 3. 25, 8	0. 1. 30. 22	0. 1. 34. 36	+ 4. 14	8. 28. 48	8. 27. 31	– 1.
19	23. 57. 18, 4	0. 0. 52. 42	0. 0. 57. 3	+ 4. 21	8. 25. 38	8. 24. 22	– 1.
20	23. 51. 11, 5	0. 0. 15. 3	0. 0. 19. 28	+ 4. 25	8. 21. 35	8. 20. 21	– 1.

SOPRA LA FORZA
CENTRIFUGA.

Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie Pubblico Profeſſore delle Matematiche ſuperiori nella R. Univerſità di Pavia.

1. Ridurre alla maſſima ſemplicità la dimoſtrazione delle varie affezioni della Forza Centrifuga, aggiugnervi alcune non inutili oſſervazioni, eſtenderne l' applicazione a qualche punto importante della Meccanica, e finalmente ricavarne la dimoſtrazione de' Teoremi Meccanici da me eſpoſti nel primo Volume di queſte Memorie della *Società Italiana*, è l' unico oggetto di queſto breve Opuſcolo. In eſſo io ſuppongo nota la dottrina generale delle forze acceleratrici, e parto dal notiſſimo principio, che la miſura della forza centrifuga, ovvero anche della centripeta (giacchè l' una è ſempre uguale all'altra) è il doppio della lineetta, la quale congiunge l' eſtremo dell' archetto infiniteſimo deſcritto dal corpo in un iſtante coll' eſtremo di quella porzione della tangente di detto arco, cui il corpo deſcriverebbe in quello ſteſſo iſtante colla velocità quivi acquiſtata, e ſenza l'azione di alcuna forza, la qual doppia lineetta diviſa che ſia pel quadrato dell' indicato iſtante eſprime la vera quantità e miſura della forza centrale, così centrifuga, come centripeta.

2. Immaginiamoci pertanto un corpo (la di cui maſſa fingeremo ſempre concentrata in un ſul punto) attaccato ad un filo; e queſto fermato per una eſtremità ad un piano orizzontale, e diſteſo in retta linea dall' uno all' altro eſtremo lungo il detto piano. Si preſcinda dall' attrito e da qualunque altro impedimento, e ſi dia al corpo un colpo in direzione perpendicolare al filo: il corpo incomincierà a deſcrivere un cerchio avente per ſemidiametro la lunghezza del filo, e quindi farà forza di ſtirare e ſtendere il filo, cioè e-

ſerciterà una forza centrifuga impiegata in queſto caſo a produrre la tenſione del medeſimo. Si chiami f la forza centrifuga, o la tenſione del filo, ddz la lineetta, che congiunge gli eſtremi dell' archetto e della tangente del cerchio (la qual lineetta ſi ſa eſſere infiniteſima di ſecond' ordine), r il raggio del cerchio, dt l' iſtante o tempicciuolo infiniteſimo, ds l' archetto, v la velocità del corpo per l' archetto ds, h l' altezza *dovuta* alla velocità v. Ciò poſto ſarà

TEOREMA I.

3. $f = \frac{v^2}{r} = \frac{2h}{r}$, *vale a dire la forza centrifuga nel cerchio in quel punto della circonferenza, dove il corpo ſi trova, è uguale al quadrato della velocità del corpo in quel punto, diviſo pel ſemidiametro, ovvero uguale al doppio dell' altezza* dovuta *a tale velocità, e diviſo pel raggio.*

DIMOSTRAZIONE.

E' evidente, che la lineetta ddz diventa nel cerchio uguale al ſeno verſo dell' archetto ds, e conſeguentemente $ddz = \frac{ds^2}{2r}$. Ma $f = \frac{2ddz}{dt^1}$; dunque $f = \frac{ds^2}{rdt^2}$; e ſiccome $v = \frac{ds}{dt}$, ſi ha $f = \frac{v^2}{r}$. Perchè poi dalle leggi del moto equabilmente accelerato, poſta la gravità terreſtre acceleratrice $= 1$, ſi ricava $v^2 = 2h$, ſi ottiene pur anco $f = \frac{2h}{r}$. Il che era ecc.

4. COROLL. Poichè nel corpo, che ſi rivolge in un cerchio, la forza centrifruga ha dovunque una direzione perpendicolare all' arco, ella non tende in conſeguenza nè ad accreſcere, nè a ſminuire la velocità del corpo per l' arco, la quale ſarà dunque la ſteſſa in tutti i punti della circonferenza, come pure la ſteſſa la forza centrifuga. Dunque il moto è uniforme, e la forza centrifuga è coſtante.

TEOREMA II

5. *L' arco circolare deſcritto dal corpo in un dato tempo è medio proporzionale fra il diametro del cerchio e lo ſpazio, che ſarebbe da eſſo traſcorſo in quel tempo, ſe poſto in libertà veniſſe ſollecitato per tutto quel tempo dalla data forza centrifuga.*

DIMOSTRAZIONE.

Si è già dimoſtrato eſſere $2r : ds :: ds : ddz$, e chiamato t il tempo propoſto ſta parimenti $1 : t :: t : t^2$; onde moltiplicate le due analogie naſce $2r : tds :: tds : t^2 ddz$. Ma tds è l' arco deſcritto dal corpo con moto uniforme nel tempo t, perchè ds è l' archetto ſcorſo in un iſtante: e $t^2 ddz$ è lo ſpazio ſcorſo dal corpo libero nel medeſimo tempo con moto uniformemente accelerato per l' azione coſtante della forza centrifuga, poichè ddz è lo ſpazietto deſcritto in un iſtante in virtù di tal forza. Dunque ecc. Il che era ecc.

6. COROLL. La velocità, colla quale il corpo ſi rivolge nel cerchio, è quella ſteſſa che acquiſta ſcorrendo liberamente la metà del ſemidiametro per l' azione coſtante della forza centrifuga. Imperciocchè per le leggi del moto equabilmente accelerato, lo ſpazio da deſcriverſi dal corpo per acquiſtare una tale velocità è la metà dell' arco percorſo equabilmente nello ſteſſo tempo. Ma pel Teorema antecedente queſt' arco è medio proporzionale fra il diametro e il detto ſpazio. Dunque quattro volte il quadrato di eſſo ſpazio è uguale al prodotto di tale ſpazio nel diametro; e quindi ſi ha lo ſteſſo ſpazio uguale alla metà del ſemidiametro

TEOREMA III.

7. *Le forze centrifughe di varj corpi moſſi circolarmente come nel §. 2 ſono come i quadrati delle loro velocità direttamente, e come i ſemidiametri inverſamente.*

DIMOSTRAZIONE.

Nominando colle lettere majuſcole le quantità dianzi indicate colle minuſcole, ſi ha non meno $f = \frac{v^2}{r}$, che $F = \frac{V^2}{R}$ onde $f : F :: \frac{v^2}{r} : \frac{V^2}{R}$. Il che era ecc.

8. COROLL. I. Se i raggi ſono come i quadrati delle velocità, le forze centriſughe ſono eguali, e *viceverſa*.

9. COROLL. II. Se le velocità ſono come le poteſtà $n.^{\text{eſime}}$ de' raggi, le forze centrifughe ſono come le poteſtà $\overline{2n-1}.^{\text{eſime}}$ de' raggi medeſimi, e *viceverſa*; e quindi allorchè le velocità ſono in proporzione de' raggi; anche le forze centrifughe ſtanno in tal proporzione, e *viceverſa*.

TEOREMA IV.

10. *Le forze centrifughe de' corpi, che ſi muovono in un cerchio, ſono come i raggi direttamente, ed inverſamente come i quadrati de' tempi periodici, cioè de' tempi delle intere rivoluzioni*

DIMOSTRAZIONE.

Nominando T, t i tempi periodici, C, c le circonferenze, è manifeſto per la legge del moto equabile, che $V = \frac{C}{T}$, $v = \frac{c}{t}$; e però $F : f :: \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r} :: \frac{C^2}{T^2 R} : \frac{c^2}{t^2 r} :: \frac{R^2}{T^2 R} : \frac{r^2}{t^2 r} :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$: Il che era ecc.

11. COROLL. I. Le forze centriſughe ſono come le velocità direttamente, e i tempi periodici inverſamente, perchè eſſendo $V : v :: \frac{C}{T} : \frac{c}{t} :: \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, ne viene $F : f :: \frac{V}{T} : \frac{v}{t}$.

12. COROLL. II. Se i quadrati de' tempi periodici ſono come i raggi, le forze centriſughe ſono eguali, e *viceverſa*: così

pure

pure ſe le velocità ſono come i tempi periodici, le forze centrifughe ſono eguali, e *viceverſa*.

13. COROLL. III. Se i tempi periodici ſono come le poteſtà $n.^{\text{eſime}}$ de' raggi, le forze centrifughe ſono inverſamente come le poteſtà $\overline{2n - 1.}^{\text{eſime}}$ de' medeſimi raggi, e *viceverſa*, e le velocità ſono inverſamente come le poteſtà $\overline{n - 1.}^{\text{eſime}}$ de' raggi, e *viceverſa*.

14. COROLL. IV. Se i tempi periodici ſono in ragione ſeſquiplicata de' raggi (che è il caſo delle rivoluzioni de' pianeti), le forze centrifughe, e però ancora le centripete ſono in ragione inverſa duplicata de' raggi, e *viceverſa*, e le velocità in ragione inverſa ſudduplicata de' raggi, e *viceverſa*.

TEOREMA V.

15. *Se la velocità del moto circolare è dovuta all' altezza uguale alla metà del ſemidiametro, cioè è uguale a quella che acquiſta un corpo libero cadendo per l' azione della gravità terreſtre dall' altezza d' un mezzo ſemidiametro, allora la forza centrifuga uguaglia la gravità terreſtre, e* viceverſa.

DIMOSTRAZIONE.

In queſta ipoteſi diviene $h = \frac{1}{2} r$; e conſeguentemente $f = \frac{2h}{r} = \frac{r}{r} = 1$, che è appunto la gravità terreſtre. Il che era ecc.

SCOLIO.

16. Fino a qui non ſi è avuto riguardo alla maſſa del corpo, e perciò ſi è conſiderata la ſola forza centrifuga *acceleratrice*, la quale ſi cangia in *motrice* con moltiplicarla per la maſſa. Dunque moltiplicando per le riſpettive maſſe i termini delle precedenti ugualtà, e analogie ſi verrà ad ottenere i valori aſſoluti, e relativi delle forze centrifughe motrici. Così per eſemp. nel caſo di queſto V. Teorema la forza

centrifuga motrice uguaglia il peſo del corpo, perchè poſta la ſua maſſa $= m$, ed eſſendo $f = 1$, naſce $mf = 1 \times m$, che è appunto il peſo del corpo; ond' è, che il filo ſarà teſo e ſtirato nè più, nè meno che ſe il corpo attaccatovi pendeſſe verticalmente, ed agiſſe contro il filo con tutto il ſuo peſo.

PROBLEMA I.

17. *Se il corpo attaccato al filo riceve un tal colpo, che il ſuo tempo periodico* t *ſia noto, e riſulti nel filo una tenſione uguale a quella che produce il peſo del corpo immobile e verticalmente pendente; ſi domanda qual ſia la lunghezza del filo, o il raggio* r *del cerchio.*

SOLUZIONE.

Suppoſto $1 : \pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza, ſarà $2r\pi$ la circonferenza del cerchio deſcritto, e per la legge del moto uniforme ſi ha $t = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2r\pi}{\sqrt{2h}}$. Ora (§. 15.) $r = 2h$; dunque $t = \frac{2r\pi}{\sqrt{r}} = 2\pi\sqrt{r}$; e quindi $r = \frac{t^2}{4\pi^2}$. Il che era ecc.

SCOLIO.

18. Si noti qui bene, che ſiccome l' eſpreſſione $\frac{t^2}{4\pi^2}$ dee rappreſentare una quantità lineare, e $4\pi^2$ è un numero aſtratto, non può t^2 eſprimere che una linea, cui diremo l. Per determinare poi queſta ſi rifletta, che nominando θ il tempo, ed a l' altezza, da cui caſca un grave in quel tempo, naſce $\theta^2 = 2a$ nella preſente ipoteſi della gravità acceleratrice $= 1$. Laonde ſe t ſarà dato in ſecondi, ſtarà il numero de' ſecondi in θ^2 al numero de' ſecondi in t^2 come la linea $2a$ alla linea l, cioè ſi avrà $l = \frac{2t^2 a}{\theta^2}$; e perchè fatto $\theta = 1'$ ſi tro-

va $a = 15, 1$ *pi.*, ſi ha quindi $l = t^2 \times 30, 2$ *pi.*, e conſeguentemente $r = \frac{t^2}{4\pi^2} \times 30, 2$ *pi.*, eſſendo t dato in ſecondi.

19. COROLL. Se il tempo, che mette una palla inerte ma non peſante a deſcrivere la circonferenza d'un cerchio, è due volte tanto quanto il tempo d'un' oſcillazione minima d'un pendolo, la di cui lunghezza è uguale al ſemidiametro r del predetto cerchio, e porta all'eſtremità una picciola maſſa peſante; la forza centrifuga *aſſoluta* o motrice della palla inerte è uguale al peſo d'una maſſa grave di egual quantità di materia con detta palla. Imperciocchè ſi ſa dalla dottrina de' pendoli, che il tempo d'un' oſcillazione minima ſta al tempo della caduta libera per la doppia altezza del pendolo, cioè pel diametro del cerchio deſcritto dalla palla inerte, come ſta la ſemicirconferenza al diametro, ovvero come $\pi : 2$; onde eſſendo il tempo di tal caduta $= \sqrt{4r} = 2\sqrt{r}$, ne viene che il tempo dell' oſcillazione ſarà $= \pi\sqrt{r}$. Ma il tempo periodico della palla inerte è $= \frac{2r\pi}{\sqrt{2h}}$; dunque dovendo eſſer queſto doppio di quello, naſcerà $\frac{2r\pi}{\sqrt{2h}} = 2\pi\sqrt{r}$, e quindi $r = 2h$, cioè finalmente $f = \frac{2h}{r} = 1$, che è quanto dire la forza centrifuga acceleratrice uguale alla gravità terreſtre; dal che deriva la forza centrifuga *aſſoluta* o motrice uguale al peſo della palla conſiderata non ſolo come inerte, ma anche come grave.

PROBLEMA II. (*fig.* 1)

20. *Sia una curva* RA, *la quale rotandoſi intorno all'aſſe verticale* AC *generi una sferoide, di cui tutte le ſezioni orizzontali ſono tanti cerchj aventi le ordinate* HM *della curva genitrice per raggi. Si collochi in qualunque interno luogo* M *della sferoide cava un grave, e gli ſi dia un colpo, per cui incominci a deſcrivere il cerchio corriſpondente del raggio* HM. *Si domanda quanta eſſer debba la velocità impreſſa dal colpo, perchè il corpo non ſia coſtretto dalla gravità a calare al baſſo, ma ſeguiti a moverſi nel cerchio incominciato.*

SOLUZIONE.

Sia l' aſciſſa $AH=x$, l' ordinata $HM=y$, e l' altezza dovuta alla ricercata velocità $=h$. Condotta la normale CM alla curva, la verticale MN, e l' orizzontale MF in direzione del raggio HM, ſi ponga mente, che la gravità ſpinge il corpo ſecondo MN con uno sforzo $=1$, e la forza centrifuga riſultante dal moto circolare lo ſollecita ſecondo MF con una ſpinta $=\frac{2h}{y}$; e però ſia $FM:MN::\frac{2h}{y}:1$. Se pertanto il corpo ha da perſiſtere in M, e così pure in ciaſcun punto della circonferenza, che ha HM per raggio, ſenza calare, nè aſcendere, la riſultante MO delle due forze MF, MN dovrà eſſere perpendicolare all' elemento della curva in M, ſicchè reſti interamente eliſa. Laonde MO è un prolungamento della normale CM, e i triangoli ſimili OMF, MHC danno l' analogia $MN:MF::CH:HM$, cioè $1:\frac{2h}{y}::\frac{ydy}{dx}:y$; ond' è $h=\frac{ydx}{2dy}$, cioè uguale alla metà della ſottangente della curva genitrice. Data dunque la curva, la ſua equazione differenziale farà conoſcere l' altezza dovuta alla velocità ricercata. Il che era ecc.

21. COROLL. I. Se la sferoide è un cono colla punta in baſſo, cioè ſe la linea genitrice AM è retta, ſicchè $y=nx$, ſi ottiene $h=\frac{1}{2}x$.

22. COROLL. II. Se è una paraboloide, ne viene $y=x$, doppia della precedente

PROBLEMA III.

23. *Nell' ipoteſi precedente che il grave ſeguiti a muoverſi dopo l' urto nel cerchio incominciato, ſi domanda l' equazione della curva genitrice quando la velocità impreſſa al corpo ſia una funzione delle coordinate.*

SOLUZIONE.

Eſſendo in tal ſuppoſto b una funzione di x, y, ed inſieme $= \frac{ydx}{2dy}$, co' metodi conoſciuti del calcolo Integrale ſi ritrova un' equazione fra y ed x. Il che ecc.

24. COROLL. I. Suppoſta la velocità proporzionale all' ordinata, e però $b = \frac{y^2}{a}$, naſce $adx = 2ydy$, ed integrando in ipoteſi che ſvaniſcano inſieme y ed x, ſi ottiene $y^2 = ax$, cioè la parabola conica.

25. COROLL. II. Suppoſto $b = \frac{y^n}{a^{n-1}}$, proviene $2y^{n-1}dy = a^{n-1}dx$, ed integrando $\frac{2}{n} y^n = a^{n-1}x$ in ipoteſi, che ſi annullino inſieme y ed x, ed n ſia un numero poſitivo.

26. COROLL. III. Se ſi ſuppone $b = \frac{x^2}{a^{n-1}}$, ne riſulta $\frac{2dy}{y} = \frac{a^{n-1}dx}{x^n}$, e coll' integrazione proviene

$$2 \log. y = \frac{-a^{n-1}}{(n-1)x^{n-2}} + \text{coſt.}$$

PROBLEMA IV.

27. *Determinare la sferoide, nella quale collocato un grave in qualunque punto* M *della ſua cavità, e colpito colla conveniente velocità, che lo obblighi a deſcrivere il cerchio orizzontale ſenza diſcendere, compia il ſuo giro ſempre nello ſteſſo tempo.*

SOLUZIONE.

Eſſendo b l' altezza dovuta alla velocità, colla quale il grave percorre la circonferenza del raggio HM, oſſia y ſenza eſſere coſtretto a diſcendere per la ſua gravità, e $2\pi y$ la circonferenza, proviene il tempo periodico coſtante $t = \frac{2\pi y}{\sqrt{2h}}$; e in conſeguenza $y^2 = \frac{t^2}{2\pi^2} h$. Il perchè la curva genitrice della ſferoide è la parabola conica colle ordinate y, le aſciſſe h, e il parametro $\frac{t^2}{2\pi^2}$, e perciò la ſferoide cercata è una paraboloide. Il che ecc.

28. COROLL. Col diſcorſo del §. 18. ſi trova il parametro di queſta parabola $= \frac{t^2}{2\pi^2} \times 30, 2$ *pi.*, prendendo il tempo t eſpreſſo in ſecondi.

PROBLEMA V. (*fig.* II.)

29. *Un filo* AC *fermato in* A *ſoſtiene nell' altro eſtremo* C *un grave (la di cui maſſa dee concepirſi concentrata in un punto): guidata la retta verticale* AB, *e portato il filo nella ſituazione obliqua* AC, *ſi dà al grave una percoſſa in direzione perpendicolare al piano* BAC, *ſicchè il grave incomincia a deſcrivere un cerchio normale ad* AB, *ed il filo* AC *un cono retto coll' aſſe* AB. *Si cerca quanta debba eſſere la velocità comunicata al corpo, affinchè continui a deſcrivere queſto cerchio, ed il filo a ſcorrere l' intiero cono*

SOLUZIONE.

Poichè CB normale a BA è raggio del cerchio percorſo, ſe ſi nomina h l' altezza dovuta alla ricercata velocità, la forza centrifuga del corpo in direzione di CE ſarà $= \frac{2h}{r}$, poſto $r = BC$, e la gravità terreſtre, che lo ſollecita ſecondo la verticale CI, è $= 1$. Preſe pertanto le linee CE, CI proporzionali a queſte forze, la loro azione non dee punto cambiare l' angolo BAC, ſe il filo ha da deſcrivere un cono. Perlochè la riſultante CF di eſſe forze dee trovarſi nella ſteſſa direzione del filo per poter eſſerne interamente diſtrutta. Ma la ſimilitudine de' triangoli ABC, CFE dà l' analogia

$CE:EF::CB:BA$, cioè ſatta $AB=a$, riſulta $\frac{2h}{r}:1::r:a$; dal che ſi raccoglie $h=\frac{r^2}{2a}$. Il che ecc.

30. Coroll. I. Il tempo periodico impiegato dal grave a deſcrivere il cerchio, e del filo a traſcorrere il cono è $=\frac{2r\pi}{\sqrt{2h}}$, ed eſſendoſi trovato $h=\frac{r^2}{2a}$, appare un tal tempo $=2\pi\sqrt{a}$; il che moſtra, che i coni di egual altezza ſono tutti deſcritti nel medeſimo tempo; e che ad altezze diſuguali i quadrati de' tempi periodici ſono come queſte altezze.

31. Coroll. II. Se la forza centriſuga di queſto movimento è uguale alla gravità, il filo fa un angolo ſemiretto colla verticale, e *viceverſa*: imperciocchè ſuppoſto $\frac{2h}{r}=1$, naſce $r=a$, e ſuppoſto $r=a$, naſce $\frac{2h}{r}=1$.

32. Coroll. III. Chiamato ϕ l'angolo CAB, ed l la lunghezza AC del filo, ſi ritrova $a=l\cos.\phi$, e perciò $t=2\pi\sqrt{a}=2\pi\sqrt{l\cos.\phi}$, cioè ne' coni, che hanno lo ſteſſo angolo alla punta, i quadrati de' tempi periodici ſono come le lunghezze de' fili, e generalmente come le lunghezze de' fili e i coſeni degli angoli in punta, ovvero come le lunghezze de' fili, e i ſeni delle loro obliquità all' orizzonte.

33. Coroll. IV. Queſto tempo periodico pel cono ſta al tempo della libera caduta d' un grave dalla doppia altezza del cono come la circonferenza del cerchio al diametro; perchè il tempo di tal caduta per la dottrina del moto equabilmente accelerato ſi fa eſſere $=\sqrt{4a}=2\sqrt{a}$, e il tempo periodico ſi è trovato $=2\pi\sqrt{a}$.

34. Coroll. V. Se il cono è acutiſſimo per modo che ſia a un dipreſſo $a=l$, e $\phi=0$, il tempo, in cui viene deſcritto, diventando $2\pi\sqrt{l}$, uguaglia il tempo, in cui reſta deſcritto un cerchio, il di cui raggio ſia la lunghezza del filo, e dove la forza centriſuga (§. 17.) ſia uguale alla gravità.

35. Coroll. VI. Se il tempo periodico del filo per un cono

uguaglia il tempo della libera caduta d' un grave da un' altezza uguale alla lunghezza del filo, il ſeno dell' obliquità del filo all'orizzonte ſta al ſeno tutto come il quadrato inſcritto in un cerchio ſta al quadrato della circonferenza, e *viceverſa*. Imperciocchè quel tempo periodico $= 2\pi\sqrt{l\,\text{coſ.}\phi}$, e quello della caduta $= \sqrt{2l}$; onde dovendo eſſere $\sqrt{2l} = 2\pi\sqrt{l\,\text{coſ.}\,\phi}$, cioè $1 = 2\pi^2\,\text{coſ.}\,\phi$, naſce la proporzione $\text{coſ.}\,\phi : 1 :: \frac{1}{2} : \pi^2$, oſſia la propoſta.

PROBLEMA VI. (*fig.* I.)

36. *Muovaſi un corpo non libero nella linea* RMA *da* R *verſo* A, *e venga continuamente ſollecitato da una forza in direzione parallela all' aſſe* CA. *Si domanda la preſſione, che il corpo eſercita in ciaſcun luogo* M *della curva*

SOLUZIONE.

Si ſupponga, che il corpo abbia deſcritto l' arco *RM*, e ſi chiami *p* la forza, che lo ſollecita ſecondo *MP* parallela all' aſſe. Riſoluta queſta nella *forza tangenziale* ſecondo la tangente *MQ*, e nella *forza normale* ſecondo la perpendicolare *MO* alla curva, naſce la forza tangenziale $= \frac{MQ}{MP}p$, e la *normale* $= \frac{MO}{MP}p$; e ſe ſi fa $AH = x$, $HM = y$, $AM = s$, è facile il conoſcere, che $\frac{MQ}{MP} = \frac{-dx}{-ds} = \frac{dx}{ds}$; ed $\frac{MO}{MP} = \frac{-dy}{-ds} = \frac{dy}{ds}$: laonde la forza tangenziale $= \frac{pdx}{ds}$, e la forza normale $= \frac{pdy}{ds}$. La prima di queſte non ha alcuna parte nel premere il corpo contro la curva, la ſeconda all' oppoſto è tutta impiegata in produrre queſto effetto. Vi ha inoltre una forza riſultante dal moto curvilineo, la quale è parimente tutta rivolta a premere il corpo perpendicolarmente contro la curva; perchè eſſendo l' archetto *Mm* della curva lo ſteſſo che

che quello del ſuo circolo oſculatore in M, ſarà anche una tal forza del corpo nel punto M della curva la ſteſſa che la centrifuga nel circolo oſculatore percorſo colla velocità in M acquiſtata, e però agirà in direzione di MO, o del raggio oſculatore perpendicolare ad Mm. Il perchè chiamata h l' altezza dovuta alla velocità in M, r il raggio oſculatore, ſi ottiene queſta forza, ovvero la preſſione contro $Mm = \frac{2h}{r}$. Dunque la preſſione totale del corpo contro un luogo indeterminato M della curva è $= \frac{pdy}{ds} + \frac{2h}{r} = \frac{pdy}{ds}$

$$+ \frac{2h}{ds^3 : dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$ per eſſere, come ſi ſa, il raggio r dell' evoluta $= \frac{ds^3}{dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. Se dunque la forza ſollecitante p, e l' altezza h dovuta alla velocità in M ſono quantità note, o anche date per le coordinate x, y, l' equazione della curva ſomminiſtrerà il vero valore della preſſione, che ſi cerca. Il che ecc.

37. COROLL. I. Per ritrovare la velocità del corpo in qualunque punto M della curva baſta moltiplicare la forza tangenziale $\frac{pdx}{ds}$ per l' archetto $-ds$, ed ottienſi, come è noto, $dh = -pdx$, $h = -\int pdx +$ coſt., e ſuppoſto, che il corpo parta da R colla velocità dovuta ad un' altezza nota a, e preſo l' integrale $\int pdx$ per modo che ſvaniſca allorchè $x = AB = b$, proviene $h = a - \int pdx$.

38. COROLL. II. Si ritrova il tempo t impiegato a ſcorrere l' arco indefinito RM colla nota formola $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2h}}$

$=\frac{-ds}{\sqrt{2(a-\int pdx)}}$, la quale dà $t=\int\frac{-ds}{\sqrt{(2a-2\int pdx)}}$, prendendo queſt' integrale in modo che ſi annulli allorchè $s=AMR$, ovvero $x=a$.

39. Coroll. III. Se un corpo viene lanciato da B in direzione di BA con una velocità dovuta alla predetta altezza a, ed agiſce in eſſo la ſteſſa forza ſollecitante p comunque variabile in direzione parimente di BA, e ſi chiama h' l' altezza dovuta alla velocità in H, naſce anche in queſto caſo $dh'=-pdx$, ed $h'=a-\int pdx=h$. In conſeguenza acquiſta egli la ſteſſa velocità così diſcendendo per l' altezza rettilinea BH, come per la via comunque curvilinea RM; e lo ſteſſo accade quand' anche il corpo incominci a moverſi dalla quiete, cioè ſenza velocità impreſſa.

40. Coroll. IV. Se il corpo con una data velocità dovuta all' altezza a incomincia a moverſi da A verſo M ſulla linea obbligata AM, ed intanto agiſce in eſſo continuamente la forza p in direzione parallela all' aſſe dal baſſo all' alto, ſiccome in queſto caſo la forza tangenziale tende a ſminuire la velocità del corpo, ſi ritrova $pdx=-dh$, ed $h=a-\int pdx$, prendendo però l' integrale $\int pdx$ in modo che ſi annulli con x. Perchè poi trovaſi queſta ſteſſa formola anche pel corpo lanciato da A lungo l' aſſe AC colla ſteſſa velocità, ed animato dalla ſteſſa forza p in direzione oppoſta al ſuo moto; quindi ne viene, che o il corpo aſcenda per la via rettilinea AM, o per la curvilinea di qualunque forma AM, ad eguali elevazioni in H, ed M ſi trova aver perdute uguali velocità; coſicchè nell' integrale $\int pdx$ ſe ſi prende x di tal grandezza AB, che il detto integrale diventi $=a$, ſi eſtingue tutta la velocità del corpo ſia che s' inalzi direttamente per AB, ſia che aſcenda ad uguale elevazione per l' arco comunque formato AR. Giunto poi in B oppure in R diſcende dalla quiete per BA, ovvero per RMA per l' azione continua della forza p ſollecitante dall' alto al baſſo, ed acquiſta in A nell' un caſo e nell' altro la medeſima velocità.

PROBLEMA VII. (*fig.* III.)

41. *Dall' eſtremità* G *d' un filo fermato in* C *pende un grave, e ſollevandoſi il filo diſteſo nella ſituazione orizzontale* CA *ſi abbandona a ſe ſteſſo ſicchè il corpo incominci a deſcrivere l' arco* AE *del cerchio verticale* AGBF. *Si fa la ricerca quanto ſia premuto dal grave qualunque punto* E *della circonferenza del cerchio, ovvero quanto ſia teſo il filo in qualunque ſituazione.*

SOLUZIONE.

Nominate al ſolito x, y le coordinate GQ, QE, ed r il ſemidiametro, ſi ha pel cerchio l' equazione $y^2 = 2rx - x^2$, $ydy = (r-x)dx$, $y^2dy^2 = (r-x)^2dx^2$, $\frac{(2rx-x^2)dy^2}{(r-x)^2} = dx^2$, $ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{r^2dy^2}{(r-x)^2}$, $ds = \frac{rdy}{r-x}$. Ora, quando il grave è diſceſo per AE, ha acquiſtato in E una velocità dovuta all' altezza $CQ = r - x$ (§. 39.). Dunque fatte queſte ſoſtituzioni nella formola della preſſione $\frac{pdy}{ds} + \frac{2h}{r}$, e poſto $p = 1$, perchè la forza ſollecitante in queſt' ipoteſi è la gravità, ſi ottiene la cercata preſſione in $E = \frac{r-x}{r} + \frac{2r-2x}{r} = \frac{3r-3x}{r}$, cioè uguale a tre volte l' altezza CQ dell' arco deſcritto. Il che era ecc.

42. COROLL. I. Nel punto infimo G, dove $x = 0$, la preſſione uguaglia tre volte la gravità; e moltiplicando per la maſſa del corpo, riſulta la preſſione *motrice* (che è la preſſione propriamente detta), e quindi la tenſione del filo tre volte maggiore del peſo del corpo.

43. COROLL. II. Rimoſſo il filo dalla direzione verticale, e portato nella ſituazione obliqua CI, e qui abbandonato, la preſſione in qualunque punto E proviene

$= \frac{r-x}{r} + \frac{2a-2x}{r} = \frac{r+2a-3x}{r}$, chiamando a l'altezza GN del corpo ſopra il punto infimo, ed avuto riguardo alla velocità acquiſtata dal corpo in E, la quale è dovuta all' altezza $NQ = a - x$ della diſceſa (§. 39.). La preſſione poi nel punto infimo G naſce $= \frac{r+2a}{r}$.

44. Coroll. III. Se l' arco GI è di 60°, la preſſione in G, ovvero la tenſione del filo fa due volte il peſo del corpo, giacchè in queſto caſo $a = \frac{1}{2} r$, onde $\frac{r+2a}{r} = 2$

PROBLEMA VIII.

45. *Se un grave pendente da un filo fermato in* C *viene obbligato a percorrere il cerchio verticale* AGBF *; ſi domanda quanto ſia teſo il filo da queſto corpo allorchè paſſa pel punto infimo* G.

SOLUZIONE.

Se il corpo trovandoſi in A, quando il filo è tenuto nella ſituazione orizzontale CA, caſca dalla quiete e deſcrive il quadrante AG, acquiſta in G la velocità dovuta all' altezza del ſemidiametro CG (§. 39.), velocità che interamente ſi eſtingue con portarſi che fa il corpo ad uguale altezza in B per l' altro quadrante GB. E' dunque meſtieri al corpo in quiete nel punto A dare un tal urto in direzione della tangente, che lo obblighi a ſalire da G fino al punto ſupremo F, e a tender quivi il filo con una forza per lo meno eguale al ſuo peſo: dico *per lo meno*, poichè una forza maggiore del peſo del corpo non produrrebbe qui alcun inconveniente ſe non forſe quello di allungare il filo, al che rimedia l' ipoteſi del filo *ineſtenſibile*, ma una forza minore del peſo non impedirebbe il corpo di caſcare per FC ſenza poter continuare a percorrere tutto il cerchio. Laonde chiamata h l' altezza dovuta alla velocità del corpo nel più alto punto F, debb' eſſere la tenſione del filo, o la forza centrifuga $\frac{2h}{r}$ per lo meno $= 1$, e quindi $h = \frac{1}{2}r$. Ma il corpo nel ſalire per la ſemicirconferenza *GBF* perde (§. 40.) tanta velocità quanta è quella che è dovuta all' altezza $GF = 2r$: dunque ritenendo in F ancora la velocità dovuta per lo meno all' altezza $\frac{1}{2}r$, dee avere in G la velocità per lo meno dovuta all' altezza $\frac{5}{2}r$. Conſeguentemente la forza centrifuga del corpo in G ſarà per lo meno $= \frac{5r}{r} = 5$, cioè cinque volte la gravità, o a meglio dire denominata m la maſſa del corpo, la forza centrifuga riuſcirà $= \frac{5rm}{r} = 5m$, vale a dire a cinque volte il ſuo peſo. E ſiccome nel punto infimo G il filo vien teſo non ſolo dalla forza centrifuga, ma ancora da tutto il peſo del corpo pendente, proviene perciò la tenſione in G almeno ſei volte maggiore del peſo del corpo. Il che ecc.

46. COROLL. I. Per trovare (in queſt' ipoteſi che la tenſione del filo in G ſia ſei volte il peſo del corpo) la tenſione di eſſo in qualunque punto E de' due quadranti inferiori *AEG*, *GSB*, ſi ricorre alla formola $\frac{pdy}{ds} + \frac{2h}{r}$, e ſi oſſerva, che in queſto caſo la velocità impreſſa al corpo in A colla percoſſa è dovuta all' altezza $\frac{3}{2}r$, e conſeguentemente in E è dovuta all' altezza $\frac{3}{2}r + CQ = \frac{5}{2}r - x$; dal che ſi raccoglie $h = \frac{5}{2}r - x$; e già ſi è trovato $\frac{pdy}{ds} = \frac{r - x}{r}$. Perlochè la tenſione del filo in E $\frac{pdy}{ds} + \frac{2h}{r} = \frac{r - x}{r} + \frac{5r - 2x}{r}$ $= \frac{6r - 3x}{r}$.

47 COROLL. II. Per determinare poi la tenſione del filo in qualſivoglia punto de' due quadranti ſuperiori *AVF*, *FHB* convien fare attenzione, che in queſto caſo la gravità in vece di coſpirare colla forza centrifuga ad accreſcere la tenſione, vi ſi oppone anzi e ne ſminuiſce l' azione; onde per queſta parte il termine $\frac{pdy}{ds}$ dovrebbe ſottrarſi dall' altro $\frac{2h}{r}$: ma ſiccome in queſto ſteſſo caſo la frazione $\frac{dy}{ds}$ è neceſſariamente negativa, perchè quando il corpo aſcende per l' uno o l' altro de' due quadranti creſce la s e ſcema la y, e quando diſcende creſce la y e ſcema la s; quindi naſce che il termine $\frac{pdy}{ds}$ rimane additivo, come lo era nel primo caſo. Sicchè anche pe' due quadranti ſuperiori riſulta la tenſione del filo $= \frac{6r - 3x}{r}$, intendendo per x un' aſciſſa maggiore del ſemidiametro, come è *GL* per riguardo al punto *H*, e *GO* per riſpetto al punto V.

PROBLEMA IX.

48. *Tenuto il filo nella ſituazione orizzontale* CA *ſi cerca nel raggio verticale* CG *un tal punto* Q, *che piantandovi un chiodo e laſciando cadere il corpo liberamente queſto deſcriva intorno a* Q *un intero cerchio colla parte* GQ = QN *del filo, attortigliandoſi (ſenza però accorciarſi) intorno a* Q.

SOLUZIONE.

Giunto il corpo in *G* acquiſta la velocità dovuta all' altezza r, alzandoſi poi ſino in *N* perde tanta velocità quanta è dovuta all' altezza *GN*, cioè $2x$, facendo $GQ = x$. Dunque ritiene in *N* una velocità dovuta all' altezza $r - 2x$, ed ha quivi una forza centrifuga $= \frac{2r - 4x}{x}$. Ora queſta forza dee per lo meno eſſere uguale alla gravità, ſe il corpo ha da ſoſtenerſi in N, e proſeguire il ſuo moto circolare. Perciò ſi ricava $\frac{2r-4x}{x}=1$, e di qui $x=\frac{2}{5}r$. Il che ecc.

PROBLEMA X. (*fig.* I.)

49. *Determinare la curva* RA *ſituata in un piano verticale, la quale da un grave, che diſcende per eſſa e che ha ricevuta una velocità primitivamente impreſſa, ſia premuta ugualmente in tutti i ſuoi punti.*

SOLUZIONE.

Poſta n la maſſa del corpo ſi è dianzi trovato, che la preſſione contro qualunque punto indefinito M è $=\frac{ndy}{ds}+\frac{2nhdx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}$; e ſiccome ſi ſuppone coſtante, e però equivalente al peſo d' una data maſſa m, ſi ha quindi $\frac{m}{n}=\frac{dy}{ds}+\frac{2hdx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}$. Ora eſſendo a l' altezza dovuta alla velocità impreſſa al corpo in R, e BH, cioè $BA-AH$, oſſia $b-x$ l' altezza dovuta alla velocità acquiſtata nella diſceſa per RM, proviene $h=a+b-x$, e conſeguentemente

$$\frac{m}{n}=\frac{dy}{ds}+\frac{2(a+b-x)dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}.$$

Per facilitare l' integrazione di queſta equazione, ſupporremo coſtante la ds, che dà $dds=d\sqrt{dx^2+dy^2}=0$, cioè $ddx=\frac{-dyddy}{dx}$. E poichè

$dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dx^2 \left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = dxddy - dyddx$, fatta la ſoſtituzione del valore di ddx, appariſce $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(dx^2 + dy^2)\,ddy}{dx} = \frac{ds^2 ddy}{dx}$; onde la noſtra equazione diventa $\frac{m}{n} = \frac{dy}{ds} + \frac{2(a+b-x)\,ddy}{dsdx}$, cioè $\frac{m}{n} dsdx = dydx + 2(a+b-x)\,ddy$. Divido queſta equazione per $2(a+b-x)^{\frac{1}{2}}$, ed ottengo $\frac{m}{n} . \frac{1}{2}(a+b-x)^{-\frac{1}{2}} dsdx = \frac{1}{2}(a+b-x)^{-\frac{1}{2}} dydx + (a+b-x)^{\frac{1}{2}} ddy$, il di cui integrale ſi trova ſubito eſſere $\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} ds = (a+b-x)^{\frac{1}{2}} dy + C\,ds$. La coſtante C ſi determina con ſupporre, che l' angolo formato dalla tangente della curva colla verticale nel punto R della partenza del corpo ſia noto, ed $= \phi$: allora eſſendo $\frac{dy}{ds}$

$$= \frac{\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C}{(a+b-x)^{\frac{1}{2}}}$$

, e $\frac{dy}{ds}$ rappreſentando il ſeno d' un tal angolo per un punto indefinito della curva, riſulta pel punto dato R, dove $x = b$, ſen. $\phi = \frac{m}{n} - \frac{C}{\sqrt{a}}$, e conſeguentemente $C = \left(\frac{m}{n} - \text{ſen.}\,\phi\right)\sqrt{a}$. Riguardo ora C come una quantità determinata, e dall' equazione integrata ricavo

$$ds = \frac{(a+b-x)^{\frac{1}{2}} dy}{\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C},$$

cioè

$ds^2 =$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{(a+b-x)\,dy^2}{\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2}$$; e quindi

$$dy^2 = \frac{\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2 dx^2}{a+b-x-\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2}$$, e per ultimo

$$dy = \frac{\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)dx}{\sqrt{a+b-x-\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2}}$$. Per integrare queſt' equazione prendo $u = (a+b-x)^{\frac{1}{2}}$, $u^2 = a+b-x$, $-2udu = dx$, ed ottengo $dy = \frac{-2\left(\frac{m}{n}u - C\right)udu}{\sqrt{\left(u^2 - \frac{m^2}{n^2}u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)}}$,

e poſto $1 - \frac{m^2}{n^2} = K^2$, ne traggo $dy = \frac{2\left(C - \frac{m}{n}u\right)udu}{\sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)}}$.

Piglio inoltre $\sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)} = Ku + z$, e però $\frac{2m}{n}Cu - C^2 = 2Kzu + z^2$, ovvero $u = \frac{C^2 + z^2}{\frac{2m}{n}C - 2Kz}$,

$$du = \frac{2zdz\left(\frac{2m}{n}C - 2Kz\right) + 2Kdz\left(C^2 + z^2\right)}{\left(\frac{2m}{n}C - 2Kz\right)^2}$$

$$= \frac{\left(KC^2 + \frac{2m}{n}Cz - Kz^2\right)dz}{2\left(\frac{m}{n}C - Kz\right)^2},\quad Ku + z = \frac{KC^2 + Kz^2}{\frac{2m}{n}C - 2Kz} + z$$

$$= \frac{KC^2 + \frac{2m}{n}Cz - Kz^2}{\frac{2m}{n}C - 2Kz} = \sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)},$$

$$\frac{du}{\sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)}} = \frac{dz}{\frac{m}{n}C - Kz}.$$ Reſta a trovare $2\left(C - \frac{m}{n}u\right)u$ dato pure per z, e già ſi vede eſſere

$$C - \frac{m}{n}u = C - \frac{\frac{m}{n}C^2 - \frac{m}{n}z^2}{2\left(\frac{m}{n}C - Kz\right)} = \frac{\frac{m}{n}C^2 - 2CKz - \frac{m}{n}z^2}{2\left(\frac{m}{n}C - Kz\right)},$$ e quindi

$$2\left(C - \frac{m}{n}u\right)u = \frac{(C^2 + z^2)\left(\frac{m}{n}C^2 - 2CKz - \frac{m}{n}z^2\right)}{2\left(\frac{m}{n}C - Kz\right)^2},$$ e finalmente

$$\frac{2\left(C - \frac{m}{n}u\right)udu}{\sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)}}$$

$$= \frac{(C^2 + z^2)\left(\frac{m}{n}C^2 - 2CKz - \frac{m}{n}z^2\right)dz}{2\left(\frac{m}{n}C - Kz\right)^3}$$

$$=\frac{\left(\frac{m}{n}C^4-2C^3Kz-2CKz^3-\frac{m}{n}z^4\right)dz}{2\left(\frac{m}{n}C-Kz\right)^3}$$. Si faccia

$\frac{m}{n}C-Kz=t$, $z=\frac{\frac{m}{n}C-t}{K}$, $dz=-\frac{dt}{K}$. Laonde la precedente eſpreſſione ſi trasforma in

$$\frac{-\left(\frac{m}{n}C^4-2C^3\left(\frac{m}{n}C-t\right)-\frac{2C}{K^2}\left(\frac{m}{n}C-t\right)^3-\frac{1}{K^4}\left(\frac{m}{n}C-t\right)^4\right)\frac{dt}{K}}{2t^3}=$$

$$\left(\frac{m}{n}C^4-2C^3t+\frac{2m^3C^4}{n^3K^2}-\frac{6m^2C^3t}{n^2K^2}+\frac{6mC^2t^2}{nK^2}-\frac{2Ct^3}{K^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{K^4}\left(\frac{m^4}{n^4}C^4-\frac{4m^3}{n^3}C^3t+\frac{6m^2}{n^2}C^2t^2-\frac{4m}{n}Ct^3+t^4\right)\right)\frac{dt}{2Kt^3},$$

la quale è integrabile parte algebraicamente, parte per la quadratura dell' iperbola. Dunque ecc. Il che ecc.

50. COROLL. I. Se ſi vuole, che la preſſione coſtante ſia uguale al peſo iſteſſo del corpo, cioè $n=m$ ſi ha $dy=\frac{(2Cu-2u^2)\,du}{\sqrt{(2Cu-C^2)}}$. Perciò poſto $\sqrt{(2Cu-C^2)}=p$, cioè $2Cu-C^2=p^2$, $Cdu=pdp$, $u=\frac{p^2+C^2}{2C}$, $2Cu-2u^2=p^2+C^2-\frac{(p^2+C^2)^2}{2C^2}=\frac{C^4-p^4}{2C^2}$, $\frac{(2Cu-2u^2)du}{\sqrt{(2Cu-C^2)}}=\frac{(C^4-p^4)dp}{2C^3}$.

Laonde l' integrale ſarà $y=\frac{1}{2}Cp-\frac{p^5}{10C^3}+\text{coſt.}$

$$=\frac{1}{2}C\sqrt{(2Cu-C^2)}-\frac{(2Cu-C^2)^2\sqrt{(2Cu-C^2)}}{10C^3}+\text{coſt.}$$

$$=\frac{1}{2}C\sqrt{(2Cu-C^2)}-\frac{(2u-C)^2\sqrt{(2Cu-C^2)}}{10C}+\text{coſt.}$$

$= \frac{(2C^2 + 2Cu - 2u^2)\sqrt{(2Cu - C^2)}}{5C} + \text{coſt.} = \left(2C^2 + 2C(a + b - x)^{\frac{1}{2}} - 2a - 2b + 2x\right)\sqrt{\left(2C(a + b - x)^{\frac{1}{2}} - C^2\right)} + \text{coſt.}$ Sicchè annullandoſi inſieme y ed x, proviene coſt. $= \left(2a + 2b - 2C^2 - 2C(a + b)^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\left(2C(a + b)^{\frac{1}{2}} - C^2\right)}$. Dunque finalmente $y = \left(2a + 2b - 2C^2 - 2C(a + b)^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\left(2C(a + b)^{\frac{1}{2}} - C^2\right)} + \left(2C^2 + 2C(a + b - x)^{\frac{1}{2}} - 2a - 2b + 2x\right)\sqrt{\left(2C(a + b - x)^{\frac{1}{2}} - C^2\right)}$.

51. COROLL. II. Qualora vogliaſi, che la preſſione non ſia coſtante, ma variabile ſecondo una data legge, la quantità $\frac{m}{n}$ ſarebbe variabile, e ſarebbe nota la legge della ſua variazione. Se per eſempio ſi ſuppone, che la preſſione ſia in ogni punto proporzionale alla velocità del corpo, $\frac{m}{n}$ diviene proporzionale a $\sqrt{(a + b - x)}$; onde preſa una quantità nota λ naſce $\frac{m}{n} = \lambda(a + b - x)^{\frac{1}{2}}$. Perlochè

$dy = \frac{(\lambda(a + b - x) - C)\,dx}{\sqrt{(a + b - x - (\lambda(a + b - x) - C)^2)}}$; e poſto $a + b - x = u$, ſi trova $dy = \frac{(C - \lambda u)\,du}{\sqrt{(u^2 - \lambda^2 u^2 + 2C\lambda u - C^2)}}$. Per integrare queſta equazione biſogna renderla razionale, ed a queſt'effetto cerco prima i diviſori della quantità radicale, ſupponendo $u - \lambda^2 u^2 + 2C\lambda u - C^2 = 0$, cioè $u^2 - \frac{(2C\lambda + 1)}{\lambda^2}u + \frac{C^2}{\lambda^2} = 0$, donde ſi trae $u = \frac{2C\lambda + 1 \pm \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda^2}$. Laonde ſi ha

$\left(u - \frac{2C\lambda - 1 - \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda}\right)\left(u - \frac{2C\lambda - 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda^2}\right) = u^2 - \frac{(2C\lambda + 1)}{\lambda^2}u + \frac{C^2}{\lambda^2}$; e moltiplicando per λ^2, e mutando i ſegni appariſce $-\lambda^2 u^2 + 2C\lambda u + u - C^2 =$

$$\left(-\lambda u + \frac{2C\lambda + 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda}\right)\left(\lambda u - \frac{2C\lambda - 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda}\right).$$

Prendo per brevità $\frac{2C\lambda + 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda} = f$, e parimente $\frac{-2C\lambda - 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda} = g$; ciò fatto la noſtra equazione da integrarſi ſi cangia in $dy = \frac{(C - \lambda u)\,du}{\sqrt{(u - \lambda^2 u^2 + 2C\lambda u - C^2)}}$ $= \frac{(C - \lambda u)\,du}{\sqrt{(\overline{f - \lambda u} \times \overline{g + \lambda u})}}$. Aſſumo ora $\sqrt{(\overline{f - \lambda u} \times \overline{g + \lambda u})}$ $= (f - \lambda u)z$; ond' è $g + \lambda u = (f - \lambda u)z^2$, $\lambda u + \lambda u z^2$ $= fz^2 - g$, $u = \frac{fz^2 - g}{\lambda + \lambda z^2}$, $du = \frac{2f(\lambda + \lambda z^2)zdz - 2\lambda(fz^2 - g)zdz}{(\lambda + \lambda z^2)^2}$ $= \frac{2\lambda(f + g)zdz}{(\lambda + \lambda z^2)^2}$. Parimente ſi trova $(f - \lambda u)z$ $= \left(f + \frac{\lambda g - \lambda f z^2}{\lambda + \lambda z^2}\right)z = \frac{(f + g)z}{1 + z^2}$, $C - \lambda u = C + \frac{g - fz^2}{1 + z^2}$ $= \frac{C + g + (C - f)z^2}{1 + z^2}$, $(C - \lambda u)\,du$ $= \frac{2(C + g)(f + g)zdz + 2(C - f)(f + g)z^3dz}{\lambda(1 + z^2)^3}$. Dunque $dy = \frac{2(C + g)dz + 2(C - f)z^2dz}{\lambda(1 + z^2)^2} = \frac{2(C + g)}{\lambda} \times \frac{dz}{(1 + z^2)^2}$ $+ \frac{2(C - f)}{\lambda} \times \frac{z^2dz}{(1 + z^2)^2}$. Riduco prima ad integrazione il primo termine di queſto ſecondo membro ricorrendo al noto Teorema del Calcolo Integrale, che $\int \frac{dt}{(a + bt^2)^n}$ $= \frac{t}{(2n - 2)a(a + bt^2)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{(2n - 2)a}\int \frac{dt}{(a + bt^2)^{n-1}}$; onde fatto il confronto con $\int \frac{dz}{(1 + z^2)^2}$, ſi trova queſto

$$= \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\,\text{arc. tang. } z\,.$$

Parimente paragonando l' altro termine $\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2}$ col noto canone del Calcolo Integrale $\int \frac{t^p dt}{(a+bt^m)^q} =$

$$\frac{-t^{p-m+1}}{m(q-1)b(a+bt^m)^{q-1}} + \frac{(p-m+1)}{(q-1)mb}\int \frac{t^{p-m}dt}{(a+bt^m)^{q-1}}$$

ottengo $\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2} = \frac{-z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} =$

$- \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\,\text{arc. tang. } z$. Dunque risulta $y = \frac{(C+g)z}{\lambda(1+z^2)}$

$$+ \frac{C+g}{\lambda} \times \text{arc. tang. } z + \frac{(f-C)z}{\lambda(1+z^2)} + \frac{C-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } z + \text{coſt.}$$

$$= \frac{(g+f)z}{\lambda(1+z^2)} + \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } z + \text{coſt.}$$

$$= \frac{(g+f)\sqrt{\left(\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}\right)}}{\lambda\left(1+\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}\right)} + \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}} + \text{coſt.}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(\overline{g+\lambda u} \times \overline{f-\lambda u}\right)} + \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}} + \text{coſt.}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(a+b-x-(\lambda \times \overline{a+b-x}-C)^2\right)}$$

$$+ \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda(a+b-x)}{f-\lambda(a+b-x)}} + \text{coſt.}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(a+b-x-(\lambda \times \overline{a+b-x}-C)^2\right)}$$

$$- \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(a+b-(\lambda \times \overline{a+b}-C)^2\right)}$$

$$+ \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda(a+b-x)}{f-\lambda(a+b-x)}}$$

$$-\frac{2C+g-f}{\lambda}\,\text{arc. tang.}\sqrt{\left(\frac{g+\lambda\times\overline{a+b}}{f-\lambda\times\overline{a+b}}\right)}.$$

52. COROLL. III. Se ſi vuole, che la legge della variazione della preſſione ſia di eſſere in ragione inverſa della velocità del corpo, allora $\frac{m}{n}$ ſi cangia in $\frac{\lambda}{\sqrt{(a+b-x)}}$, e conſeguentemente ſi ha $dy = \frac{(\lambda - C)\,dx}{\sqrt{(a+b-x-(\lambda-C)^2)}}$, ed integrando $y = 2(C-\lambda)\sqrt{a+b-x-(\lambda-C)^2} - 2(C-\lambda)\sqrt{a+b-(\lambda-C)^2}$.

PROBLEMA XI (*fig.* IV)

53. *Se per la conveſſità della curva* AMB *ſcavata in foggia di canale, ed avente il ſuo aſſe in ſituazione verticale, diſcende un grave partendo da qualunque punto della curva, ſi domanda quel punto, dove il corpo abbandona la curva, e ſi diſtacca dal canale.*

SOLUZIONE.

La gravità $= 1$, che tiene il corpo attaccato alla curva, agiſce con uno ſforzo $= \frac{dy}{ds}$ (§. 36) chiamando y la *NM*, x la *AN*, s l' arco *AM*, e con queſto ſforzo il corpo preme il canale. Ma ad un tale ſforzo direttamente ſi oppone quello della forza centrifuga, che ſpinge il corpo lungi dalla curva in direzione ad eſſa perpendicolare, e che ſi è trovato $= \frac{2h}{r}$, preſo r pel raggio del circolo oſculatore della curva in quel punto, dove il corpo ſi trova, ed h per l' altezza dovuta alla velocità del corpo in quel punto. Quando adunque ſarà $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$, ovvero $\frac{dy}{ds} - \frac{2h}{r} = 0$, allora il grave abbandonerà la curva, e ſi diſtaccherà dal canale deſcrivendo, come è manifeſto, una parabola conica in virtù dell' impeto acquiſtato nel punto del diſtacco, e delle ſollicitazioni coſtanti della gravità. Pertanto l' equazione della curva applicata alla formola $\frac{dy}{ds} - \frac{2b}{r} = 0$ farà conoſcere l' aſciſſa, o l' ordinata corriſpondente al punto del diſtacco, che ſi cerca. Il che ecc.

54. Coroll. I. Se *AMB* è un arco di cerchio col raggio r, e parte il corpo dalla quiete dal punto più alto *A*, già ſi ſa eſſere $\frac{dy}{ds} = \frac{r - x}{r}$, $2b = 2x$; conſeguentemente $\frac{r - x}{r} - \frac{2x}{r} = 0$, $x = \frac{1}{3}r$. Il che moſtra, che il punto del diſtacco corriſponde ad un' aſciſſa che è la terza parte del raggio, e però è l' eſtremità dell' arco di 48°. 12′ all' incirca.

55. Coroll. II. Se il corpo ſi muove dalla quiete dal punto *M*, e ſia $AN = a$, $AG = x$, $GF = y$, diventa $\frac{dy}{ds} = \frac{r - x}{r}$, $2b = 2NG = 2x - 2a$; onde $\frac{r - x}{r} + \frac{2a - 2x}{r} = 0$, e quindi $x = \frac{r + 2a}{3}$, o piuttoſto $x - a = NG = \frac{r - a}{3} = \frac{1}{3}NC$ eſſendo *C* il centro. Dal che ſi vede, che il punto del diſtacco è l' eſtremo dell' arco che ha per altezza la terza parte del coſeno dell' arco *AM*, dal cui termine comincia il moto.

56. Coroll. III. Di qui appariſce la bella proprietà meccanica del cerchio verticalmente eretto, che ſe per la ſua conveſſità ſcavata in canale nella ſemicirconferenza ſuperiore al diametro orizzontale diſcende un grave partendo dalla quiete da qualunque punto del canale, queſto ſi diſtacca dal canale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza è ſempre il terzo dell' altezza di detto arco continuato fino al diametro orizzontale.

57. Coroll. IV. Nella parabola conica col parametro $= 2p$ dalla ſua equazione $y^2 = 2px$ ſi inferiſce $ydy = pdx$,

$$dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{p^2},\ ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{(p^2 + y^2)\,dy^2}{p^2},$$

$ds =$

$ds = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} dy}{p}$; ond' è $\frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + y^2)}} = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + 2px)}}$. Si ſa inoltre, che il raggio oſculatore di tutte le ſezioni coniche è uguale al cubo della normale diviſo pel quadrato del ſemiparametro, cioè $= \frac{N^3}{p^2}$; e ſiccome nella parabola $N = \sqrt{(y^2 + p^2)} = \sqrt{(p^2 + 2ex)}$, e però il raggio oſculatore $= \frac{p + 2x}{p} \sqrt{(p^2 + 2px)}$; quindi viene, che ſuppoſto il grave partito dal vertice della parabola l' eſpreſſione $\frac{2b}{r}$ ſi cangia in $\frac{2px}{(p + 2x)\sqrt{(p^2 + 2px)}}$, e queſta uguagliata a $\frac{p}{\sqrt{(p^2 + 2px)}}$ ſomminiſtra l' ugualtà $\frac{2x}{p + 2x} = 1$, cioè $p = 0$, che è viſibilmente aſſurdo. Dunque il grave diſcende per la conveſſità del canale parabolico ſenza mai diſtaccarſene, allorquando la diſceſa incomincia dal vertice. Altro aſſurdo parimente s' incontra quand' anche il grave incominci a diſcendere da un punto qualunque inferiore; e però dovunque incominci il ſuo moto, il corpo non abbandona mai il canale.

58. COROLL. V. Nell' elliſſe conica coll' aſſe $= 2a$, col parametro $= 2p$ ſi ha l' equazione $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$; ond' è $ydy = \frac{(pa - px)\, dx}{a}$, $dx^2 = \frac{a^2 y^2 dy^2}{(pa - px)^2} = \frac{(2a^2 px - pax^2)\, dy^2}{(pa - px)^2}$, $ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{(p^2 a^2 - 2ap^2 x + 2a^2 px + p^2 x^2 - pax^2)\, dy^2}{(pa - px)^2}$, $ds = \frac{dy \sqrt{(p^2 a^2 - 2ap^2 x + 2a^2 px + p^2 x^2 - apx^2)}}{pa - px}$: conſeguentemente $\frac{dy}{ds} = \frac{pa - px}{\sqrt{(p^2 a^2 - 2ap^2 x + 2a^2 px + p^2 x^2 - apx^2)}}$. Siccome poi la normale $N = \frac{yds}{dx} = \frac{(pa - px)\, ds}{ady}$, ſe ne raccoglie il

raggio oſculatore $r = \frac{N^3}{p^2} = \frac{(p^2a^2 - 2ap^2x + 2a^2px + p^2x^2 - apx^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3p^2}$. Dunque ſe il corpo incomincia a muoverſi dal vertice dell' elliſſe, ſicchè ſia $b = x$, naſcerà

$$\frac{2b}{r} = \frac{2a^3p^2x}{(p^2a^2 - 2ap^2x + 2a^2px + p^2x^2 - apx^2)^{\frac{1}{2}}},$$ la qual eſpreſſione uguagliata al valore di $\frac{dy}{ds}$ ſomminiſtra l'equazione $2a^3x = (a - x)(pa^2 - 2apx + 2a^2x + px^2 - ax^2)$, che ſi riduce alla cubica di queſta forma $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2p}{a-p}x + \frac{pa^3}{a-p} = 0$. La radice di queſt' equazione reperibile co' noti metodi rappreſenta l' altezza dell' arco ellittico, deſcritto il quale, il corpo abbandona il canale. La ſteſſa equazione cubica ſi ritrova anche quando l' aſſe verticale dell' elliſſe è il minore, e il corpo parte dal vertice di queſt' aſſe, col ſolo divario, che in queſto caſo, a indica il ſemiaſſe minore, p il ſemiparametro di queſt' aſſe, x l' aſciſſa del medeſimo.

59. Coroll. VI. Per l' iperbola conica con un procedere affatto ſimile al precedente s' incontra l' equazione cubica $x^3 + 3ax^2 + \frac{3a^2px}{p+a} + \frac{pa^3}{p+a} = 0$, la di cui radice x ſarà l' aſciſſa dell' arco iperbolico, deſcritto il quale il corpo, che incomincia a diſcendere dal vertice, ſi diſtacca dalla conveſſità del canale iperbolico. Ma qui un tal diſtacco non può mai aver luogo, come pure avviene nella parabola; avvegnachè eſſendo poſitivi tutti i termini della predetta equazione il valor reale di x non può eſſere che negativo; il che, nell' ipoteſi in cui ſiamo, è un aſſurdo. Dunque il grave, che diſcende per la conveſſità d' un canale iperbolico, reſta ſempre unito al canale anche protratto in infinito ſenza ſcoſtarſene mai. Non è meſtieri di far vedere, eſſendo troppo facile, che ciò accade anche quando il corpo comincia a diſcendere da qualunque punto più baſſo del vertice.

60. Coroll. VII. Sia la cicloide *CAD* (*fig.* V.) la di cui

equazione è $dy = dx\sqrt{\frac{2r-x}{x}}$, preſo r pel ſemidiametro del cerchio generatore $AOBS$. Qui ſi ha $ds^2 = dy^2 + dx^2 = dx^2 + \frac{dx^2(2r-x)}{x} = \frac{2rdx}{x}$, $ds = dx\sqrt{\frac{2r}{x}}$, $\frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{2r-x}{2r}}$. Si ſa di più, che il raggio dell' evoluta della cicloide per qualunque punto indefinito M è il doppio della corda corriſpondente BO del cerchio generatore, cioè $r = 2\sqrt{(2r \times \overline{2r-x})}$. Quindi, eſſendo $h = x$, e però $\frac{2h}{r} = \frac{x}{\sqrt{(2r \times \overline{2r-x})}}$, riſulta pel noſtro intento $\frac{x}{\sqrt{(2r \times \overline{2r-x})}} = \sqrt{\frac{2r-x}{2r}}$, e per fine $x = r$. Dunque il grave, che parte dalla quiete dal vertice della cicloide giù per la ſua conveſſità ſcanalata, ſe ne diſtacca dopo eſſere arrivato al punto, che reſta ſotto il vertice un ſemidiametro del cerchio generatore. Se il grave incomincia a diſcendere da un punto F ſotto il vertice, poſta $AE = a$, il valore di $\frac{2h}{r}$ ſi cangia in $\frac{x-a}{\sqrt{(2r \times \overline{2r-x})}}$, e dall' equazione $\sqrt{\frac{2r-x}{2r}} = \frac{x-a}{\sqrt{(2r \times \overline{2r-x})}}$ ſi raccoglie $2r-x = x-a$, cioè $EN = NB$, $EN = \frac{1}{2}EB$. Dunque, da qualſivoglia punto del canale cicloidale incominci il moto, il grave ſi diſtacca ſempre dopo aver percorſo un arco, la di cui altezza è la metà di quella dello ſteſſo arco continuato ſino alla baſe orizzontale della cicloide.

61. COROLL. VIII. Suppongaſi, che la figura del canale ſia quella d' una parabola qualunque di genere ſuperiore rappreſentata dall' equazione $y^m = x$, eſſendo m un numero intero > 2. In queſt' ipoteſi ſi ha $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2 + m^2y^{2m-2}dy = dy^2\left(1 + m^2x^{(2m-2):m}\right)$; e però

$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1 + m^2 x^{(2m-2):m})}}$. Ora è facile il vedere, che per le parabole ſuperiori il raggio dell' evoluta, ovvero $r = \frac{(1 + m^2 x^{(2m-2):m})^{3:2}}{m(m-1)\,x^{(m-2):m}}$. Sicchè poſta l' altezza dovuta alla velocità, cioè $h = x$ nell'ipoteſi, che il grave parta dal vertice, riſulta $\frac{2h}{r} = \frac{2m(m-1)\,x^{(2m-2):m}}{(1 + m^2 x^{(2m-2):m})^{3:2}}$. Laonde dovendo eſſere nel caſo del diſtacco $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$, ſarà $1 + m^2 x^{(2m-2):m} = 2m(m-1)\,x^{(2m-2):m}$; e perciò $x^{(2m-2):m} = \frac{1}{m(m-2)}$, e finalmente $x = \left(\frac{1}{m(m-2)}\right)^{m:(2m-2)}$. Dunque ne' canali parabolici di grado ſuperiore al ſecondo il grave, che ſi ſpicca dal vertice, e ſi rotola giù pel conveſſo del perimetro parabolico ſi diſtacca allorquando ha ſcorſo un arco, che ha per altezza o aſciſſa la linea $\left(\frac{1}{m(m-2)}\right)^{m:(2m-2)}$; la quale altezza nella parabola di terzo grado è $= \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$, in quella di quarto grado è $= \frac{1}{4}$, in quella di quinto è $= \frac{1}{\sqrt[8]{759375}}$, e così diſcorrendo. Che ſe il grave, in vece di ſpiccarſi dalla ſommità del canale, partirà da un punto più baſſo, ſicchè la diſtanza di queſto punto dalla retta orizzontale, che paſſa per la ſommità, ſia $= a$, allora per determinare il punto del diſtacco converrà riſolvere queſta equazione $x^{(2m-2):m} - \frac{2(m-1)a}{m-2}\,x^{(m-2):m} - \frac{1}{m(m-2)} = 0$, la di cui radice rappreſenta l' altezza dell' arco parabolico, dal quale ſottratto l' arco dell' altezza a reſta quello che il grave traſcorre ſenza ſtaccarſene.

62. COROLL. IX. Se la figura del canale è una delle parabole eſpreſſe dall' equazione $y^m = x^n$ ancora più generale della precedente, facilmente ſi trova

$ds = \frac{dy}{n} \sqrt{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{n}{\sqrt{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})}}$, il raggio d'oſculo $r = \frac{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})^{3:2}}{mn(m-n) x^{(m-2n):m}}$. Suppoſto pertanto, che il grave incominci a rotolare dalla ſommità, ſicchè ſia $b = x$, ſi ha $\frac{2b}{r} = \frac{2mn(m-n) x^{(2m-2n):m}}{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})^{3:2}}$; e conſeguentemente dovendo eſſere pel caſo del diſtacco $\frac{2b}{r} = \frac{dy}{ds}$, riſulta $n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m} = 2m(m-n) x^{(2m-2n):m}$, e quindi per fine $x = \left(\frac{n^2}{m(m-2n)}\right)^{m:(2m-2n)}$, che è l' altezza di quell' arco, finito il quale il corpo, che lo ha percorſo diſcendendo, ſi diſtacca dal canale. Qualora poi il grave incominci il ſuo moto da un altro punto più baſſo del vertice, e ſia a la depreſſione verticale di queſto luogo, ſi ritrova il punto del diſtacco mediante la riſoluzione dell' equazione $x^{(2m-2n):m} - \frac{2(m-n)a}{m-2n} x^{(m-2n):m} - \frac{n^2}{m(m-2n)} = 0$, dalla di cui radice ſottraendo la quantità a ſi ottiene l' altezza dell' arco, al termine del quale giunto che ſia il corpo, queſto abbandona il canale.

63. COROLL. X. Sia *OBS* (*fig.* VI.) la logaritmica ſituata in un piano verticale, col ſuo aſintoto *MN* al di ſopra di eſſa ed orizzontale. Si ſupponga la ſottangente coſtante $= 1$, e la *FB* normale all' aſintoto ed uguale alla ſottangente ſi produca indefinitamente in *P*, e ſi prendano le ordinate ortogonali $BI = x$, $IS = y$. La natura di queſta curva ſomminiſtra l' equazione tranſcendente $1 + x = e^y$, eſſendo e il numero, il di cui logaritmo iperbolico o naturale è l' unità. Da queſta equazione ſi ricava ſubito $dx = e^y dy$, $dx^2 = (1+x)^2 dy^2$, $ds^2 = (1 + (1+x)^2) dy^2$, $ds = dy \sqrt{(1 + (1+x)^2)}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1 + (1+x)^2)}}$. Eſſendo poi $dy = \frac{dx}{1+x}$, e ſuppoſto dx coſtante, avendoſi

$-dxddy = \frac{dx^3}{(1+x)^2}$, ſe nella formola $\frac{ds^3}{-dxddy}$ del raggio oſculatore r ſi ſoſtituiſcono queſti valori, ſi ritrova

$$r = \frac{dy^3(1+x)^2\left(1+(1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dx^3} = \frac{\left(1+(1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1+x}.$$

Sicchè nel ſuppoſto, che il grave incominci a rotolare giù per la conveſſità della curva dal punto B ſino al punto indefinito S, onde ſi abbia $h = BI = x$, ſi ottiene $\frac{2h}{r} = \frac{2x(1+x)}{\left(1+(1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, che pareggiato con $\frac{dy}{ds}$ offre per riſultato $x = \sqrt{2}$. Dunque il corpo che incomincia la ſua diſceſa dal punto B, che chiameremo vertice, abbandona la curva dopo aver percorſo un arco, la di cui altezza è la diagonale del quadrato deſcritto ſopra la ſottangente. Qualora poi il corpo parta da un punto inferiore a B, e la diſtanza d' un tal punto dalla retta orizzontale menata per B ſia $= a$, appariſce $h = x - a$, e ſi preſenta l' equazione $(2x - 2a)(1+x) = 1+(1+x)^2$, cioè $x^2 - 2ax - 2a - 2 = 0$, la quale ſomminiſtra $x - a = \sqrt{(a^2+2a+2)} = \sqrt{\left(1+(a+1)^2\right)}$. Di qui è evidente, che dovunque incominci ſotto il vertice la diſceſa del grave lungo la conveſſità della logaritmica, eſſo ſi ſcoſta dalla curva dopo aver percorſo un arco, che ha per altezza l' ipotenuſa d' un triangolo rettangolo, un cateto del quale è la ſomma di queſta ſottangente e della diſtanza del principio di detto arco dalla orizzontale menata pel vertice.

64. Coroll. XI. Se vuolſi (*fig.* VII.) che il corpo partendo dal vertice A diſcenda lungo la conveſſità ſcanalata della ciſſoide ACO riferita all' aſſe AM parallelo all' aſintoto verticale FN, chiamate al ſolito x, y le coordinate AB, BC, ed a il ſemidiametro AP del cerchio generatore, è manifeſto, che ſi ha l' equazione $x = \frac{y^2}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$, e però

$$dx = \frac{2ydy\sqrt{(2ay-y^2)} - \frac{ay^2dy + y^3dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}}}{2ay - y^2} = \frac{(3a-y)y^2dy}{(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{(3a-y)^2y^4dy^2}{(2ay-y^2)^3} + dy^2 = \frac{(8a^3y^3 - 3a^2y^4)\,dy^2}{(2ay-y^2)^3}$$

$$= \frac{a^2y^3(8a-3y)\,dy^2}{(2ay-y^2)^3},\ ds = \frac{ay^{\frac{3}{2}}(8a-3y)^{\frac{1}{2}}\,dy}{(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$ds^3 = \frac{a^3y^{\frac{9}{2}}(8a-3y)^{\frac{3}{2}}\,dy^3}{(2ay-y^2)^{\frac{9}{2}}}$$. Parimenti eſſendo

$$dy = \frac{(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx}{(3ay^2-y^3)}$$, ſi avrà

$$ddy = \Big\{ dxdy\big((3a-3y)(3ay^2-y^3)\sqrt{(2ay-y^2)}$$

$$-(6ay-3y^2)(2ay-y^2)\sqrt{(2ay-y^2)}\big)\Big\} : (3ay^2-y^3)^2$$

$$= \Big\{ dxdy\big((3a-3y)(3a-y)$$

$$-(6a-3y)(2a-y)\big)\sqrt{(2ay-y^2)}\Big\} : (3a-y)^2y^2$$

$$= -\frac{3dxdya^2\sqrt{(2ay-y^2)}}{(3a-y)^2y^2}$$. Laonde

$$-dxddy = \frac{3dx^2dya^2\sqrt{(2ay-y^2)}}{(3a-y)^2y^2}$$, e ſoſtituendo il valore di dx^2, naſce $-dxddy = \frac{3a^2y^2dy^3}{(2ay-y^2)^{\frac{5}{2}}}$. Pertanto il raggio oſculatore $r = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{ay^{5:2}(8a-3y)^{3:2}}{3(2ay-y^2)^2}$; e poichè il valore di $\frac{dy}{ds}$ dee nella noſtra ipoteſi uguagliare quello di $\frac{2x}{r}$, fatte le opportune ſoſtituzioni in queſt' eſpreſſione ſi ritrova $\frac{(2ay-y^2)^{3:2}}{ay^{3:2}(8a-3y)^{1:2}} = \frac{6(2ay-y^2)^{3:2}}{ay^{1:2}(8a-3y)^{3:2}}$, e quindi $\frac{6y}{8a-3y} = 1$,

cioè in fine $y = \frac{8}{9}a$. Dunque il corpo che partendo dal vertice diſcende per la conveſſità della ciſſoide, ſe ne diſtacca dopo aver traſcorſo un arco, che ha per ordinata otto noni del raggio del cerchio generatore. Qualora poi il corpo parte da un punto inferiore al vertice A, e diſtante dall' orizzontale AF d' una data quantità b, ſe ne inferiſce $\frac{2x - 2b}{r} = \frac{dy}{ds}$, e fatte le debite ſoſtituzioni, ſi ha $\frac{6(2ay - y^2)^{3:2}}{ay^{1:2}(8a - 3y)^{3:2}} - \frac{6b(2ay - y^2)^1}{ay^{5:2}(8a - 3y)^{3:2}} = \frac{(2ay - y^2)^{3:2}}{ay^{3:2}(8a - 3y)^{1:2}}$, cioè $\frac{6y}{8a - 3y} - \frac{6b\sqrt{(2ay - y^2)}}{y(8a - 3y)} = 1$, ovvero $6y^2 - 6b\sqrt{(2ay - y^2)} = 8ay - 3y^2$, dalla quale per ultimo ſi ricava la ſeguente equazione di terzo grado $y^3 - \frac{16a}{9}y^2 + \left(\frac{64a^2 + 36b^2}{81}\right)y - \frac{8ab^2}{9} = 0$. La radice di tale equazione dà il valore dell' ordinata appartenente a quell' arco di ciſſoide, dal quale ſe ſi ſottrae l' arco compreſo fra il vertice e il principio del moto ſi ha l' arco ricercato, al di cui termine giunto che ſia il corpo, abbandona la ciſſoide.

65. COROLL. XII. Per tutte le elliſſi, ed iperbole ſuperiori ſi ha l' equazione generaliſſima $y^{m+n} = fx^m(a \mp x)^n$, dove a rappreſenta l' aſſe traſverſo, f una grandezza coſtante. Queſta equazione ſi riduce all' altra $y = gx^{m:(m+n)}(a \mp x)^{n:(m+n)}$ mettendo g in luogo di $f^{1:(m+n)}$. Quindi ſi avrà

$$dy = \frac{m}{m+n}gx^{-n:(m+n)}dx(a \mp x)^{n:(m+n)}$$

$$\mp \frac{n}{m+n}gx^{m:(m+n)}dx(a \mp x)^{-m:(m+n)} = \frac{mg(a \mp x)^{n:(m+n)}}{(m+n)x^{n:(m+n)}}dx$$

$$\mp \frac{ngx^{m:(m+n)}dx}{(m+n)(a \mp x)^{m:(m+n)}} = \frac{mg(a \mp x)dx \mp ngxdx}{(m+n)x^{n:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}}$$

mgadx

$$= \frac{mgadx \mp (m+n)\,gxdx}{(m+n)x^{n:(m+n)}\,(a \mp x)^{m:(m+n)}},$$

$$dy^2 = \frac{\left(m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)dx^2}{(m+n)^2x^{2n:(m+n)}\,(a \mp x)^{2m:(m+n)}},\ \surd\,(dy^2+dx^2)$$

$$= dx\surd\left(1 + \frac{m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2}{(m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)}}\right)$$

$$= \frac{dx\surd\left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)}{(m+n)x^{n:(m+n)}\,(a \mp x)^{m:(m+n)}}$$

$= ds$. Prendo ora il differenziale di dy, ed ottengo

$$ddy = \Big\{ \mp (m+n)^2gx^{n:(m+n)}\,(a \mp x)^{m:(m+n)}dx^2$$

$$-\left(mga \mp (m+n)gx\right)\Big(nx^{-m:(m+n)}\,(a \mp x)^{m:(m+n)}$$

$$\mp mx^{n:(m+n)}\,(a \mp x)^{-n:(m+n)}\Big)dx^2 \Big\} : \left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)}\right)$$

$$= \Big\{ \mp (m+n)^2gx\,(a \mp x) - \left(mga \mp (m+n)gx\right)\left(n(a \mp x) \mp mx\right) \Big\}\ dx^2 :$$
$$(m+n)^2x^{(2n+m):(m+n)}\,(a \mp x)^{(2m+n):(m+n)}$$

$$= \Big\{ (\mp m^2 \mp 2mn \mp n^2)\,(a \mp x)\,gx$$

$$+ (\pm mgx \pm ngx - mga)\,(na \mp nx \mp mx) \Big\}\ dx^2 :$$
$$(m+n)^2x^{(2n+n):(m+n)}\,(a \mp x)^{(2m+n):(m+n)}$$

$$= \frac{-mnga^2dx^2}{(m+n)^2x^{(2n+m):(m+n)}\,(a \mp x)^{(2m+n):(m+n)}}$$. Sarà dunque, fatte le opportune ſoſtituzioni, il raggio r dell' evoluta, oſſia

$$\frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{\left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)^{3:2}}{mn(m+n)\,ga^2x^{(n-m):(m+n)}\,(a \mp x)^{(m-n):(m+n)}}.$$

Laonde ſuppoſto, che il corpo incominci a diſcendere lungo la conveſſità della curva dalla ſommità, ſicchè ſia $b = x$, l' equazione $\frac{dy}{ds} = \frac{2b}{r}$ dopo le debite ſoſtituzioni ſi convertirà in

$$\frac{mga \mp (m+n)gx}{\sqrt{\left((m+n)^2 x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{2m:(m+n)} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)}}$$

$$= \frac{2mn(m+n)ga^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{(m-n):(m+n)}}{\left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{2m:(m+n)} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)^{3:2}},$$

donde ſi trae $2mn(m+n)a^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{(m-n):(m+n)}$ $= \left(ma \mp (m+n)x\right)\left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{2m:(m+n)}\right.$ $\left. + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)$. La radice di queſt' ultima equazione darà l' altezza dell' arco ellittico, o iperbolico, percorſo il quale, il corpo partito dalla ſommità abbandona le conveſſità della curva, e proſiegue poi liberamente il ſuo moto in una parabola conica ſecondo la nota legge de' projetti.

66. COROLL. XIII. Sia l' iperbola equilatera *FOM* (*fig.* VIII.) fra gli aſintoti ortogonali *AC*, *AB*, de' quali *AC* ſia verticale, *AB* orizzontale; e guidata pel vertice *O* la verticale *ON* parallela all' aſintoto *AC*, ſi piglino in eſſa le aſciſſe *OH* x, e le ordinate normali *HE* y, e ſi ponga il lato della potenza dell' iperbola *OS*, ovvero $SA = 1$. Per la nota proprietà dell' iperbola ſi ha l' equazione $(1+x)(1-y) = 1$; e però $1 - y = \frac{1}{1+x}$, $dy = \frac{dx}{(1+x)^2}$, $dy^2 + dx^2 = ds^2 =$ $\frac{dx^2\left(1+(1+x)^4\right)}{(1+x)^4}$, $ds = \frac{dx}{(1+x)^2}\sqrt{\left(1+(1+x)^4\right)}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+(1+x)^4\right)}}$. Inoltre $ddy = \frac{-2dx^2}{(1+x)^3}$, $-dxddy = \frac{2dx^3}{(1+x)^3}$, $r = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{\left(1+(1+x)^4\right)^{3:2}}{2(1+x)^3}$. Dunque ſuppoſta $h = x$, ſarà $\frac{2h}{r} = \frac{4x(1+x)^3}{\left(1+(1+x)^4\right)^{3:2}}$. Laonde dovendo eſſere $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$ naſce $\frac{1}{\sqrt{\left(1+(1+x)^4\right)}} = \frac{4x(1+x)^3}{\left(1+(1+x)^4\right)^{3:2}}$, cioè $1 + (1+x)^4 = 4x(1+x)^3$, donde ſi trae l' equazione di quarto grado $x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 \ast - \frac{2}{3} = 0$. La radice pertan-

to di queſta equazione darà ciò che ſi cerca, vale a dire l' altezza dell' arco iperbolico, dopo del quale il grave partito dalla ſommità giù per la conveſſità dell' iperbola ſi porta fuori di eſſa, e proſiegue a muoverſi ormai liberamente. Ogni qualvolta il grave in vece di ſpiccarſi dal vertice incomincia a diſcendere da un punto più baſſo diſtante per l' intervallo a dalla orizzontale che paſſa pel vertice, ſi preſenta queſt' altra equazione biquadratica da riſolverſi

$$x^4 + \frac{(8-4a)}{3} x^3 + (2-4a) x^2 - 4ax - \frac{2-4a}{3} = 0,$$ la di cui radice dà l' altezza di quell' arco iperbolico, dal quale togliendoſi il primo arco di altezza a, il reſiduo è appunto quello, al di cui termine giunto che ſia il corpo ſi diſimpegna dalla curva e proſiegue il ſuo cammino con moto libero.

67. COROLL. XIV. Avendo ritrovata nel Coroll. IV la parabola conica dotata della proprietà ſingolare, che il grave non ſi diſtacca mai dalla medeſima nel diſcendere per la ſua conveſſità da qualunque punto incominci il ſuo moto qualora ella ſia ſituata coll' aſſe verticale; naſce ora la curioſità di ſapere coſa ſia per accadere al grave ſcorrente per la detta conveſſità ogni qualvolta la ſituazione della parabola giacente in un piano verticale ſia coll' aſſe orizzontale. Tiriſi adunque nella parabola *ANM* (*fig.* IX) coll' aſſe orizzontale *MO* dal punto dato *A*, da cui il grave incomincia a diſcendere, la verticale *AB*, a cui ſi riferiſcono le coordinate ortogonali *AF*, *FN*, cioè x, y. Si dimoſtra facilmente, che chiamato p il parametro della parabola, b la data *BM*, e λ la $BA = \sqrt{bp}$ ſi ha l' equazione $py = 2\lambda x - x^2$. Quindi

$$dy = \frac{2\lambda dx - 2x dx}{p},\ dy^2 + dx^2 = ds^2 = \left(\frac{4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2}{p^2}\right) dx^2,$$

$$ds = \frac{dx}{p} \sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{2\lambda - 2x}{\sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)}}.$$ Parimente $ddy = -\frac{2dx^2}{p}$;

$-dxddy = \frac{2dx^3}{p}$. Dunque $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$

$= \frac{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$. Fatta pertanto l' ipoteſi, che il grave parta dal punto A, onde ſi abbia $h = x$, l' uguaglianza delle due eſpreſſioni $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$ offre l' equazione

$$\frac{2\lambda - 2x}{\sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)}} = \frac{4p^2 x}{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)^{3:2}},$$

ovvero $(2\lambda - 2x)(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2) = 4p^2 x$, che ſi riduce alla cubica

$$\begin{array}{l} x^3 - 3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{4}\lambda p^2 \end{array} = 0$$

la di cui radice dà l'altezza dell'arco parabolico ricercato, ſicchè il corpo diſcendendo pel conveſſo della curva ſe ne allontana allorchè giugne al termine di tal arco. Qualunque volta il grave parte da un punto più baſſo di A, e diſtante per l' intervallo a dalla retta orizzontale guidata per A ſi trova l' equazione

$$\begin{array}{l} x^3 - 3\lambda z^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}p^2 a \end{array}$$

e la radice di queſta dà l' altezza dell' arco, dal quale ſottratto l' arco di altezza a il reſiduo è appunto il ricercato.

Se nell' ipoteſi della gravità coſtante ſi vuole collocato il corpo ſulla conveſſità della parabola in un punto infinitamente diſtante dal vertice, per modo che la verticale λ condotta da quel punto all' aſſe orizzontale acquiſti un valore infinito, allora ſi ſa manifeſto, che nell' equazione

$$\begin{array}{l} x^3 - 3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{2}{4}\lambda p^2 \end{array} = 0,$$

il valore della radice x non può eſſere che infinito, altrimenti verrebbe l' aſſurdo, che $-\lambda^3 = 0$, ovvero $\lambda = 0$, cioè l' infinito ſarebbe uguale a zero. Eſſendo poi infinito il valore così di λ come di x, ſvaniſcono al confronto degli altri i due termini $\frac{3}{4}p^2x$ $-\frac{1}{4}\lambda p^2$, e reſta $x^3-3\lambda x^2+3\lambda^2x-\lambda^3=0$, che è viſibilmente $(x-\lambda)^3=0$, e quindi $x=\lambda$. Perlochè il corpo, che parte da un punto infinitamente lontano dal vertice nella parabola verticalmente collocata ma coll' aſſe orizzontale, e diſcende per la conveſſità, deſcrive tutto l' arco infinito ſino al menzionato vertice ſenza mai diſtaccarſi.

PROBLEMA XII. (*fig.* X.)

§. 68. *Ritrovare la linea* CMN *ſituata in un piano verticale, e riferita all' aſſe verticale* AB, *ſulla quale collocato un grave in parte oppoſta all' aſſe, queſto diſcenda per eſſa ſenza premerla per eſſere la preſſione nata dalla gravità uguale dovunque alla forza centrifuga.*

SOLUZIONE.

L' ipoteſi ſomminiſtra l' equazione differenziale della curva $\frac{dy}{ds}=\frac{2h}{r}$. Poſto pertanto, che il grave incominci a diſcendere dal punto M più baſſo della ſommità A dell' aſſe per l' intervallo $AO=a$, per modo che eſſendo $AR=x$ diventi $h=OR=x-a$, ſi otterrà $\frac{dy}{ds}=\frac{2x-2a}{r}$; e perchè il raggio r dell' evoluta ſi fa eſſere $=\frac{ds^3}{-dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, naſce quindi $dy=\frac{-2(x-a)\,dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^2}$. Prendo ora l' elemento ds, cioè $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ per coſtante, ed ho $\frac{dxddx+dyddy}{ds}=0$, ovvero $-dxddx = dyddy$, e di qui $-dyddx = \frac{dy^2 ddy}{dx}$. Ma $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$; dunque ſoſtituendo per $-dyddx$ il valore ritrovato, ſi deduce $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(dx^2 + dy^2)ddy}{dx^3}$, ovvero $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ds^2 ddy}{dx}$, cioè $\frac{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^2} = \frac{ddy}{dx}$; e queſto valore ſoſtituito nell' eſpreſſione di dy, naſce $dy = \frac{-2(x-a)ddy}{dx}$, che ſeparate le variabili diventa $\frac{ddy}{dy} = -\frac{dx}{2(x-a)}$. Ora ſi vede chiaro, che l' integrale di queſta equazione è log. $dy = -\frac{1}{2}$ log. $(x-a)$ + log. cds, eſſendoſi preſa per coſtante ds. Laonde paſſando da' logaritmi a' numeri ſi troverà $dy = \frac{cds}{\sqrt{(x-a)}}$, e quadrando $dy^2 = \frac{c^2(dx^2 + dy^2)}{x-a}$; onde $(x-a)dy^2 - c^2dy^2 = c^2dx^2$, e finalmente $dy = \frac{cdx}{\sqrt{(x-a-c^2)}}$, ed integrando $y = 2c\sqrt{(x-a-c^2)} +$ coſt. Suppongaſi, che alla ſommità A, quando $x = 0$, ſia $y = AC = b$, e naſcerà coſt. $= b - 2c\sqrt{(-a-c^2)}$. Perciò $y = b - 2c\sqrt{(-a-c^2)} + 2c\sqrt{(x-a-c^2)}$. A ritrovare poi la prima coſtante c ricorro all' equazione differenziale $dy = \frac{cds}{\sqrt{(x-a)}}$, dalla quale ſi ricava $c = \frac{dy}{ds}\sqrt{(x-a)}$; e ſiccome $\frac{dy}{ds}$ eſprime il ſeno dell' angolo, cui la linea ricercata forma in qualſivoglia punto colla retta verticale, ſe un tal ſeno pel punto M quando $x = a$ ſi chiama ϕ, è manifeſto provenire $c = \phi \times 0 = 0$; e conſeguentemente l' equazione alla linea cercata è $y = b$, che è quanto dire, che una tal linea è la retta verticale CS. Che ſe il ſeno ϕ del predetto angolo ſi faceſſe corriſpondere non alla poſizione $x = a$, ma bensì ad $x = 0$, allora naſcerebbe $c = \phi\sqrt{-a}$, e però $y = b + 2\phi\sqrt{-a}\left(\sqrt{(x - a + \phi^2 a)} - \sqrt{(\phi^2 a - a)}\right) = b + 2\phi\left(\sqrt{(a^2 - a^2\phi^2 - ax)} - \sqrt{(a^2 - \phi^2 a^2)}\right) = b + 2\phi\sqrt{\left(a^2(1 - \phi^2) - ax\right)} - 2\phi\sqrt{\left(a^2(1 - \phi^2)\right)}$; dalla quale equazione ſi ſcorge, che dovendo eſſere $x > a$, oppure $= a$, il valore di y diventa immaginario, e il Problema impoſſibile ſintantochè ϕ perſiſte ad eſſere qualche coſa, ſiccome è altronde manifeſto; ma diventando $\phi = 0$, l' equazione alla linea cercata ſi cangia in $y = b$, cioè a dire la detta linea è una retta verticale, come dianzi. Il che ecc.

§. 69. Aggiungo per ultimo il Problema delle forze centrali ſecondo la Teoria Neutoniana trattato qui in una maniera particolare, dove qualche ripiego tenuto per giungere all' integrazione delle eſpreſſioni relative ai tempi potrebbe per avventura non eſſere inutile in qualche altra occaſione. Dalla ſoluzione del Problema ho ricavato ſpeditamente in tanti Teoremi tutte le proprietà più ſingolari ed eleganti del moto prodotto in virtù d' una forza acceleratrice variabile in ragione duplicata inverſa delle diſtanze dal centro della forza. Tutto ciò è qui ridotto ſotto un ſol punto di viſta, e immediatamente inferito dalla ſola ſoluzione del Problema fondamentale.

PROBLEMA.

Un mobile gettato da principio con una certa velocità di projezione viene obbligato a camminare per una via curvilinea QMT (fig. XI.) *da una forza acceleratrice, la quale lo ſpinge di continuo verſo un punto fiſſo* P *con una intenſità reciprocamente proporzionale al quadrato della diſtanza del corpo dal detto punto : ſi cerca la curva deſcritta* QMT.

SOLUZIONE.

Si guidi pel dato punto P una retta PS nel piano della trajettoria, e ſia M il luogo del mobile dopo un certo tempo t, e da M ſi conduca a PS come aſſe l' ordinata perpendicolare MN, e l' infinitamente proſſima mn, ſopra cui ſi abbaſſi il perpendicolo Mr. Chiamato al ſolito x, y reſpettivamente le coordinate ortogonali PN, MN, v il raggio vettore PM, ϕ l' angolo MPS, convien riflettere, che il corpo, il quale ſi muove per la curva QM e deſcrive nell' iſtante dt l' archetto infiniteſimo Mm, può conſiderarſi come animato da due moti, uno parallelo all' aſciſſa PN, l' altro all' ordinata NM, percorrendo col primo di queſti due moti nello ſteſſo iſtante dt la Mr ovvero dx, col ſecondo la rm, o dy, cioè i lati del rettangolo, di cui Mm è la diagonale, la velocità del primo moto ſarà dunque $= \frac{dx}{dt}$, la velocità del ſecondo $= \frac{dy}{dt}$. Ora riſolvendo la forza centrale, che ſpinge il corpo ſecondo MP, in due X, Y, quella parallela alle aſciſſe, queſta alle ordinate, è manifeſto, che dalla forza X viene ritardata la velocità $\frac{dx}{dt}$, e dalla Y viene ſminuita la velocità $\frac{dy}{dt}$, e tali diminuzioni iſtantanee di velocità (preſo dt per coſtante) ſono $\frac{-ddx}{dt}$, e $\frac{-ddy}{dt}$. Perlochè il noto principio Dinamico, che la forza acceleratrice o ritardatrice moltiplicata per l' iſtante è uguale alla variazione iſtantanea della velocità, ſomminiſtra le due equazioni $\frac{-ddx}{dt^2} = X$, $\frac{-ddy}{dt^2} = Y$. Suppongaſi in oltre, che la forza centrale in una data diſtanza r dal punto P ſia $= R$, ſicchè riſulti $\frac{Rr^2}{v^2}$ per la forza in M. Quindi è evidente, eſſere $X = \frac{Rr^2 \cos.\phi}{v^2} = \frac{-ddx}{dt^2}$, $Y = \frac{Rr^2 \,\text{ſen.}\,\phi}{v^2} = \frac{-ddy}{dt^2}$. Se pertanto ſi mena l' altro raggio vettore Pm, e coll' intervallo PM ſi deſcrive l' archetto circolare Mg, rieſce $mg = dv$, $Mg = v d\phi$, $Mm^2 = dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2 d\phi^2$, $v^2 = x^2 + y^2$; e queſt' ultima equazione

zione due volte differenziata diventa $vddv + dv^2 = xddx + yddy + dx^2 + dy^2 = xddx + yddy + dv^2 + v^2 d\phi^2$, cioè $xddx + yddy = vddv - v^2 d\phi^2$, ovvero $\frac{xddx}{dt^2} + \frac{yddy}{dt^2} = \frac{vddv - v^2 d\phi^2}{dt^2}$

Ma $\frac{xddx}{dt^2} = \frac{-Rr^2 x \,\text{coſ.}\, \phi}{v^2} = \frac{-Rr^2 \cos.\, \phi^2}{v}$ (poichè $\frac{x}{v} = \cos.\, \phi$);

ed $\frac{yddy}{dt^1} = -\frac{Rr^2 y \,\text{ſen.}\, \phi}{v^2} = -\frac{Rr \,\text{ſen.}\, \phi^5}{v}$ (giacchè $\frac{y}{v} = \text{ſen.}\, \phi$).

ſicchè $\frac{xddx + yddy}{dt^2} = \frac{-Rr^2}{v} = \frac{vddv - v^2 d\phi^2}{dt^2}$, ovvero

$\frac{ddv - vd\phi^2}{dt^2} = \frac{-Rr^2}{v^2}$ (A). Siccome poi ſi ha $\frac{y}{x} = \text{tang.}\, \phi$, e differenziando $\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{d\phi}{\cos.\, \phi^2}$, cioè $xdy - ydx = \frac{x^2 d\phi}{\cos.\, \phi^2}$, ed è $\frac{x}{\cos.\, \phi} = v$, perciò ſi ha $xdy - ydx = v^2 d\phi$, ovvero $vd\phi = \frac{xdy}{v} - \frac{ydx}{v} = dy \cos.\, \phi - dx \,\text{ſen.}\, \phi$, e queſta equazione differenziata ſi cangia in $ddy \cos.\, \phi - ddx \,\text{ſen.}\, \phi - d\phi\, (dy \,\text{ſen.}\, \phi + dx \cos.\, \phi) = vdd\phi + dvd\phi$, oſſia $ddy \,\text{coſ.}\, \phi - ddx \,\text{ſen.}\, \phi = vdd\phi + dvd\phi + d\phi\, (dy \,\text{ſen.}\, \phi + dx \,\text{coſ.}\, \phi)$, e ſe in queſta ſi ſoſtituiſce il valore ricavato dal differenziare l'equazione $v^2 = x^2 + y^2$, vale a dire $vdv = xdx + ydy$ oppure $dv = \frac{xdx}{v} + \frac{ydy}{v} = dx \,\text{coſ.}\, \phi + dy \,\text{ſen.}\, \phi$, ne deriva $ddy \,\text{coſ.}\, \phi - ddx \,\text{ſen.}\, \phi = vdd\phi + 2dv\, d\phi$. Ora eſſendoſi già trovate le due equazioni $ddy = \frac{-Rr^2 dt^2 \,\text{ſen.}\, \phi}{v^2}$, $ddx = \frac{-Rr^2 dt^2 \,\text{coſ.}\, \phi}{v^2}$, ſe ſi moltiplica la prima per $\text{coſ.}\, \phi$ la ſeconda per $\text{ſen.}\, \phi$ ſottraendola dalla prima, ſi ottiene $ddy \,\text{coſ.}\, \phi - ddx \,\text{ſen.}\, \phi = o$; e quindi $vdd\phi + 2dvd\phi = o$, e queſta moltiplicata per v, ed integrata diventa $v^2 d\phi = c^2 dt$, eſſendo c^2 una coſtante arbitraria. Preſo poi di qui il valore

$dt^2 = \frac{v^4 d\phi^2}{c^4}$, e ſurrogato nell' equazione (*A*) naſce $ddv - vd\phi^2 = \frac{-Rr^2 v^2 d\phi^2}{c^4} = \frac{-v^2 d\phi^2}{b}$, poſto $b = \frac{c^4}{Rr^2}$. Dunque $(bv - v^2) d\phi^2 = bddv$, oppure $d\phi^2 = \frac{bddv}{v(b-v)}$. Per integrale di queſt' ultima equazione ſi prenda $\frac{bdv}{v(b-v)} = Td\phi$, eſſendo *T* una funzione variabile da definirſi; e il differenziale ſarà $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = Tdd\phi + dTd\phi$. Siccome pertanto ſi è trovato $vdd\phi + 2dvd\phi = 0$, cioè $dd\phi = \frac{-2dvd\phi}{v}$, ſe ſi ſoſtituiſce queſto valore nell' equazione precedente, eſſa diviene $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = \frac{-2Tdvd\phi}{v} + dTd\phi$, ed in queſta ſoſtituendo il valore aſſunto di $Td\phi = \frac{bdv}{v(b-v}$), ſi ottiene $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = \frac{-2bdv^2}{v^2(b-v)} + dTd\phi$, ovvero $\frac{bddv}{v(b-v)} + \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = \frac{bddv}{v(b-v)} + \frac{b^2dv^2}{v^2(b-v)^2} = dTd\phi$. Ma ſi è trovato $\frac{bddv}{v(b-v)} = d\phi^2$, e $\frac{b^2dv^2}{v^2(b-v)^2} = T^2 d\phi^2$. Dunque $d\phi^2 + T^2 d\phi^2 = dTd\phi$, e quindi $d\phi = \frac{dT}{1 + T^2}$; e queſta equazione integrata dà arc. tang. $T = \phi + \beta$, preſo per β un angolo coſtante da determinarſi. Da queſt' integrale ſi deduce ſubito $T = \text{tang.}\ (\beta + \phi)$ e $Td\phi = d\phi\ \text{tang.}(\beta + \phi) = \frac{bdv}{v(b-v)} = \frac{dv}{v} + \frac{dv}{b-v}$, e nuovamente integrando naſce finalmente $-\text{log. cos.}\ (\beta + \phi) = \text{log.}\ v - \text{log.}\ (b - v) + \text{log.}\ e$, ovveramente log. e + iog.

cos. $(\beta+\phi)=$ log. $(b-v)$ — log. v. Dunque per ultimo paſſando dai logaritmi ai numeri, riſulta $e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)=\frac{b-v}{v}$, e conſeguentemente $v=\frac{b}{1+e\cos.\,(\beta+\phi)}$. Ora queſta equazione al raggio vettore della trajettoria ricercata appartiene notoriamente ad una Sezione Conica di cui il punto P è il fuoco, b il ſemiparametro dell' aſſe principale, e l' eccentricità oſſia la diſtanza tra il centro e il fuoco diviſa pel ſemiaſſe principale, ed è riſpettivamente una parabola, un' elliſſe, o un' iperbola ſecondo i tre caſi, 1°. di $e=1$, 2°. di $e<1$, 3°. di $e>1$. Il che era ecc.

70. Rimane ora a determinare il preciſo valore delle coſtanti arbitrarie c^2, β, e introdotte nelle integrazioni. A tal effetto, ſi chiami u la velocità del mobile nel punto M, e ds l' archetto Mm, ſicchè ſia $u=\frac{ds}{dt}$; e ſi ſupponga, che il corpo da principio ſia ſtato lanciato dal punto dato $\mathcal{Q}$ poſto ad una diſtanza nota f dal centro P della forza con una velocità iniziale o di projezione $=h$, e che quivi l' angolo fatto dal raggio vettore f colla direzione della projezione, o colla tangente della curva ſia $=\alpha$. Con ciò è manifeſto, che nel punto iniziale $\mathcal{Q}$ ſi ha $\frac{fd\phi}{ds}=\text{ſen.}\,\alpha$, $ds=\frac{fd\phi}{\text{ſen.}\,\alpha}$; ed inoltre $u=\frac{ds}{dt}=\frac{fd\phi}{dt\,\text{ſen.}\,\alpha}=h$, onde $\frac{d\phi}{dt}=\frac{h\,\text{ſen.}\,\alpha}{f}$. Ma ſi è trovato $c^2=\frac{v^2d\phi}{dt}$; dunque ſoſtituendo i valori di $v^2=f^2$, e di $\frac{d\phi}{dt}=\frac{h\,\text{ſen.}\,\alpha}{f}$ ſi ottiene la ricercata coſtante $c^2=fh\,\text{ſen.}\,\alpha$.

71. Per ritrovare l' altra coſtante β, oſſervo, che l' equazione differenziale $Td\phi=\frac{bdv}{v(b-v)}$ dà $T=\frac{bdv}{v(b-v)d\phi}$, dove $\frac{vd\phi}{dv}$ eſprime la tangente dell' angolo fatto dal raggio vettore coll' elemento della curva, ovvero colla ſua tangente, ſicchè

nel punto iniziale Q diviene $\frac{v d\phi}{dv} = \text{tang.}\,\alpha, v = f$, e conſeguentemente $T = \frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}$. Laonde arc. tang. $T = \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha} = \beta + \phi\right.$. Se pertanto nel detto punto Q l' angolo ϕ diventa uguale ad un angolo noto Δ, ne deriva il valore ricercato di $\beta = \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right) - \Delta = \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha} - \text{tang.}\,\Delta\right) : \left(1 + \frac{b\,\text{tang.}\,\Delta}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right)$

$$= \text{arc. tang.}\left(\frac{b - (b-f)\,\text{tang.}\,\alpha\,\text{tang.}\,\Delta}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha + b\,\text{tang.}\,\Delta}\right)$$

72. Per ciò che riguarda l' eccentricità e, eſſendoſi trovata l' equazione della trajettoria $v = \frac{1}{1 + e\,\text{coſ.}\,(\beta + \phi)}$ queſta ſomminiſtra $e = \frac{b - v}{v\,\text{coſ.}\,(\beta + \phi)}$; e però, diventando nel punto iniziale Q della curva $v = f$, $\phi = \Delta$, naſce $e = (b - f) : (f\,\text{coſ.}\,(\beta + \Delta))$. Siccome poi ſi è trovato $\beta + \Delta$

$$= \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right)$$

$$= \text{arc. ſec.}\left(\frac{\sqrt{\left(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2\right)}}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right)$$

$$= \text{arc. coſ.}\left(\frac{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}{\sqrt{\left(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2\right)}}\right);$$ e quindi $\text{coſ.}\,(\beta + \Delta)$

$$= \frac{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}{\sqrt{\left(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2\right)}}$$: riſulta finalmente

$$e = \frac{\sqrt{\left(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2\right)}}{f\,\text{tang.}\,\alpha}.$$

73. Per indagare preſentemente i varj accidenti del moto per la trajettoria già ritrovata, incomincio ad oſſervare, che la precedente equazione $v^2 d\phi = c^2 dt$ ſi riduce all' altra

$\frac{\frac{1}{2}v^2 d\phi}{dt} = \frac{1}{2}c^2$, nella quale eſſendo $\frac{1}{2}v^2 d\phi$ uguale all' ajuola MPm della curva, ſi vede toſto il rapporto coſtante dell' elemento dell' area all' iſtante, in cui è deſcritto, e ciò ſuccedendo in tutti gl' iſtanti d' un dato tempo qualunque, ne diſcende immediatamente il ſeguente

TEOREMA I.

Le aree compreſe da due raggi vettori e dall' arco della trajettoria ſono proporzionali al tempo, cui il mobile conſuma a percorrer quell' arco.

74. Guidata la tangente MO, e ad eſſa la normale $PO = p$, è coſa evidente, che l' ajuola PMm ha per valore tanto $\frac{1}{2}v^2 d\phi = \frac{1}{2}c^2 dt$, quanto $\frac{1}{2}pds$; e però ſi ha $c^2 dt = pds$. Ma $u = \frac{ds}{dt}$, ovvero $udt = ds$. Dunque $c^2 dt = pudt$, oſſia $u = \frac{c^2}{p}$, e quindi il

TEOREMA II.

La velocità del mobile in qualunque punto della trajettoria è in ragione inverſa della normale condotta dal fuoco alla tangente della curva in quel punto.

75. L' equazione $v^2 d\phi = c^2 dt$ dà $\frac{d\phi}{dt} = \frac{c^3}{v^2}$. Ora $\frac{d\phi}{dt}$ eſprime la velocità angolare del mobile; ne viene adunque il

TEOREMA III.

La velocità angolare del corpo nella trajettoria ſeguita la ragione inverſa del quadrato della ſua diſtanza dal centro della forza, ovvero del fuoco.

76. Per determinare poi la miſura preciſa della velocità u del corpo in qualunque punto della curva, ſi conſideri, che

eſſendo $u^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$, ſi ha per la differenziazione $udu = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2}$, e poichè ſi è trovato $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{-Rr^2 \text{coſ.}\,\phi}{v^2}$, $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{-Rr^2 \text{ſen.}\,\phi}{v^2}$, ſe ſi moltiplica la prima di queſte equazioni per dx, la ſeconda per dy, ne deriva $\frac{dxddx + dyddy}{dt^2} = udu = \frac{-Rr^2(dx\,\text{coſ.}\,\phi + dy\,\text{ſen.}\,\phi)}{v^2} = \frac{-Rr^2dv}{v^2}$. Laonde integrando ſi ottiene $u^2 = \frac{2Rr^2}{v} + \text{coſt.}$ La coſtante di queſt' integrale ſi ritrova con avvertire, che quando diviene $v = f$, la velocità u ſi cangia nella velocità iniziale o di projezione h, il che dà coſt. $= h^2 - \frac{2Rr^2}{f}$: e quindi $u^2 = h^2 - 2Rr^2\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{v}\right)$. Ed ecco il

TEOREMA IV.

La miſura aſſoluta della velocità del mobile in qualunque punto della trajettoria è uguale all' eſpreſſione

$$\sqrt{\left(h^2 - 2Rr^2\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{v}\right)\right)}.$$

76. Ritrovata l' eſpreſſione della velocità in qualſivoglia punto della curva, è facile ora il paſſaggio a determinare que' punti, ne' quali la velocità del mobile è la *maſſima*, o la *minima* di tutte le altre. Baſta uguagliare a zero il differenziale della detta eſpreſſione, e da ciò deriva

$$d.\sqrt{\left(h^2 - 2Rr^2\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{v}\right)\right)} = \frac{-Rr^2dv}{v^2\sqrt{\left(h^2 - 2Rr^2\left(\frac{1}{f} = \frac{1}{v}\right)\right)}} = 0,$$

vale a dire $-\frac{dv}{v^2} = d.\frac{1}{v} = 0$. Ma già ſi è veduto eſſere

$v=\frac{b}{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)}$. Per conſeguenza ſarà $d.\frac{1}{v}$ $=d.\left(\frac{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)}{b}\right)=-ed\phi\,\text{ſen.}\,(\beta+\phi)=0$. Dal che ſi deduce tanto $\beta+\phi=0$, quanto $\beta+\phi=180^\circ$. Di qui

TEOREMA V.

La maſſima e la minima velocità del mobile nella trajettoria da eſſo percorſa corriſpondono alle due eſtremità dell' aſſe principale, oſſia alle due apſidi ima, e ſomma.

77. Se un altro corpo ſollecitato verſo il punto fiſſo P da quella ſteſſa forza, che accompagna il mobile nella trajettoria, caſca in linea retta verſo P, e giunto ad una diſtanza da P, la qual ſia uguale al raggio vettore v, acquiſta ivi una velocità $=u'$, è manifeſto che ſarà $du'=\frac{Rr^2dt}{v^2}$, ed eſſendo $u'dt$ $=-dv$, cioè $dt=\frac{-dv}{u'}$, naſcerà $u'du'=\frac{-Rr^2dv}{v^2}$, il di cui integrale è $u'^2=\frac{2Rr^2}{v}+\text{coſt.}$ Perciò ſuppoſto, che ad una diſtanza nota f dal centro della forza la velocità u' diventa uguale ad una velocità data h', ſi deduce $\text{coſt.}='h^2-\frac{2Rr^2}{f}$, e conſeguentemente $'u^2='h^2-2Rr^2\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{v}\right)$, ed $u'=\sqrt{\left('h^2-2Rr^2\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{v}\right)\right)}$. Da ciò appariſce $u'=u$ allorchè $h'=h$, vale a dire il

TEOREMA VI.

Il mobile ha in ogni punto della ſua trajettoria quella velocità che avrebbe un altro corpo il quale ſi trovaſſe alla ſteſſa diſtanza dal centro della forza, verſo cui diſcendeſſe in linea retta, ſupponendo ſemplicemente, che eſſo abbia avuto una volta *la medeſima velocità del primo ad uguale diſtanza dal centro.*

78. Fingaſi ora, che il mobile dal punto della trajettoria, in cui ſi trova, caſchi lungo il raggio vettore verſo il centro della forza, e venga ſollecitato dalla ſteſſa forza centripeta, la quale però rimanga coſtante per tutta la caduta: in queſto ſuppoſto ſi ſcorge chiaramente che chiamato z lo ſpazio deſcritto dal corpo nella caduta lungo il raggio vettore v verſo il centro, u'' la velocità da eſſo acquiſtata alla fine di tale ſpazio, ſi ricava l'equazione $u''du''=\frac{Rr^2dz}{v^2}$, e mediante l'integrazione $\frac{2Rr^2z}{v^2}=u''^2$ ſenza coſtante da aggiungerſi, giacchè ſi annullano inſieme z, ed u''. Se pertanto ſi ſuppone che la velocità u'' acquiſtata dal mobile nella caduta ſia uguale alla velocità u del medeſimo nella trajettoria, ſiccome $u=\frac{c^2}{p}$, ſarà parimente $u''^2=\frac{c^4}{p^2}=\frac{2Rr^2z}{v^2}$, ed eſſendo $c^4=Rr^2b$, ne viene $\frac{2z}{v^2}=\frac{b}{p^2}$, ovvero $z=\frac{\frac{1}{2}bv^2}{p^2}$. Di qui

TEOREMA VII.

Caſcando verſo il centro della forza da qualunque punto della trajettoria il mobile ſollecitato dalla forza centrale corriſpondente al detto punto, la quale però rimanga coſtante per tutta la caduta, acquiſta la velocità, che eſſo aveva in quel punto della curva, dopo eſſer caduto per uno ſpazio, che è quarto proporzionale al quadrato della normale condotta dal centro della forza ſulla tangente della trajettoria nel mentovato punto, al quadrato del raggio vettore, ed alla quarta parte del parametro dell' aſſe principale.

79. Cada ora lo ſteſſo corpo verſo il centro della forza lungo il raggio vettore, e ſi ſupponga, che la forza non rimanga più coſtante come nel Teor. prec.; ma varii durante la caduta in ragione inverſa del quadrato della diſtanza dal centro. In queſta ipoteſi eſſendo $\frac{Rr^2}{v^2}$ la forza centripeta nel

principio della caduta, ſarà eſſa, ſcorſo lo ſpazio z, ovvero alla diſtanza $v - z$ dal centro, eſpreſſa da $\frac{Rr^2}{(v-z)^2}$. Laonde nominando u''' la velocità acquiſtata nel cadere per lo ſpazio z, ſi ottiene $\frac{Rr^2 dz}{(v-z)^2} = u''' du'''$, il di cui integrale è $\frac{2Rr^2}{v-z} = u'''^2 + \text{coſt.}$ E poichè u''' e z ſvaniſcono inſieme, proviene coſt. $= \frac{2Rr^2}{v}$; e conſeguentemente $u'''^2 = 2Rr^2\left(\frac{1}{v-z} - \frac{1}{v}\right) = \frac{2Rr^2 z}{v(v-z)}$. Perlochè ſupponendo $u''' = u = \frac{c^2}{p}$, cioè $u'''^2 = \frac{c^4}{p^2} = \frac{Rr^2 b}{p^2}$, ne deriva $\frac{2z}{(v-z)v} = \frac{b}{p^2}$; e quindi

$$z = \frac{bv^2}{2p^2 + bv} = \frac{bv}{\frac{2p^2}{v} + b}.$$ Dunque il

TEOREMA VIII.

Un corpo, che da qualunque punto della ſua trajettoria cade lungo il raggio vettore verſo il centro della forza, e viene ſollecitato durante la ſua caduta dalla ſteſſa forza variante in ragione duplicata inverſa della diſtanza dal centro, acquiſta la ſteſſa velocità, che compete al detto punto della trajettoria dopo aver traſcorſo uno ſpazio, il quale ſi ha, ſe dopo aver preſa una terza proporzionale al raggio vettore, e alla normale ſi piglia una quarta proporzionale al doppio di quella congiunto col ſemiparametro, allo ſteſſo ſemiparametro ed al raggio vettore.

80. Per ciò che ſpetta al tempo impiegato dal mobile a correre per un arco qualunque $\mathcal{Q}M$ della trajettoria, baſta ricorrere alla formola $dt = \frac{v^2 d\varphi}{c^2} = \frac{v^2 d\varphi}{bf\,\text{ſen.}\,\alpha} = \frac{2PMm}{bf\,\text{ſen.}\,\alpha}$, dalla quale mediante l' integrazione ſi ricava $t = \frac{2\mathcal{Q}PM}{bf\,\text{ſen.}\,\alpha}$ ſenza coſtante perchè ſi annullano inſieme t, e $P\mathcal{Q}M$.

81. Se ſi vuole l'eſpreſſione del tempo indipendentemente dall' aja QPM, ſi ſoſtituiſca nell'equazione $dt=\frac{v^2 d\phi}{c^2}$ il valore dianzi trovato di v^2, e ſi avrà $dt=\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{d\phi}{\left(1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)\right)^2}$; onde integrando naſcerà $t=\frac{b^2}{c^2}\int\frac{d\phi}{\left(1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)\right)^2}$. Per ritrovare il valore di queſta eſpreſſione integrale io aſſumo queſta equazione $\int\frac{d\phi}{\left(1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)\right)^2}=\frac{M\,\text{ſen}\,(\beta+\phi)}{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)}$ $+N\int\frac{d\phi}{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)}$, dalla quale mediante la differenziazione ritraggo

$$\frac{Md\phi\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)\left(1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)\right)+Med\phi\,\text{ſen.}\,(\beta+\phi)^2}{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)}$$

$+\frac{Nd\phi}{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)}=$ (riducendo allo ſteſſo denominatore)

$$\frac{Md\phi\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)+Nd\phi+Ned\phi\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)+Med\phi}{\left(1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)\right)^2}.$$ Laonde ſarà

$$Md\phi\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)+Md\phi$$
$$+Ncd\phi\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)+\begin{matrix}Nd\phi\\-d\phi\end{matrix}=0.$$

Di qui ſi raccoglie $M=-Ne$, $N-Ne^2=1$, $N=\frac{1}{1-e^2}$, $M=\frac{-e}{1-e^2}$. Con ciò diventa

$$t=-\frac{b^2 e\,\text{ſen.}\,(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)\right)}$$

$+\frac{b^2}{c^2(1-e^2)}\int\frac{d\phi}{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)}$. Ridotta per tal modo l'integrazione a non dipendere ſe non dalla formola $\int\frac{d\phi}{1+e\,\text{coſ}\,(\beta+\phi)}$, per conſeguire il valore di queſta pongo coſ. $(\beta+\phi) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$; e però ſen. $(\beta+\phi) = \frac{2x}{1+x^2}$, $d\phi\,\text{coſ.}(\beta+\phi) = \frac{2dx(1-xx)}{(1+xx)^2}$, $d\phi = \frac{2dx}{1+xx}$. Sicchè ſi avrà $1+e\,\text{coſ.}(\beta+\phi) = \frac{1+e+(1-e)xx}{1+xx}$; e quindi

$$\int \frac{d\phi}{1+e\,\text{coſ.}(\beta+\phi)} = \int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}.$$

Ora queſt' ultima eſpreſſione $\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}$ ſoggiace alle note regole d' integrazione delle frazioni razionali, e tre ſono i caſi che poſſono occorrere.

CASO I.

$e < 1$

82. In queſto caſo diventa $\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}$

$$= \frac{2}{1+e}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{1-e}{1+e}\right)xx} = \frac{2}{1+e}\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \times$$

$$\int \frac{dx\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}}{1+\left(\frac{1-e}{1+e}\right)xx} = \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)}}\cdot\text{arc. tang.}\left(\frac{x\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}\right)$$

$= \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)}}$. arc. tang. $\left(\frac{(1-e)x}{\sqrt{(1-e^2)}}\right)$. Ma ſi trova

$$x = \sqrt{\left(\frac{1-\text{coſ.}(\beta+\phi)}{1+\text{coſ.}(\beta+\phi)}\right)} = \text{tang.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi) = \frac{\text{ſen.}(\beta+\phi)}{1+\text{coſ.}(\beta+\phi)},$$

ed inoltre 2. arc. tang. $\left(\frac{(1-e)x}{\sqrt{(1-e^2)}}\right)$

$$= \text{arc. tang.} \left(\frac{2(1-e)x : \sqrt{(1-e^2)}}{1 - \frac{(1-e)^2 xx}{1-e^2}} \right)$$

$$= \text{arc. tang.} \left(\frac{2(1-e)x\sqrt{(1-e^2)}}{1-e^2-(1-e^2)xx} \right) = \text{arc. tang.} \frac{2x\sqrt{(1-e^2)}}{1+e-(1-e)xx}$$

$$= \text{arc. tang.} \left(\frac{2\,\text{ſen.}\,(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{(1+e)(1+\text{coſ.}\,(\beta+\phi))-(1-e)(1-\text{coſ.}\,(\beta+\phi))} \right)$$

$$= \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{ſen.}\,(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{coſ.}\,(\beta+\phi)} \right).$$ Dunque ſi avrà

$$\frac{b^2}{c^2(1-e^2)} \int \frac{d\phi}{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)} = \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \times$$

$$\text{arc. tang.} \left(\frac{\text{ſen.}\,(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{coſ.}\,(\beta+\phi)} \right)$$ e per conſeguenza

$$t = -\frac{b^2 e\,\text{ſen.}\,(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)\right)} + \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \times$$

$$\text{arc. tang.} \left(\frac{\text{ſen.}\,(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{coſ.}\,(\beta+\phi)} \right) + \text{coſt.}$$ Sicchè ſuppoſto, che nel punto $\mathfrak{Q}$, da cui ſi vuol cominciare a contare il tempo, ſia $\phi = g$, ſi avrà per fine $t = \frac{b^2 e\,\text{ſen.}\,(\beta+g)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+g)\right)}$

$$- \frac{b^2 e\,\text{ſen.}\,(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)\right)} - \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \times$$

$$\text{arc. tang.} \left(\frac{\text{ſen.}\,(\beta+g)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{coſ.}\,(\beta+g)} \right)$$

$$+ \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \cdot \text{arc. tang.} \left(\frac{\text{ſen.}\,(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{coſ.}\,(\beta+\phi)} \right)$$

CASO II.

$e > 1$

83. In queſto ſecondo caſo ſi ſcrive $\frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}$

$$= \frac{2dx}{1+e-(e-1)xx} = \frac{2dx:(1+e)}{1-\frac{(e-1)xx}{e+1}}$$

$$= \frac{2dx:(1+e)}{\left(1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)\left(1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)} = \frac{dx:(1+e)}{1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}}$$

$$+ \frac{dx:(1+e)}{1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}}$$. Dunque integrando ſi avrà

$$\int\frac{2dx}{1+e+(1-e)xx} = \frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}}\log.\left(1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}}\log.\left(1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}}\log.\left(\frac{\sqrt{(e+1)}+x\sqrt{(e-1)}}{\sqrt{(e+1)}-x\sqrt{(e-1)}}\right)$$, e ſoſtituito per x il ſuo valore $\sqrt{\frac{1-\text{coſ.}(\beta+\phi)}{1+\text{coſ.}(\beta+\phi)}}$, naſce $\int\frac{2dx}{1+e+(1-e)xx} =$

$$\frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}}\,.\log.\frac{\sqrt{(e+1)}\sqrt{\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}+\sqrt{(e-1)}\sqrt{\left(1-\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}}{\sqrt{(e+1)}\sqrt{\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}-\sqrt{(e-1)}\sqrt{\left(1-\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}} =$$

(moltiplicando ſopra e ſotto pel numeratore)

$$\frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}}\log.\frac{e+\text{coſ.}(\beta+\phi)+\text{ſen.}(\beta+\phi)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{coſ.}(\beta+\phi)}$$. Perlochè naſce $t = -\frac{b^2e\,\text{ſen.}(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}$

$$+ \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}}\log.\frac{e+\text{coſ.}(\beta+\phi)+\text{ſen.}(\beta+\phi)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{coſ.}(\beta+\phi)}+\text{coſt.}$$

Siccome poi ſvaniſce t allorchè $\phi = g$, perciò ne deriva

$$\text{coſt.} = \frac{b^2e\,\text{ſen.}(\beta+g)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{coſ.}(\beta+g)\right)}$$

$$- \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}}\log.\frac{e+\text{coſ.}(\beta+g)+\text{ſen.}(\beta+g)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{coſ.}(\beta+g)}.$$

Dunque ſurrogato queſto valore nell' eſpreſſione di t, naſce finalmente $t = \frac{b^2 e}{c^2(1-e^2)}\left(\frac{\text{ſen.}\,(\beta+g)}{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+g)} - \frac{\text{ſen.}\,(\beta+\phi)}{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)}\right)$

$$+\frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}}\log.\frac{e+\text{coſ.}\,(\beta+\phi)+\text{ſen.}(\beta+\phi)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+\phi)}.$$

$$-\frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}}\log.\frac{e+\text{coſ.}\,(\beta+g)+\text{ſen.}\,(\beta+g)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{coſ.}\,(\beta+g)}$$

CASO III.

$$e = 1$$

84. Queſt' ultimo caſo non può trattarſi col metodo precedente, come appariſce dal valore infinito che acquiſtano i coefficienti indeterminati M, N. Siccome però $1+\text{coſ.}\,(\beta+\phi) = 2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2$, così ſarà $t = \frac{b^2}{c^2}\int\frac{d\phi}{4\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)^4}$. Facendo pertanto $\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\phi = \omega$, e perciò $d\phi = 2d\omega$, naſce $t = \frac{b^2}{2c^2}\int\frac{d\omega}{\text{coſ.}\,\omega^4}$. Ma per le note regole d' integrazione de' monomj trigonometrici ſi ha
$\int\frac{d\omega}{\text{coſ.}\,\omega^4} = \frac{1}{3}.\frac{\text{ſen.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\omega^3}+\frac{2}{3}.\frac{\text{ſen.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\omega} = \frac{\text{ſen.}\,\omega\,(1+2\,\text{coſ.}\,\omega^2)}{3\,\text{coſ.}\,\omega^3}$.
Dunque ſoſtituendo ne verrà
$t = \frac{b^2}{2c^2}.\frac{\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)\left(1+2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2\right)}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)^3}+\text{coſt.}$ La coſtante ſi determina, come dianzi, con oſſervare che t diventa zero allorchè ϕ ſi cangia in g; il che dà coſt. $= \frac{-b^2}{2c^2}.\frac{\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(\beta+g)\left(1+2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+g)^2\right)}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+g)^3}$. Perlochè riſulta $t = \frac{b^2}{2c^2}.\frac{\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)\left(1+2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2\right)}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)^3}$

$$-\frac{b^2}{2c^2}\cdot\frac{\text{ſen.}\,\tfrac{1}{2}(\beta+g)\left(1+2\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(\beta+g)^2\right)}{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(\beta+g)^3}.$$

85. Si può altrimenti ritrovare il valore di t in queſto caſo con far uſo della già praticata ſoſtituzione di $\text{coſ.}(\beta+\phi)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$; poichè ſi avrà $d\phi=\frac{2dx}{1+xx}$, ed $1+\text{coſ.}(\beta+\phi)=\frac{2}{1+xx}$, e perciò $\frac{d\phi}{\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)^2}=\frac{1}{2}dx(1+xx)$. Laonde $\int\frac{d\phi}{\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)^2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^3=\frac{\text{ſen.}(\beta+\phi)}{2\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}+\frac{\text{ſen.}(\beta+\phi)^3}{6\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)^3}+\text{coſt.}$

$$=\frac{\text{ſen.}(\phi+\beta)}{2\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}+\frac{\text{ſen.}(\beta+\phi)\left(1-\text{coſ.}(\beta+\phi)^2\right)}{6\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)^3}+\text{coſt.}$$

$$=\frac{\text{ſen.}(\beta+\phi)}{2\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}+\frac{\text{ſen.}(\beta+\phi)\left(1-\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}{6\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)^2}+\text{coſt.}$$

$$=\frac{\text{ſen.}(\beta+\phi)\left(2+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}{3\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)^2}+\text{coſt.}$$ Da ciò ſi ricava

$$t=\frac{b^2}{c^2}\int\frac{d\phi}{\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)^2}$$

$$=\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{ſen.}(\beta+\phi)\left(2+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}{\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)^2}+\text{coſt.};$$ ed eſſendo

$$\text{coſt.}=-\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{ſen.}(\beta+g)\left(2+\text{coſ.}(\beta+g)\right)}{\left(1+\text{coſ.}(\beta+g)\right)^2},$$ ſe ne deduce finalmente $t=\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{ſen.}(\beta+\phi)\left(2+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)}{\left(1+\text{coſ.}(\beta+\phi)\right)^2}$

$$-\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{ſen.}(\beta+g)\left(2+\text{coſ.}(\beta+g)\right)}{\left(1+\text{coſ.}(\beta+g)\right)^2},$$ la qual eſpreſſione, per eſſere $1+\text{coſ.}(\beta+\phi)=2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2$, e $\text{ſen.}(\beta+\phi)$

$= 2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)$, equivale manifeſtamente alla precedente $\frac{b^2}{2c^2}\cdot\frac{\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)\,(1+2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2)}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+\phi)^3}$

$$-\frac{b^2}{2c^2}\cdot\frac{\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(\beta+g)\,(1+2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+g)^2)}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(\beta+g)^3}.$$

SCOLIO.

Da aggiungerſi dopo il §. 53 della Memoria precedente.

Ne' ſeguenti Corollarj vengono dimoſtrati i Teoremi da me propoſti nel I. Volume degli Atti della noſtra Società ſopra la *diſceſa de' Corpi per la conveſſità delle Curve*. Il celebre Sig. Abb. *Friſi* nel ſecondo tomo delle ſue Opere ſtampate in Milano eſponendo alcuni di queſti miei Teoremi fa avvertire pag. 115. una diſcrepanza notabile fra le formole, che egli ottiene col ſuo metodo di dimoſtrare, ed i miei riſultati. Ma una tal diſcrepanza deriva dal principio da eſſo quivi adottato, che la miſura aſſoluta della forza centrifuga ſia una lineetta terza proporzionale al diametro del cerchio oſculatore, e all' archetto della curva deſcritto in un dato iſtante; laddove all' oppoſto egli è incontraſtabile, che per conſeguire la vera miſura della forza centrifuga convien ſempre pigliare una terza proporzionale, non al diametro del cerchio oſculatore, ma al ſemidiametro, e poi all' archetto della curva, che è quanto dire una lineetta doppia di quella, che dal Ch. Sig. Abb. *Friſi* viene propoſta. In fatti o vuolſi concepire la curva come poligona infinitilatera, e però l' azione della forza centrifuga non rigoroſamente continua, ma interrotta da un iſtante all' altro; o ſi vuole immaginare la curva come rigoroſa, e quindi continua l' azione della forza centrifuga ſenza alcuna interruzione neppure iſtantanea. Nel primo ſuppoſto la miſura della forza centrifuga è l' impulſo iſtantaneo, che fa percorrere al corpo la lineetta compreſa fra l' eſtremità del latercolo prolungato della curva e l' eſtremità del latercolo contiguo, e queſta lineetta nel preſente ſuppoſto è viſibilmente terza proporzionale al ſemidiametro

metro del cerchio oſculatore , e all' archetto . Nella ſeconda ipoteſi della curva rigoroſa , e dell' azione continua della forza centrifuga, la quale in conſeguenza non opera per impulſi iſtantanei, ma con matematica continuità, la lineetta compreſa fra le eſtremità della tangente della curva e dell' archetto è bensì terza proporzionale al diametro del cerchio oſculatore, e all' archetto; ma tal lineetta non può più prenderſi per miſura totale della forza centrifuga . Imperciocchè eſſa viene deſcritta in virtù della forza centrifuga , e della ſua azione continua e invariata pel dato iſtante con moto equabilmente accelerato, e perciò non eſſa linea ſemplicemente, ma il doppio di lei dee rappreſentare l'effetto intero della forza centrifuga in quell' iſtante , cioè la velocità generata dalla forza nella durata dell' iſtante. Conſeguentemente anche nel ſecondo ſuppoſto la miſura totale e aſſoluta della forza centrifuga è indubitatamente il doppio di quella, che dal Ch. Sig. Abb. *Friſi* viene aſſegnata.

Dopo ciò ſarebbe inutile , che io qui annoveraſſi a queſto illuſtre Geometra i molti e grandi aſſurdi, che derivano dal ſuo principio, eſſendo perſuaſo , che una paſſeggera rifleſſione ſull' argomento controverſo baſterà per fargli comprendere gl' inconvenienti del ſuo aſſunto.

SOPRA LE SERIE

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie Pubblico Profeſſore delle Matematiche ſuperiori nella R. Univerſità di Pavia.

ARTICOLO I.

Dell' uſo del Calcolo Integrale delle equazioni lineari per ſommare alcune ſerie traſcendenti.

I Moderni Analiſti ſi ſono a gara eſercitati nel perfezionare ed eſtendere la teoria delle equazioni differenziali lineari, proponendo varj metodi più o meno ſemplici e generali per aſſegnare i loro integrali completi; ed è già noto, che uno de' metodi più ingegnoſi per conſeguir queſt' intento è quello di aſſumere un *integrale particolare*, e di ricavarne poſcia mediante gli artifizj e ripieghi, che l' Analiſi somminiſtra, la vera forma dell' *integrale completo*. Supponendo io noti pertanto i fondamenti di queſto ramo di Calcolo Integrale mi reſtringo nel I. Articolo di queſta Memoria a moſtrar l' uſo, che quindi può trarſi per rinvenire la ſomma di alcune ſerie traſcendenti, alcune delle quali aſſoggettate agl' ingegnoſi metodi di *Leon. Eulero*, e del Sig. Cav. *Lorgna* eſiggerebbero per ſommarſi una lunga e tortuoſa complicazione di calcolo, ed ancor dopo queſto preſenterebbero riſultati aſſai compoſti, e biſognoſi di nuove riduzioni e di nuovi artifizj per veſtire una forma ſemplice ed elegante: laddove all' oppoſto mercè l' applicazione della predetta teoria ſi giugne ſpeditamente e direttamente alla ſomma delle ſerie propoſte, e queſta ſempre ſi preſenta ſenza l' ajuto di nuovi ripieghi analitici ſotto il più ſemplice aſpetto, cui la natura della quiſtione permetta.

PROBLEMA I.

Sommare la ſerie $1+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^8}{1.2.3...8}+\frac{x^{12}}{1.2.3....12}+\frac{x^{16}}{1.2.3.4....16}+\text{ecc.}=S$

SOLUZIONE.

Si prenda il differenziale, conſiderando x come variabile, e dx coſtante, e ſarà $\frac{x^3dx}{1.2.3}+\frac{x^7dx}{1.2.3....7}+\frac{x^{11}dx}{1.2.3....11}+\frac{x^{15}dx}{1.2.3....15}+\text{ecc.}=dS$. Di nuovo pigliſi il ſecondo differenziale, che ſarà $\frac{x^2dx^2}{1.2}+\frac{x^6dx^2}{1.2.3....6}+\frac{x^{10}dx^2}{1.2.3....10}+\frac{x^{14}dx^2}{1.2.3....14}+\text{ecc.}=ddS$. Si pigli ancora il differenziale terzo $\frac{xdx^3}{1}+\frac{x^5dx^3}{1.2.3.4.5}+\frac{x^9dx^3}{1.2.3....9}+\frac{x^{13}dx^3}{1.2.3....13}+\text{ecc.}=d^3S$. Finalmente ſi prenda anche il quarto $dx^4+\frac{x^4dx^4}{1.2.3.4}+\frac{x^8dx^4}{1.2.3....8}+\frac{x^{12}dx^4}{1.2.3....12}+\text{ecc.}=dx^4\left(1+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^8}{1.2.3....8}+\frac{x^{12}}{1.2.3....12}+\text{ecc.}\right)=Sdx^4=d^4S$. Ma queſta equazione differenziale di quart' ordine, contenendo in ciaſcun termine la variabile S, e i ſuoi differenziali alla ſola prima dimenſione, è un' equazione *lineare*, e però un ſuo integrale *particolare* ſarà $S=e^{mx}$, eſſendo m una coſtante indeterminata, ed e il numero, che ha per logaritmo naturale l' unità. Per trovare le quattro coſtanti arbitarie, che devono entrare nell' integrale *completo*, ſi differenzj l' equazione $S=e^{mx}$, e ſia $dS=mdxe^{mx}$, e novamente $ddS=m^2dx^2e^{mx}$, $d^3S=m^3dx^3e^{mx}$,

$d^4S = m^4dx^4e^{mx} = Sdx^4 = e^{mx}dx^4$. Dunque $m^4 = 1$, la qual equazione ha per radici, $m = 1, m' = -1, m'' = \sqrt{-1}$, $m''' = -\sqrt{-1}$. Laonde l'integrale completo ſarà $S = Ae^{mx} + Be^{m'x} + Ce^{m''x} + De^{m'''x}$, eſſendo A, B, C, D, le quattro coſtanti da determinarſi nella maniera ſeguente. Eſſendo $S = Ae^x + Be^{-x} + Ce^{x\sqrt{-1}} + De^{-x\sqrt{-1}} = Ae^x + Be^{-x}$ $+ C(\text{coſ.}\,x + \text{ſen.}\,x.\sqrt{-1}) + D(\text{coſ.}\,x - \text{ſen.}\,x.\sqrt{-1})$ $= Ae^x + Be^{-x} + (C + D)\,\text{coſ.}\,x + (C - D)\,\text{ſen.}\,x.\sqrt{-1}$; ed anche dovendo eſſere per la natura della propoſta ſerie $S = 1$, quand' $x = 0$, ne viene.

$$1^{\circ}.\ A + B + (C + D) = 1.$$

Inoltre, eſſendo $x = 0$, dev' eſſere $dS = 0$, e quindi $dxAe^x - dxBe^{-x} - (C + D)dx\,\text{ſen.}\,x + (C - D)dx\,\text{coſ.}\,x.\sqrt{-1}$; e dividendo per dx, e fatto $x = 0$, ſi ha

$$2^{\circ}.\ A - B + (C - D)\sqrt{-1} = 0$$

Parimenti, quando $x = 0$, dev' eſſere $ddS = 0$; dunque differenziando il valore ora ritrovato di dS, e poſcia dividendo per dx^2, e fatto $x = 0$, ſi ha

$$3.^{\circ}\ A + B - (C + D) = 0$$

Così anche, dovendo eſſere $d^3S = 0$, differenziando il valore di ddS, e diviſo poi per dx^3, e fatto $x = 0$, ſi ottiene

$$4.^{\circ}\ A - B - (C - D)\sqrt{-1} = 0$$

Da queſte quattro equazioni

$$1.^{a}\ A + B + (C + D) = 1$$

$$2.^{a}\ A - B + (C - D)\sqrt{-1} = 0$$

$$3.^{a}\ A + B - (C + D) = 0$$

$4.^{a}\ A - B - (C - D)\sqrt{-1} = 0$; ſi ha ſubito ſommando la $2.^{a}$ e la $4.^{a}$, $2A - 2B = 0$, e quindi $A = B$; e ſommando la $1.^{a}$ e la $3.^{a}$ ſi ottiene $2A + 2B = 1$; onde $A = B = \frac{1}{4}$. Dalla $2.^{a}$ poi ſi ha $C = D$, che ſoſtituito nella $3.^{a}$ dà $C = D = \frac{1}{4}$. Dunque finalmente $S = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$ $+ \frac{1}{4}\left(\text{coſ.}\,x + \text{ſen.}\,x\sqrt{-1}\right) + \frac{1}{4}\left(\text{coſ.}\,x - \text{ſen.}\,x.\sqrt{-1}\right)$ $= \frac{e^{2x} + 1}{4e^x} + \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,x$. Il che era ecc.

PROBLEMA II.

Sommare la ſerie $1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{1.2.3....8} + \frac{x^{10}}{1.2.3....10} + \text{ecc.} = S$.

Soluzione.

Preſi i differenziali ſi ottiene $dS = \frac{xdx}{1} + \frac{x^3dx}{1.2.3} + \frac{x^5dx}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7dx}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{x^9dx}{1.2.3....9} + \text{ecc.}$; $ddS = dx^2 + \frac{x^2dx^2}{1.2} + \frac{x^4dx^2}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ecc.} = dx^2 \left(1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3...6} + \text{ecc.}\right) = Sdx^2$. Sicchè ſarà come dianzi l' integrale *particolare* dell' equazione *lineare* di ſecond' ordine $ddS = Sdx^2$ eſpreſſo da $S = Ae^{mx}$; onde $dS = Amdxe^{mx}$, $ddS = Am^2dx^2e^{mx} = Ae^{mx}dx^2$; e quindi $m^2 = 1$, ed $m = 1$, $m' = -1$. Laonde $S = Ae^x + Be^{-x}$ è l' integrale *completo* di detta equazione. Ma quando $x = 0$, diventa $S = A + B = 1$, $\frac{dS}{dx} = 0 = A - B$; perciò $A = B = \frac{1}{2}$; e però $S = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$. Il che era ecc.

PROBLEMA III.

Sommare la ſerie $S = \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^7}{2.3....7} + \frac{z^{11}}{2.3....11} + \frac{z^{15}}{2.3....15} + \frac{z^{19}}{2.3....19} + \text{ecc.}$

SOLUZIONE.

Pigliſi il differenziale quattro volte, e ſarà $\frac{z^3dz^4}{2.3}+\frac{z^7dz^4}{2.3\ldots7}+\frac{z^{11}dz^4}{2.3\ldots11}+\frac{z^{15}dz^4}{2.3\ldots15}+$ ecc. $=d^4S=Sdz^4$. Quindi preſo $S=Aem^z$ per integrale *particolare* dell' equazione *lineare* $d^4S=Sdz^4$, ſi ottiene, differenziando, $dS=Amdze^{mz}$, $ddS=Am^2dz^2e^{mz}$, $d^3S=Am^3dz^3e^{mz}$, $d^4S=Am^4dz^4e^{mz}$ $=Sdz^4=Adz^4e^{mz}$. Perlochè dividendo per Adz^4e^{mz}, ſi ha $m^4=1$, che dà quattro radici $m=1$, $m'=-1$, $m''=\sqrt{-1}$, $m'''=-\sqrt{-1}$. Avremo pertanto l' integrale completo della predetta equazione eſpreſſo da $Ae^z+Be^{-z}+Ce^{z\sqrt{-1}}$ $+De^{-z\sqrt{-1}}=S$. Ora, ſiccome allorchè $z=0$, naſce $S=0$, $dS=0$, $ddS=0$, $\frac{d^3S}{dz^3}=1$, quindi riſultano le ſeguenti equazioni

$$1.^a\ A+B+C+D=0$$
$$2.^a\ A-B+C\sqrt{-1}-D\sqrt{-1}=0$$
$$3.^a\ A+B-C-D=0$$
$$4.^a\ A-B-C\sqrt{-1}+D\sqrt{-1}=1$$

Da queſte ſi ricavano i valori delle coſtanti arbitrarie; imperciocchè $1.^a+3.^a=2A+2B=0$; $2.^a+4.^a=2A-2B$ $=1$, cioè $A=-B=\frac{1}{4}$. Parimenti $1.^a-3.^a=2C+2D=0$; $2.^a-4.^a=2C\sqrt{-1}-2D\sqrt{-1}=-1$, vale a dire $C=-D=-\frac{1}{4\sqrt{-1}}$. Soſtituiti queſti valori nell' integrale, ne deriva $S=\frac{e^z}{4}-\frac{e^{-z}}{4}-\frac{e^{z\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}+\frac{e^{-z\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$ $=\frac{e^z-e^{-z}}{4}-\frac{1}{2}$ ſen. z. Il che era ecc.

SCOLIO

Si arriva a queſta ſerie nello ſciogliere il bel Problema Meccanico, in cui ſi cerca di determinare gli accidenti del moto di un grave, che diſcende per un piano inclinato in tanto che il piano ſi aggira intorno alla linea orizzontale, che ne forma la ſommità.

PROBLEMA IV.

Sommare la ſerie $1 + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^{10}}{1.2.3\ldots10} + \frac{x^{15}}{1.2.3\ldots10} + \frac{x^{20}}{1.2.3\ldots20} + \text{ecc.} = S$.

SOLUZIONE.

Mediante la differenziazione naſcono le equazioni $dS = \frac{x^4dx}{1.2.3.4} + \frac{x^9dx}{1.2.3\ldots9} + \frac{x^{14}dx}{1.2.3\ldots14} + \frac{x^{19}dx}{1.2.3\ldots19} + \text{ecc.}$; $ddS = \frac{x^3dx^2}{1.2.3} + \frac{x^8dx^2}{1.2.3\ldots8} + \frac{x^{13}dx^2}{1.2\ldots13} + \frac{x^{18}dx^2}{1.2.3\ldots18} + \text{ecc.}$; $d^3S = \frac{x^2dx^3}{1.2} + \frac{x^7dx^3}{1.2\ldots7} + \frac{x^{12}dx^3}{1.2\ldots12} + \frac{x^{17}dx^3}{1.2\ldots17} + \text{ecc.}$; $d^4S = \frac{xdx^4}{1} + \frac{x^6dx^4}{1.2\ldots6} + \frac{x^{11}dx^4}{1.2\ldots11} + \frac{x^{16}dx^4}{1.2\ldots16} + \text{ecc.}$; $d^5S = dx^5 + \frac{x^5dx^5}{1.2\ldots5} + \frac{x^{10}dx^5}{1.2\ldots10} + \frac{x^{15}dx^5}{1.2\ldots15} + \text{ecc.} = dx^5\left(1 + \frac{x^5}{1.2\ldots5} + \frac{x^{10}}{1.2\ldots10} + \frac{x^{15}}{1.2\ldots15} + \text{ecc.}\right) = Sdx^5$. L' integrale particolare è al ſolito $S = Ae^{mx}$, dal che ſi cava, come ſopra $d^5S = Am^5dx^5e^{mx} = Sdx^5 = Ae^{mx}dx^5$; onde $m^5 = 1$. Ora l' equazione $m^5 - 1 = 0$

ha per fattori $m-1=0$, $m^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}m+1=0$, $m^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}m+1=0$, che danno $m=1$, $m'=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right)}$, $m''=\frac{1-\sqrt{5}}{4}-\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right)}$, $m'''=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right)}$, $m''''=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{8}\right)}$. Dunque, poſto $\frac{-5+\sqrt{5}}{8}=-n$, l' integrale completo della equazione lineare $d^5S=S\,dx^5$ ſarà $Ae^{mx}+Be^{m'x}+Ce^{m''x}+De^{m'''x}+Ee^{m''''x}=Ae^{x}+Be^{(1-\sqrt{5})x:4+x\sqrt{n}.\sqrt{-1}}$ $+Ce^{(1-\sqrt{5})x:4-x\sqrt{n}.\sqrt{-1}}+De^{(-1-\sqrt{5})x:4+x\sqrt{n}.\sqrt{-1}}$ $+Ee^{(-1-\sqrt{5})x:4-x\sqrt{n}.\sqrt{-1}}=Ae^{x}+Be^{(1-\sqrt{5})x:4}$ $(\text{coſ.}\,x\sqrt{n}+\text{ſen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1})+Ce^{(1-\sqrt{5})x:4}$ $(\text{coſ.}\,x\sqrt{n}-\text{ſen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1})+De^{(-1-\sqrt{5})x:4}$ $(\text{coſ.}\,x\sqrt{n}+\text{ſen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1})+Ee^{(-1-\sqrt{5})x:4}$ $(\text{coſ:}\,x\sqrt{n}-\text{ſen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1})=Ae^{x}+(B+C)e^{(1-\sqrt{5})x:4}\times$ $\text{coſ.}\,x\sqrt{n}+(B-C)e^{(1-\sqrt{5}):4}\,\text{ſen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1}$ $+(D+E)e^{(-1-\sqrt{5})x:4}\,\text{coſ.}\,x\sqrt{n}$ $+(D-E)e^{(-1-\sqrt{5})x:4}\,\text{ſen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1}$, cioè poſto $B+C=F$, $B-C=G$, $D+E=H$, $D-E=I$, naſce $S=Ae^{x}+Fe^{(1-\sqrt{5})x:4}\,\text{coſ.}\,x\sqrt{n}+Ge^{(1-\sqrt{5})x:4}$ $\text{ſen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1}+He^{(-1-\sqrt{5})x:4}\,\text{coſ.}\,x\sqrt{n}+Ie^{(-1-\sqrt{5})x:4}$ $\text{ſen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1}$. Si oſſervi ora, che fatto $x=0$, diventa $S=1$, $\frac{dS}{dx}=\frac{ddS}{dx^2}=\frac{d^3S}{dx^3}=\frac{d^4S}{dx^4}=0$, donde ſi traggono cinque

que equazioni per determinare le coſtanti arbitrarie A, F, G, H, I. In fatti in tal ipoteſi di $x = 0$, l' equazione $S = 1$ dà

$$1^\circ.\ A + F + H = 1.$$ Così $dS = 0$ dà

$$2^\circ.\ A + \frac{1-\sqrt{5}}{4} F + G\sqrt{n}.\sqrt{-1} - H.\frac{1+\sqrt{5}}{4} + I.\sqrt{n}.\sqrt{-1} = 0.$$

Parimenti $ddS = 0$ dà $3^\circ.\ A - \frac{1}{4} F + G.\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{n}.\sqrt{-1} - H.\frac{1-\sqrt{5}}{4} - I.\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{n}.\sqrt{-1} = 0$. Ma ſiccome per ottenere le altre due equazioni, che reſtano, cioè la 4.ª, e la 5ª. il calcolo rieſce aſſai lungo e tedioſo, parmi più eſpediente procedere così: Le cinque radici dell' equazione $m^5 - 1 = 0$ ſono 1, $a + b\sqrt{-1}$, $a - b\sqrt{-1}$, $f + g\sqrt{-1}$, $f - g\sqrt{-1}$, onde l' integrale completo è $Ae^x + Be^{ax + bx\sqrt{-1}} + Ce^{ax - bx\sqrt{-1}} + De^{fx + gx\sqrt{-1}} + Ee^{fx + gx\sqrt{-1}}$. Laonde ſuppoſto $x = 0$, ſi avranno le ſeguenti equazioni

$1^a.\ A + B + C + D + E = 1$,

$2^a.\ A + (a + b\sqrt{-1})B + (a-b-\sqrt{-1})C + (f+g\sqrt{-1})D + (f-g\sqrt{-1})E = 0$,

$3^a\ A + (a+b\sqrt{-1})^2 B + (a-b\sqrt{-1})^2 C + (f+g\sqrt{-1})^2 D + (f-g\sqrt{-1})^2 E = 0$,

$4^a.\ A + (a+b\sqrt{-1})^3 B + (a-b\sqrt{-1})^3 C + (f+g\sqrt{-1})^3 D + (f-g\sqrt{-1})^3 E = 0$,

$5^a.\ A + (a + b\sqrt{-1})^4 B + (a-b\sqrt{-1})^4 C + (f+g\sqrt{-1})^4 D + (f-g\sqrt{-1})^4 E = 0$,

dalle quali ſi otterranno i valori delle cinque coſtanti arbitrarie. Il che ecc

PROBLEMA V.

Sommare la ſerie $\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^6}{1.2.3....6} + \frac{x^{10}}{1.2.3....10} + \frac{x^{14}}{1.2.3....14} + \text{ecc.} = S$

Soluzione.

Si trova $dS = \frac{xdx}{1} + \frac{x^5dx}{1.2.3.4.5} + \frac{x^9dx}{1.2.3...9} + \frac{x^{13}dx}{1.2.3...13} + \text{ecc.}$;

$ddS = dx^2 + \frac{x^4dx^2}{1.2.3.4} + \frac{x^8dx^2}{1.2.3...8} + \frac{x^{12}dx^2}{1.2.3...12} + \text{ecc.}$;

$d^3S = \frac{x^3dx^3}{1.2.3} + \frac{x^7dx^3}{1.2.3...7} + \frac{x^{11}dx^3}{1.2.3....11} + \text{ecc.}$;

$d^4S = \frac{x^2dx^4}{1.2} + \frac{x^6dx^4}{1.2.3...6} + \frac{x^{10}dx^4}{1.2.3...10} + \text{ecc.}$

$= dx^4 \left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^6}{1.2.3...6} + \frac{x^{10}}{1.2...10} + \text{ecc.} \right) = Sdx^4$. Ora per l' indole dell' equazione differenziale lineare di quart' ordine $d^4S = Sdx^4$, ſi trova, che un ſuo integrale particolare è $S = Ae^{mx}$; onde $dS = Amdxe^{mx}$, $ddS = Am^2dx^2e^{mx}$, $d^3S = Am^3dx^3e^{mx}$, $d^4S = Am^4dx^4e^{mx} = Sdx^4 = Ae^{mx}dx^4$; e perciò $m^4 - 1 = 0$, ovvero $(m^2 - 1)(m^2 + 1) = 0$, e conſeguentemente $m = 1$, $m' = -1$, $m'' = \sqrt{-1}$, $m''' = -\sqrt{-1}$. Sicchè l' integrale completo dell' equazione $d^4S = Sdx^4$ è $Ae^{mx} + Be^{m'x} + Ce^{m''x} + De^{m'''x} = Ae^x + Be^{-x} + Ce^{x\sqrt{-1}} + De^{-x\sqrt{-1}}$. Per determinare ora le coſtanti arbitrarie A, B, C, D ſi oſſervi, che quando $x = 0$, diventa $S = 0$, $\frac{dS}{dx} = 0$, $\frac{ddS}{dx^2} = 1$, $\frac{d^3S}{dx^3} = 0$. Dunque ſi avranno le equazioni ſeguenti

1.ª $A + B + C + D = 0$

2.ª $A - B + C\sqrt{-1} - D\sqrt{-1} = 0$

3.ª $A + B - C - D = 1$

4.ª $A - B - C\sqrt{-1} + D\sqrt{-1} = 0$. Sommando la 2.ª e la 4.ª ſi ha $2A - 2B = 0$, cioè $A = B$; e ſommando la prima e la 3.ª naſce $2A + 2B = 1$, ovvero $A = B = \frac{1}{4}$.

Poſto queſto valore nella 1.^{a} ſi ha $C+D=-\frac{1}{2}$; ma dall' ultima ſi ottiene $C=D$; dunque $C=D=-\frac{1}{4}$. Laonde

$$S=\frac{1}{4}e^{x}+\frac{1}{4}e^{-x}-\frac{1}{4}e^{x\sqrt{-1}}-\frac{1}{4}e^{-x\sqrt{-1}}=\frac{e^{2x}+1}{4e^{x}}$$

$$-\frac{1}{4}(\text{coſ.}\,x+\text{ſen.}\,x.\sqrt{-1})-\frac{1}{4}(\text{coſ.}\,x-\text{ſen.}\,x.\sqrt{-1})$$

$$=\frac{e^{2x}+1}{4e^{x}}-\frac{1}{2}\text{coſ.}\,x.$$ Il che era ecc.

PROBLEMA VI.

Sommare la ſerie $1+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^9}{1.2.3\ldots9}+\frac{x^{12}}{1.2.3\ldots12}+\text{ecc.}=S$.

SOLUZIONE.

Si trova $dS=\frac{x^2dx}{1.2}+\frac{x^5dx}{1.2.3.4.5}+\frac{x^8dx}{1.2.3\ldots8}+\frac{x^{11}dx}{1.2.3\ldots11}+\text{ecc.}$;

$$ddS=\frac{xdx^2}{1}+\frac{x^4dx^2}{1.2.3.4}+\frac{x^7dx^2}{1.2.3\ldots7}+\frac{x^{10}dx^2}{1.2.3\ldots10}+\text{ecc.};$$

$$d^3S=dx^3+\frac{x^3dx^3}{1.2.3}+\frac{x^6dx^3}{1.2.3\ldots6}+\frac{x^9dx^3}{1.2.3\ldots9}+\text{ecc.}=$$

$$dx^3\left(1+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^6}{1.2.3\ldots6}+\frac{x^9}{1.2.3\ldots9}+\text{ecc.}\right)=Sdx^3.$$ Perciò pigliando $S=Ae^{mx}$ per integrale *particolare* dell' equazione *lineare* $d^3S=Sdx^3$, ſi ha $dS=Amdxe^{mx}$, $ddS=Am^2dx^2e^{mx}$, $d^3S=Am^3dx^3e^{mx}=Sdx^3=Ae^{mx}dx^3$; ond'è $m^3=1$, ed $m=1$, $m'=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $m''=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

Laonde l' integrale completo ſarà $S=Ae^{x}$ $+Be^{(-x):2}.e^{(x\sqrt{3}):2.\sqrt{-1}}+Ce^{(-x):2}.e^{(-x\sqrt{3}):2.\sqrt{-1}}=Ae^{x}$

$+Be^{(-x):2}\left(\text{coſ.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}+\text{ſen.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right)+Ce^{(-x):2}$ $\left(\text{coſ.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}-\text{ſen.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}.\sqrt{-1}\right)=Ae^{x}+(B+C)\,e^{(-x):2}\times$ $\text{coſ.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}+(B-C)\,e^{(-x):2}\,\text{ſen.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}.\sqrt{-1}$. Ora, quando $x=0$ diventa $S=1$, $dS=0$, $ddS=0$, cioè

1.° $A+(B+C)=1$

2.° $A-\frac{(B+C)}{2}+\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}=0$

3.° $A-\frac{(B+C)}{2}-\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}=0$. Sottraggo la 3.ª dalla 2.ª, ed ho $(B-C)=0$. Dalla 2.ª poi ottengo $A=\left(\frac{B+C}{2}\right)$; e dalla 1.ª $A=1-(B+C)$, ond' è $\frac{(B+C)}{2}=1-(B+C)$, cioè $(B+C)=\frac{2}{3}$, $A=\frac{1}{3}$. Dunque $S=\frac{1}{3}e^{x}+\frac{2}{3}e^{(-x):2}\,\text{coſ.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Il che era ecc.

PROBLEMA VII.

Sommare la ſerie $x+\frac{x^{4}}{1.2.3.4}+\frac{x^{7}}{1.2.3\ldots7}+\frac{x^{10}}{1.2.3\ldots10}$ $+$ ecc. $=S$.

SOLUZIONE.

Preſi i differenziali ſi ha $dS=dx+\frac{x^{3}dx}{1.2.3}+\frac{x^{6}dx}{1.2.3\ldots6}$ $+\frac{x^{9}dx}{1.2.3\ldots9}+$ ecc.; $ddS=\frac{x^{2}dx^{2}}{1.2}+\frac{x^{5}dx^{2}}{1.2.3.4.5}+\frac{x^{8}dx^{2}}{1.2.3\ldots8}$ $+$ ecc.; $d^{3}S=\frac{xdx^{3}}{1}+\frac{x^{4}dx^{3}}{1.2.3.4}+\frac{x^{7}dx^{3}}{1.2.3\ldots7}+$ ecc.

$= dx^3\left(x + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^7}{1.2.3\ldots7} + \text{ecc.}\right) = Sdx^3$. Avutaſi ora l' equazione differenziale lineare $d^3S = Sdx^3$, pongaſi $S = Ae^{mx}$, onde $dS = Amdxe^{mx}$, $ddS = Am^2dx^2e^{mx}$, $d^3S = Am^3dx^3e^{mx}$, il qual valore ſoſtituito nell' equazione $d^3S = Sdx^3$ dà $Am^3dx^3e^{mx} = Sdx^3 = Ae^{mx}dx^3$, e quindi $m^3 = 1$, cioè $m = 1$ $m'' = \frac{-1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}$, $m' = \frac{-1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}$. Laonde l' integrale completo dell' equazione $d^3S = Sdx^3$ ſarà $S = Ae^{mx} + Be^{m'x} + Ce^{m''x} = Ae^x + (B+C)e^{(-x):2}\cos.\frac{x\sqrt{3}}{2} + (B-C)e^{(-x):2}\operatorname{ſen}.\frac{x\sqrt{3}}{2}.\sqrt{-1}$.

Ora ſi rifletta, che quando $x = 0$, $S = 0$; $\frac{dS}{dx} = 1$; $ddS = 0$; onde

1.ª $A + (B+C) = 0$.
2.ª $A - \frac{(B+C)}{2} + \frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = 1$.
3.ª $A - \frac{(B+C)}{2} - \frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = 0$.

Da queſta terza equazione ſi ottiene $\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = A - \frac{(B+C)}{2}$, il qual valore ſoſtituito nella ſeconda dà $2A - (B+C) = 1$, ed in queſta ſurrogando il valore $A = -(B+C)$ cavato dalla prima, ſi ottiene $(B+C) = -\frac{1}{3}$, $A = \frac{1}{3}$, $(B-C)\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Laonde $S = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{(-x):2}\cos.\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{(-x):2}\operatorname{ſen}.\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Il che era ecc.

PROBLEMA VIII.

Sommare la ſerie $\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^8}{1.2.3....8}$ $+ \frac{x^{11}}{1.2.3....11} + \text{ecc.} = S$.

SOLUZIONE

Pigliati i differenziali naſcono le equazioni

$$dS = xdx + \frac{x^4dx}{1.2.3.4} + \frac{x^7dx}{1.2.3....7} + \frac{x^{10}dx}{1.2.3....10} + \text{ecc.};$$

$$ddS = dx^2 + \frac{x^3dx^2}{1.2.3} + \frac{x^6dx^2}{1.2.3....6} + \frac{x^9dx^2}{1.2.3....9} + \text{ecc.};$$

$$d^3S = \frac{x^2dx^3}{1.2} + \frac{x^5dx^3}{1.2.3.4.5} + \frac{x^8dx^3}{1.2.3....8} + \text{ecc.}$$

$$= dx^3\left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^8}{1.2.3....8} + \text{ecc.}\right) = Sdx^3.$$ Trattiſi ora l' equazione differenziale lineare $d^3S = Sdx^3$ come dianzi ponendo $S = Ae^{mx}$; ſicchè riſulterà l' integrale completo

$$S = Ae^x + (B+C)e^{(-x):2}\,\text{coſ.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2} + (B-C)e^{(-x):2} \times \text{ſen.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}\,.\sqrt{-1}\,.$$ Se pertanto ſi conſidera, che quando $x = 0$, diventa $S = 0$, $dS = 0$, $\frac{ddS}{dx^2} = 1$, naſcono le tre ſeguenti equazioni.

$1^a.\ A + (B+C) = 0;$

$2^a.\ A - \frac{(B+C)}{2} + \frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = 0$

$3^a.\ A - \frac{(B+C)}{2} - \frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = 1$. Dalla 2^a. ſi ottiene $A - \frac{(B+C)}{2} = -\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}$, che ſurrogato nella 3ª. dà $2A-(B+C)=1$, ed in queſta ſoſtituendo il valore della prima $A=-(B+C)$, ſi trova per fine $(B+C)=-\frac{1}{3}, A=\frac{1}{3}, (B-C)\sqrt{-1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dunque $S=\frac{1}{3}e^{x}-\frac{1}{3}e^{(-x):2}\,\text{coſ.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{(-x):2}\,\text{ſen.}\,\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Il che era ecc.

PROBLEMA IX.

Trovare la ſomma generale di tutte le ſerie della forma $\frac{x^{r}}{1.2.3....r}+\frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)}+\frac{x^{r+2n}}{1.2.3....(r+2n)}+\frac{x^{r+3n}}{1.2.3....(r+3n)}+\text{ecc.}=S$, *ſupponendo* r, n *numeri interi affermativi*.

SOLUZIONE.

Caſo I°. $n>r$.

Preſo il differenziale $n.^{eſimo}$ di detta ſerie, ſi vede facilmente, che naſcerà $d^{n}S=\frac{x^{r}dx^{n}}{1.2.3....r}+\frac{x^{r+n}dx^{n}}{1.2.3....(r+n)}+\frac{x^{r+2n}dx^{n}}{1.2.3....(r+2n)}+\text{ecc.}=dx^{n}\left(\frac{x^{r}}{1.2.3....r}+\frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)}+\frac{x^{r+2n}}{1.2.3....(r+2n)}+\text{ecc.}\right)=Sdx^{n}$. Se ora per la nota teoria delle equazioni differenziali *lineari*, ſi aſſume $S=Ae^{mx}$ per integrale particolare dell' equazione lineare $d^{n}S=Sdx^{n}$, è chiaro che ſi avrà $d^{n}S=Am^{n}e^{mx}dx^{n}=Sdx^{n}=Aem^{x}dx^{n}$, d' onde ſi trae $m^{n}=1$. Preſe pertanto le n radici dell' equazione $m^{n}=1$ le quali (eſſendo n pari) ſono $1, -1, a+b\sqrt{-1}, a-b\sqrt{-1}, f+g\sqrt{-1}, f-g\sqrt{-1}$, ecc. ſi otterrà l' integrale completo dell' equazione $d^{n}S=Sdx^{n}$, il quale ſarà di queſta forma $Ae^{x}+Be^{-x}+Ce^{ax+bx\sqrt{-1}}+De^{ax-bx\sqrt{-1}}+Ee^{fx+gx\sqrt{-1}}+Fe^{fx-gx\sqrt{-1}}+\text{ecc.}=Ae^{x}+Be^{-x}$

$+(C+D)e^{ax}$ coſ. $bx+(C-D)e^{ax}$ ſen. $bx.\sqrt{-1}+(E+F)e^{fx}$ coſ. $g.x+(E-F)\sqrt{-1}$. ſen. $gx+$ ecc. Per determinare poi le coſtanti arbitrarie A, B, C, D, ecc. convien riſolvere le n ſeguenti equazioni

1ª. $A+B+C+D+E+F+$ ecc. $=0$,

2ª. $A-B+(a+b\sqrt{-1})C+(a-b\sqrt{-1})D+(f+g\sqrt{-1})E$
$+(f-g\sqrt{-1})F+$ ecc. $=0$,

3ª. $A+B+(a+b\sqrt{-1})^2C+(a-b\sqrt{-1})^2D+(f+g\sqrt{-1})^2E$
$+(f-g\sqrt{-1})F+$ ecc. $=0$,

4ª. $A-B+(a+b\sqrt{-1})^3C+(a-b\sqrt{-1})^3D+(f+g\sqrt{-1})^3E$
$+(f-g\sqrt{-1})F+$ ecc. $=0$,

ecc.

:

:

:

$(r+1)$ª. $A\pm B+(a+b\sqrt{-1})^rC+(a-b\sqrt{-1})^rD+(f+g\sqrt{-1})^rE$
$+(f-g\sqrt{-1})^rF+$ ecc. $=1$

:

:

:

nª $A-B+(a+b\sqrt{-1})^{n-1}C+(a-b\sqrt{-1})^{n-1}D$
$+(f+g\sqrt{-1})^{n-1}E+(f-g\sqrt{-1})^{n-1}F+$ ecc. $=0$.

Queſte derivano dall' eſſere, quando $x=0$, ancora $S=0$, $dS=0$, $ddS=0$, ecc... $\frac{d^rS}{dx^r}=1$........ $d^{n-1}S=0$, ed il doppio ſegno nella $(r+1)$ª poſto al B ſerve pel doppio caſo in cui può trovarſi r di pari o diſpari, cioè eſſendo r pari vale il ſegno $+$ e vale il ſegno $-$ quando r è diſpari. Se in luogo d'eſſere n pari, come abbiamo ſuppoſto, foſſe diſpari, allora mancherà una delle due radici reali, cioè -1; e perciò ſarà $B=0$, e tutto il reſto ſarà come ſopra, con avvertire però che a, b, f, g, ecc. non ſaranno più quelli di prima.

Caſo

Caſo II°. $n = r$.

Si aggiunga alla ſerie S l' unità, e ſi faccia $S' = S + 1$

$$= 1 + \frac{x^r}{1.2.3\ldots r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3\ldots 2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3\ldots 3r} + \text{ecc.}$$

Di qui ſi deduce $d^rS' = dx^r + \frac{x^r dx^r}{1.2.3\ldots r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3\ldots 2r} + \text{ecc.}$

$$= dx^r \left(1 + \frac{x^r}{1.2.3\ldots r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3\ldots 2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3\ldots 3r} + \text{ecc.} \right) = S'dx^r.$$

Sicchè prendendo Ae^{mx} per integrale particolare dell' equazione $d^rS' = S'dx^r$, ed eſſendo $d^rS' = Am^r e^{mx} dx^r = S'dx^r = Ae^{mx} dx^r$, e quindi $m^r = 1$, ſi trovino le r radici di queſt' ultima equazione, che ſaranno, nel ſuppoſto di r pari, $1, -1, \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}, \gamma + \delta\sqrt{-1}, \gamma - \delta\sqrt{-1}$, ecc. Laonde l' integrale completo dell' equazione differenziale ſarà $Ae^x + Be^{-x}$ $+ Ce^{\alpha x + \beta x \sqrt{-1}} + De^{\alpha x - \beta x \sqrt{-1}} + Ee^{\gamma x + \delta x \sqrt{-1}} + Fe^{\gamma x - \delta x \sqrt{-1}}$ $+ \text{ecc.} = Ae^x + Be^{-x} + (C+D)e^{\alpha x} \,\text{coſ.}\, \beta x + (C-D)\sqrt{-1}\,.\,e^{\alpha x} \times$ $\text{ſen.}\, \beta x + (E+F)e^{\gamma x} \,\text{coſ.}\, \delta x + (E-F)\sqrt{-1}\,.\,e^{\gamma x} \,\text{ſen.}\, \delta x + \text{ecc.}$ Siccome per ſuppoſto $x = 0$, ſi ha $S' = 1, dS' = 0, ddS = 0$, $\ldots\, d^{r-1}S = 0$, quindi ſi avranno per la determinazione delle n coſtanti A, B, C, D, E, F, ecc. le ſeguenti n equazioni

1°. $A + B + C + D + E + F + \text{ecc.} = 1$

2°. $A - B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})E$
$\quad + (\gamma - \delta\sqrt{-1})F + \text{ecc.} = 0$

3°. $A + B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})^2 C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^2 D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^2 E$
$\quad + (\gamma - \delta\sqrt{-1})^2 F + \text{ecc.} = 0$

4°. $A - B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})^3 C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^3 D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^3 E$
$\quad + (\gamma - \delta\sqrt{-1})^3 F + \text{ecc.} = 0$

ecc.

:

:

n°. $A - B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})^{n-1} C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^{n-1} D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^{n-1} E$
$\quad + (\gamma - \delta\sqrt{-1})^{n-1} F + \text{ecc.} = 0$.

Dunque la ſomma ricercata $S = S' - 1 = Ae^{x} + Be^{-x} - 1 + (C + D)e^{\alpha x}\,\text{coſ.}\,\beta x + (C - D)e^{\alpha x}\sqrt{-1}\,.\,\text{ſen.}\,\beta x + (E + F)e^{\gamma x}\,\text{coſ.}\,\delta x + (E - F)\sqrt{-1}\,.\,e^{\gamma x}\,\text{ſen.}\,\delta x +$ ecc. Anche qui ſi avverta, che nel caſo di n diſpari ſarà $B = 0$

Caſo III. $n < r$.

Alla propoſta ſerie $S = \frac{x^{r}}{1.2.3\ldots r} + \frac{x^{r+n}}{1.2.3\ldots(r+n)} + \frac{x^{r+2n}}{1.2.3\ldots(r+2n)} + \frac{x^{r+3n}}{1.2.3\ldots(r+3n)} +$ ecc. ſi aggiungano tanti termini iniziali $\frac{x^{r-n}}{1.2.3\ldots(r-n)} + \frac{x^{r-2n}}{1.2.3\ldots(r-2n)} + \frac{x^{r-3n}}{1.2.3\ldots(r-3n)} + \ldots\ldots + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3\ldots(r-\lambda n)}$ fino a che l' eſponente $r - \lambda n$ di x diventa $< n$, oppure $= n$, e ſi faccia

$$S + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3\ldots(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3\ldots(r-(\lambda-1)n)} + \ldots\ldots \frac{x^{r-2n}}{1.2.3\ldots(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3\ldots(r-n)} = \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3\ldots(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3\ldots(r-(\lambda-1)n)} + \ldots\ldots \frac{x^{r-2n}}{1.2.3\ldots(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3\ldots(r-n)} + \frac{x^{r}}{1.2.3\ldots r} + \frac{x^{r+n}}{1.2.3\ldots(r+n)} + \frac{x^{r+2n}}{1.2.3\ldots(r+2n)} + \frac{x^{r+3n}}{1.2.3\ldots(r+3n)} + \frac{x^{r+4n}}{1.2.3\ldots(r+4n)} + \text{ecc.} = S'.$$

Se ora ſi prende della ſerie S' il differenziale $n.^{\text{eſimo}}$, ſi ſcorge facilmente, per eſſere $r - \lambda n < n$, che riſulta

$$d^{n}S' = \frac{x^{r-\lambda n}dx^{n}}{1.2.3\ldots(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}\,dx^{n}}{1.2.3\ldots(r-(\lambda-1)n)} + \frac{x^{r-(\lambda-2)n}\,dx^{n}}{1.2.3\ldots(r-(\lambda-2)n)} + \ldots\ldots + \frac{x^{r-2n}dx^{n}}{1.2.3\ldots(r-2n)} + \frac{x^{r-n}dx^{n}}{1.2.3\ldots(r-n)} + \frac{x^{r}dx^{n}}{1.2.3\ldots r} + \frac{x^{r+n}dx^{n}}{1.2.3\ldots(r+n)} + \frac{x^{r+2n}dx^{n}}{1.2.3\ldots(r+2n)} + \text{ecc.}$$

$$= dx^n \left(\frac{x^{r - \lambda n}}{1.2.3....(r - \lambda n)} + \frac{x^{r - (\lambda - 1)n}}{1.2.3....(r - (\lambda - 1)n)} + \ldots\ldots \right.$$
$$+ \frac{x^{r - 2n}}{1.2.3....(r - 2n)} + \frac{x^{r - n}}{1.2.3....(r - 2n)} \left(+ \frac{x^r}{1.2.3....r} \right.$$
$$\left. + \frac{x^{r + n}}{1.2.3....(r + n)} + \frac{x^{r + 2n}}{1.2.3...(r + 2n)} + \text{ecc.} \right) = S' dx^n.$$ Conſiderata pertanto l' equazione lineare differenziale di ordine $n.^{\text{eſimo}}$ $d^n S' = S\, dx^n$, è noto dalla teoria di tali equazioni, che un ſuo integrale particolare ſarà della forma $S' = Ae^{mx}$; d' onde ſi raccoglie $d^n S' = Am^n e^{mx} dx^n = S dx^n = Ae^{mx} dx^n$, e quindi $m^n = 1$. Trovate le n radici dell' equazione $m^n = 1$, le quali, ſuppoſto n pari, ſaranno 1, -1, $\mu + \upsilon\sqrt{-1}$, $\mu - \upsilon\sqrt{-1}$, $\phi + \omega\sqrt{-1}$, $\phi - \omega\sqrt{-1}$, ecc. ſi avrà l' integrale completo dell' equazione $d^n S' = S\, dx^n$ eſpreſſo da

$$Ae^x + Be^{-x} + Ce^{\mu x + \upsilon x\sqrt{-1}} + De^{\mu x - \upsilon x\sqrt{-1}} + Ee^{\phi x + \omega x\sqrt{-1}}$$
$$+ Fe^{\phi x - \omega x\sqrt{-1}} + \text{ecc.} = \frac{Ae^{2x} + B}{e^x} + (C + D)e^{\mu x} \text{coſ.}\, \upsilon x$$
$$+ (C - D)\sqrt{-1}.\, e^{\mu x} \text{ſen.}\, \upsilon x + (E + F)\, e^{\phi x} \text{coſ.}\, \omega x$$
$$+ (E - F)\sqrt{-1}.\, e^{\phi x} \text{ſen.}\, \omega x + \text{ecc.}$$ Ora ſiccome ſi ha

$$S' = 0,\ dS' = 0,\ ddS' = 0,\ \text{ecc.....}\ \frac{d^{(r - \lambda n)} S}{dx^{(r - \lambda n)}} = 1, \ldots\ldots d^{n-1} S = 0$$

nel caſo di $x = 0$; quindi per determinare le coſtanti A, B, C, D, E, F, ecc. ſi preſentano da riſolvere le n ſeguenti equazioni.

1.° $A + B + C + D + E + F + \text{ecc....} = 0$

2.° $A - B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})\, C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})\, D + (\phi + \omega\sqrt{-1})\, E$
$+ (\phi - \omega\sqrt{-1})\, F + \text{ecc....} = 0$

3.° $A + B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})^2 C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})^2 D + (\phi + \omega\sqrt{-1})^2 E$
$+ (\phi - \omega\sqrt{-1})^2 F + \text{ecc.....} = 0$

4.° $A - B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})^3 C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})^3 D + (\phi + \omega\sqrt{-1})^3 E$
$+ (\phi - \omega\sqrt{-1})^3 F + \text{ecc.....} = 0$

:
:
:

$$((r-\lambda n)+1)^{a}.\ A \pm B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})^{r-\lambda n} C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})^{r-\lambda n} D$$
$$+ (\phi + \omega\sqrt{-1})^{r-\lambda n} E + (\phi - \omega\sqrt{-1})^{r-\lambda n} F + \text{ecc.} = 1$$
$$\vdots$$
$$n.^{\circ}\ A - B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})^{n-1} C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})^{n-1} D$$
$$+ (\phi + \omega\sqrt{-1})^{n-1} E + (\phi - \omega\sqrt{-1})^{n-1} F + \text{ecc.} = 0.$$

Il doppio ſegno premeſſo al B nella $((r-\lambda n)+1)^{a}$. ſerve come nel I.° caſo, cioè vale il $+$ quando $(r-\lambda n)$ è pari ed il $-$ quando $(r-\lambda n)$ è diſpari. Qui pure è da avvertirſi, che ſe n ſarà diſpari, diverrà $B=0$ a motivo della mancanza della radice -1 nell' equazione $m^{n}=1$. Dunque

$$S + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} = S' = \frac{Ae^{2x}+B}{e^{x}}$$
$$+ (C+D)\, e^{\mu x} \text{coſ.}\, \upsilon x + (C-D)\, e^{\mu x} \sqrt{-1}\,.\,\text{ſen.}\, \upsilon x$$
$$+ (E+F)\, e^{\phi x} \text{coſ.}\, \omega x + (E-F) \sqrt{-1}\,.\, e^{\phi x}\, \text{ſen.}\, \omega x + \text{ecc.}$$

Conſeguentemente la ſomma ricercata $S = \dfrac{Ae^{2x}+B}{e^{x}}$

$$- \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)} - \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)} - \text{ecc.}\ldots\ldots$$
$$- \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} - \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} + (C+D)\, e^{\mu x}\, \text{coſ.}\, \upsilon x$$
$$+ (C-D)\sqrt{-1}\,.\, e^{\mu x}\, \text{ſen.}\, \upsilon x + (E+F)\, e^{\phi x}\, \text{coſ.}\, \omega x$$
$$+ (E-F)\sqrt{-1}\,.\, e^{\phi x}\, \text{ſen.}\, \omega x + \text{ecc.}$$ Il che era ecc.

ARTICOLO II.

Della ſomma di alcune Serie di Simpſon, ed altre.

Il celebre *Tommaſo Simpſon* ne' ſuoi *Eſſays on ſeveral curious and uſeful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks* facendo uſo del *Metodo* così detto *degl' Incrementi* ritrova la ſomma di quelle ſerie numeriche, i di cui termini hanno per numeratore l' unità, e per denominatore un prodotto d' un' egual moltitudine di numeri naturali conſecutivi, il primo de' quali in ciaſcun termine è ſempre il ſecondo del termine precedente. Ma un metodo più generale, per conſeguire ſiffatte ſomme anche nel caſo che i numeratori dei termini delle ſerie ſieno le poteſtà d' un qualche numero dotate d' un eſponente eguale all' ultimo fattore del denominatore di ciaſcun termine, e che il primo fattore del denominatore di qualunque termine ſia ſempre non il ſecondo, ma il terzo, o il quarto, o il quinto ecc. fattore del denominatore del termine proſſimo precedente, un tal metodo, diſſi, ci viene ſomminiſtrato dalla comune Teoria degl' *Integrali replicati*, la quale come troppo ovvia e familiare agli Analiſti non ha qui biſogno di eſſere poſta in maggior luce, baſtando ſolo di moſtrarne l' applicazione e l' uſo ne' ſeguenti Problemi.

PROBLEMA I.

Sommare la ſerie $S = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \frac{x^{n+4}}{(n+3)(n+4)} +$ ecc. *in inf.*

SOLUZIONE.

Differenziata due volte l' equazione nell' ipoteſi di dx coſtante, naſce $ddS = dx^2(x^{n-1} + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \text{ecc.}) = dx^2 \times \frac{x^{n-1}}{1-x}$. Perlochè $\frac{ddS}{dx} = \frac{x^{n-1}dx}{1-x}$, ed integrando nella detta ipoteſi, $\frac{dS}{dx} = \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + A$, ovvero $dS = dx \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + Adx$, e nuovamente integrando, ſi ottiene $S = \int dx \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + Ax + B = x \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} - \int \frac{x^n dx}{1-x} + Ax + B$. Il che era ecc.

COROLLARIO.

Suppongaſi $n=1$, e ſi avrà $S=-x\log.(1-x)+x+\log.(1-x)+Ax+B$; e ſiccome dee ſvanire S allorchè $x=0$, naſcerà $B=0$. Inoltre eſſendo $\frac{dS}{dx}=-\log.(1-x)+A=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+$ ecc.; e però annullandoſi $\frac{dS}{dx}$ inſieme con x, ſi otterrà $A=0$. Laonde la ſerie $\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^5}{4.5}+$ ecc. *in inf.* $=x-x\log.(1-x)+\log.(1-x)=x+\log.\frac{1-x}{(1-x)^x}$. Se $x=1$, naſce $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+$ ecc. $=1$.

SCOLIO

Si avverta qui attentamente, che nell' ipoteſi di $n=1$ il valore della ſerie $\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^5}{4.5}+$ ecc. cioè $x+\log.\frac{1-x}{(1-x)^x}$ contiene un logaritmo d' un numero negativo tutte le volte che x è un intero pari, ovvero una frazione ſpuria, avente un pari per numeratore e un diſpari per denominatore. Si avverta però altreſì che la ſerie è divergente allorchè $x>1$.

PROBLEMA II.

Sommare la ſerie $S=\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^5}{3.4.5}+\frac{x^6}{4.5.6}+$ ecc. in inf.

SOLUZIONE.

Si differenzj l' equazione, e ſi otterrà $dS = dx\left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} + \text{ecc.}\right)$; ſi torni a differenziare, e naſcerà $ddS = dx^2\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{ecc.}\right)$. Si differenzj la terza volta, e riſulterà $d^3S = dx^3\,(1 + x + x^2 + x^3 + \text{ecc.}) = dx^3 \times \frac{1}{1-x}$; e quindi $\frac{d^3S}{dx^2} = \frac{dx}{1-x}$. L' integrale di queſta equazione ſomminiſtra $\frac{d^2S}{dx^2} = -\log.(1-x)$ ſenza coſtante, perchè, poſto $x = 0$, ſpariſce l' uno e l' altro membro della equazione. Moltiplicando poi queſta per dx, ſicchè venga $\frac{d^2S}{dx} = -dx \log.(1-x)$, ed integrando di nuovo, ſi ottiene $\frac{dS}{dx} = -x\log.(1-x) + \int -\frac{xdx}{1-x} = -x\log.(1-x) + \int\left(dx - \frac{dx}{1-x}\right) = -x\log.(1-x) + x + \log.(1-x)$, ſenza coſtante per la ragione precedente. Sicchè moltiplicando per dx naſcerà $dS = xdx + dx\log.(1-x) - xdx\log.(1-x)$, e preſo nuovamente l' integrale, ſi trova

$$S = \frac{1}{2}x^2 + x\log.(1-x) - x - \log.(1-x) - \frac{1}{2}x^2\log.(1-x) + \int -\frac{\frac{1}{2}x^2dx}{1-x} = \frac{1}{2}x^2 + x\log.(1-x) - x - \log.(1-x) - \frac{1}{2}x^2\log.(1-x) + \int\left(\frac{1}{2}xdx + \frac{1}{2}dx - \frac{\frac{1}{2}dx}{1-x}\right) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log.(1-x) + x\log.(1-x) - \frac{1}{2}x^2\log.(1-x),$$

ſenza coſtante per la detta ragione. Il che era ecc.

COROLLARIO.

Suppoſto $x=1$, ſi ha la ſomma della ſerie $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\text{ecc.}=\frac{1}{1.2.2}$.

PROBLEMA III.

Sommare la ſerie $S=\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^6}{3.4.5.6}+\frac{x^7}{4.5.6.7}+\text{ecc.}$

SOLUZIONE.

Il primo differenziale dà $dS=dx\left(\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^5}{3.4.5}+\frac{x^6}{4.5.6}+\text{ecc.}\right)$, cioè dx moltiplicato nella ſerie del Problema precedente; ſicchè $dS=dx\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log.(1-x)+x\log.(1-x)-\frac{1}{2}x^2\log.(1-x)\right)$, ed integrando proviene $S=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\log.(1-x)+\int-\frac{\frac{1}{2}xdx}{1-x}+\frac{1}{2}x^2\times\log.(1-x)+\int\frac{\frac{1}{2}x^2dx}{1-x}-\frac{1}{2.3}x^3\log.(1-x)+\int-\frac{\frac{1}{6}x^3dx}{1-x}$

$$=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\log.(1-x)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log.(1-x)$$

$$+\frac{1}{2}x^2\log.(1-x)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log.(1-x)$$

$-\frac{1}{2.3}$

$$-\frac{1}{2\cdot3}x^3\log.(1-x)+\frac{1}{2\cdot3\cdot3}x^3+\frac{1}{2\cdot2\cdot3}x^2+\frac{1}{2\cdot3}x+\frac{1}{2\cdot3}$$
$$\log.(1-x)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot3}\right)x^3-\frac{5}{12}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\log.(1-x)$$
$$-\frac{1}{2}x\log.(1-x)+\frac{1}{2}x^2\log.(1-x)-\frac{1}{6}x^3\log.(1-x).$$ Il che ecc.

COROLLARIO.

Poſta $x=1$, ſi ha $S=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7}+$ ecc. $=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot3}-\frac{5}{12}+\frac{1}{6}=\frac{3\cdot3+2-5\cdot3+6}{2\cdot2\cdot3\cdot3}$ $=\frac{9+2+6-15}{2\cdot2\cdot3\cdot3}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot3}$.

PROBLEMA IV.

Sommare la ſerie $S=\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{x^7}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\frac{x^8}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+$ ecc. in inf.

SOLUZIONE.

Il differenziale dell' equazione ſomminiſtra $dS=dx\left(\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{x^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{x^7}{4\cdot5\cdot6\cdot7}+\text{ecc.}\right)$, che pel Probl. prec. è $=dx\left(\frac{11}{36}x^3-\frac{5}{12}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\log.(1-x)\right.$ $\left.-\frac{1}{2}x\log.(1-x)+\frac{1}{2}x^2\log.(1-x)-\frac{1}{6}x^3\log.(1-x)\right)$.

Dunque integrando ſarà $S=\frac{11}{36\cdot4}x^4-\frac{5}{12\cdot3}x^3+\frac{1}{6\cdot2}x^2$

$$+\frac{1}{6}x\log.(1-x)+\int\frac{\frac{1}{6}xdx}{1-x}-\frac{1}{4}x^2\log.(1-x)-\int\frac{\frac{1}{4}x^2dx}{1-x}$$

$$+\frac{1}{6}x^3\log.(1-x)+\int\frac{\frac{1}{6}x^3dx}{1-x}-\frac{1}{24}x^4\log.(1-x)$$

$$-\int\frac{\frac{1}{24}x^4dx}{1-x}=\frac{11}{4.36}x^4-\frac{5}{3.12}x^3+\frac{1}{2.6}x^2+\frac{1}{6}x\log.(1-x)$$

$$-\frac{1}{4}x^2\log.(1-x)+\frac{1}{6}x^3\log.(1-x)-\frac{1}{24}x^4\log.(1-x)$$

$$+\int\left(-\frac{1}{6}dx+\frac{\frac{1}{6}dx}{1-x}\right)+\int\left(\frac{1}{4}xdx+\frac{1}{4}dx-\frac{\frac{1}{4}dx}{1-x}\right)$$

$$+\int\left(-\frac{1}{6}x^2dx-\frac{1}{6}xdx-\frac{1}{6}dx+\frac{\frac{1}{6}dx}{1-x}\right)$$

$$+\int\left(\frac{1}{24}x^3dx+\frac{1}{24}x^2dx+\frac{1}{24}xdx+\frac{1}{24}dx-\frac{\frac{1}{24}dx}{1-x}\right)=$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{11}{4.36}\\+\frac{1}{4.24}\end{array}\right\}x^4\quad\left.\begin{array}{r}-\frac{5}{3.12}\\-\frac{1}{3.6}\\+\frac{1}{3.24}\end{array}\right\}x^3\quad\left.\begin{array}{r}+\frac{1}{2.6}\\+\frac{1}{2.4}\\-\frac{1}{2.6}\\+\frac{1}{2.24}\end{array}\right\}x^2$$

$$\left.\begin{array}{r}-\frac{1}{6}\\+\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}\\+\frac{1}{24}\end{array}\right\}x\quad\left.\begin{array}{r}-\frac{1}{6}\\+\frac{1}{4}\\+\frac{1}{24}\\-\frac{1}{6}\end{array}\right\}\log.(1-x)$$

$$+\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4\right)\log.(1-x)=\frac{25}{2.4.6.6}x^4$$

$$-\frac{13}{2.6.6}x^3+\frac{7}{2.4.6}x^2-\frac{1}{4.6}x+\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}x^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4\right)\log.(1-x).$$ Il che era ecc.

COROLLARIO.

Pigliando $x=1$ ne viene la ſomma $\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{2.3.4.5.6}$ $+\frac{1}{3.4.5.6.7}+\frac{1}{4.5.6.7.8}+\text{ecc.}=\frac{25}{2.4.6.6}-\frac{13}{2.6.6}+\frac{7}{2.4.6}$ $-\frac{1}{4.6}=\frac{1}{1.2.3.4.4}$.

PROBLEMA V.

Sommare la ſerie $S=\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}$ $+\frac{x^8}{3.4.5.6.7.8}+\text{ecc.}$

SOLUZIONE.

Dal differenziale dell' equazione ſe ne ha queſt' altra $dS=dx\left(\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\frac{x^7}{3.4.5.6.7}+\text{ecc.}\right)$, cioè pel Probl. prec. $dS=dx\left(\frac{25}{2.4.6.6}x^4-\frac{13}{2.6.6}x^3+\frac{7}{2.4.6}x^2\right.$ $\left.-\frac{1}{4.6}x\right)+dx\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4\right)\log.(1-x)$. Dunque integrando ſi ha $S=\frac{5}{2.4.6.6}x^5-\frac{13}{2.4.6.6}x^4$ $+\frac{7}{2.3.4.6}x^3-\frac{1}{2.4.6}x^2+\left(\frac{-x}{24}+\frac{1}{2.6}x^2-\frac{1}{3.4}x^3+\frac{1}{4.6}x^4\right.$

$$-\frac{1}{5\cdot 24}x^5\Big)\log.(1-x)$$

$$+\int dx\left(\frac{-\frac{1}{24}x+\frac{1}{2\cdot 6}x^2-\frac{1}{3\cdot 4}x^3+\frac{1}{4\cdot 6}x^4-\frac{1}{5\cdot 24}x^5}{1-x}\right).$$ E poichè l' integrale di queſt' ultimo termine è $=\frac{1}{24}x$

$$+\frac{1}{24}\log.(1-x)-\frac{1}{4\cdot 6}x^2-\frac{1}{2\cdot 6}x-\frac{1}{2\cdot 6}\log.(1-x)$$
$$+\frac{1}{3\cdot 3\cdot 4}x^3+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^2+\frac{1}{3\cdot 4}x+\frac{1}{3\cdot 4}\log.(1-x)-\frac{1}{4\cdot 4\cdot 6}x^4$$
$$-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^2-\frac{1}{4\cdot 6}x-\frac{1}{4\cdot 6}\log.(1-x)+\frac{1}{5\cdot 5\cdot 24}x^5$$
$$+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 24}x^4+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 24}x^3+\frac{1}{2\cdot 5\cdot 24}x^2+\frac{1}{5\cdot 24}x+\frac{1}{5\cdot 24}\log.(1-x),$$

ſe queſto ſi aggiugne agli altri, riſulta

$$S=\left.\begin{matrix}\frac{5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\\ +\frac{1}{4\cdot 5\cdot 5\cdot 6}\end{matrix}\right\}x^5 \quad \left.\begin{matrix}-\frac{13}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\\ -\frac{1}{4\cdot 4\cdot 6}\\ +\frac{1}{4\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\end{matrix}\right\}x^4 \quad \left.\begin{matrix}+\frac{7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6}\\ +\frac{1}{3\cdot 3\cdot 4}\\ -\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6}\\ +\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\end{matrix}\right\}x^3$$

$$\left.\begin{matrix}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}\\ -\frac{1}{4\cdot 6}\\ +\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\\ -\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}\\ +\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\end{matrix}\right\}x^2 \quad \left.\begin{matrix}+\frac{1}{4\cdot 6}\\ -\frac{1}{2\cdot 6}\\ +\frac{1}{3\cdot 4}\\ -\frac{1}{4\cdot 6}\\ +\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}\end{matrix}\right\}x \quad \left.\begin{matrix}+\frac{1}{4\cdot 6}\\ -\frac{1}{2\cdot 6}\\ +\frac{1}{3\cdot 4}\\ -\frac{1}{4\cdot 6}\\ +\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}\end{matrix}\right\}\log.(1-x)$$

$$+\left(\frac{-x}{4\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 6}x^2-\frac{1}{3\cdot 4}x^3+\frac{1}{4\cdot 6}x^4-\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}\right)\log.(1-x)$$

$$=\frac{137}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot 6\cdot 6}x^5-\frac{77}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^4+\frac{141}{2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^3-\frac{9}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^2$$

$$+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}x+\left(-\frac{1}{4\cdot 6}x+\frac{1}{2\cdot 6}x^2-\frac{1}{3\cdot 4}x^3+\frac{1}{4\cdot 6}x^4\right)\log.(1-x).$$

Il che era ecc.

COROLLARIO.

Aſſumendo, come dianzi, $x=1$, naſce la ſomma della ſerie $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}+$ ecc.

$$=\frac{137}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot 6\cdot 6}-\frac{77}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{141}{2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}-\frac{9}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 5}.$$

Ecco pertanto il ſeguente

Proſpetto delle Serie di Simpſon.

Serie	*Somme*
$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+$ ecc.	$=\frac{1}{1\cdot 1}$
$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+$ ecc.	$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2}$
$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+$ ecc.	$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3}$
$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+$ ecc.	$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4}$
$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+$ ecc.	$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 5}$
$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}+$ ecc.	$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 6}$

Serie *Somme*

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}$$

$$+\frac{1}{3.4.5.6.7.8.9.10}+\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.7}$$

ecc. ecc. ecc.

Dal che ſi vede, che la ſomma di ciaſcuna di queſte ſerie non è altro che il primo termine, dove in luogo dell' ultimo fattore del denominatore ſi ripete il penultimo.

E' coſa per altro aſſai rimarchevole, e che a primo aſpetto ſembra impoſſibile, che queſte ſerie Simpſoniane poſſono ſommarſi con una ſemplice ſottrazione aritmetica della ſerie propoſta da ſe medeſima mutilata del ſuo primo termine. Un tal modo di operare può vederſi ne' Teoremi ſeguenti.

Teoremi ſulle ſerie di Simpſon.

Dalla ſerie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{ecc.}=S$

togli $S-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\text{ecc.}$, ed avrai

TEOREMA I.

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\text{ecc.}=1$$

Dalla ſerie $S=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\text{ecc.}=1$

togli $S-\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\text{ecc.}=\frac{1}{1.2}$, ed avrai dividendo per 2,

TEOREMA II.

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{6.7.8}+\frac{1}{7.8.9}=\frac{1}{1.2.2}$$

Dalla ſerie $S = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \text{ecc.} = \frac{1}{1\cdot2\cdot2}$

togli $S - \frac{1}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \text{ecc.} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot2\cdot3}$,
ed hai dividendo per 3

TEOREMA III.

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot3}$$

Dalla ſerie $S = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \text{ecc.} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot3}$

togli $S - \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7} + \text{ecc.} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4}$,
ed hai dividendo per 4

TEOREMA IV.

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4}$$

Dalla ſerie $S = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}$
$+ \text{ecc.} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4}$.

togli $S - \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}$
$+ \frac{1}{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} + \text{ecc.} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4\cdot5}$,
ed hai dividendo per 5

TEOREMA V.

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot5}$$

Dalla ſerie $S = \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{4.5.6.7.8.9} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.5}$

togli $S - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} = \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{4.5.6.7.8.9} + \frac{1}{5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.5.6}$, ed hai dividendo per 6

TEOREMA VI.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9} + \frac{1}{4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6}$$

Dalla ſerie $S = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6}$

togli $S - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9} + \frac{1}{4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6.7}$, ed hai dividendo per 7

TEOREMA VII.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc,} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.7};$$

ecc. ecc. ecc.

PROBLEMA

PROBLEMA VI.

Sommare la ſerie $S = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^7}{5.6.7} + \frac{x^9}{7.8.9} + \text{ecc.}$

SOLUZIONE.

Il primo differenziale dell' equazione ſomminiſtra $dS = dx\left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} + \frac{x^8}{7.8} + \text{ecc.}\right)$; il ſecondo dà $ddS = dx^2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{ecc.}\right)$; il terzo preſenta $d^3S = dx^3\,(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \text{ecc.}) = \frac{dx^3}{1 - x^2}$. Ond' è $\frac{d^3S}{dx^2} = \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{\frac{1}{2}\,dx}{1 + x} + \frac{\frac{1}{2}\,dx}{1 - x}$. Quindi integrando naſce $\frac{ddS}{dx^2} = \frac{1}{2}\log.(1 + x) - \frac{1}{2}\log.(1 - x)$, ſenza coſtante perchè ſvaniſce con x l' uno e l' altro membro dell' equazione. Moltiplico ora per dx, ed ho $\frac{ddS}{dx} = \frac{1}{2}\,dx\log.(1 + x) - \frac{1}{2}\,dx\log.(1 - x)$, il di cui integrale è $\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}\,x\log.(1+x) - \int\frac{\frac{1}{2}\,xdx}{1 + x} - \frac{1}{2}\,x\log.(1 - x) - \int\frac{\frac{1}{2}\,xdx}{1 - x} = \frac{1}{2}\,x\log.(1 + x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log.(1 + x) - \frac{1}{2}x\log.(1 - x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log.(1 - x) = \left(\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\right)\log.(1 + x) - \left(\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\right)\log.(1 - x)$, ſenza coſtante come dianzi. Moltiplico di nuovo per dx, ed ottengo $S = \left(\frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\,xdx\right)\log.(1 + x) + \left(\frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{2}\,xdx\right)\log.(1 - x)$; e quindi integrando ritrovo $S = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2\right)\times$

$$\log.(1+x)+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\int\frac{\frac{1}{2}xdx+\frac{1}{4}x^2dx}{1+x}$$

$$+\int\frac{\frac{1}{2}xdx-\frac{1}{4}x^2dx}{1-x}=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1+x)$$

$$+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log.(1+x)-\frac{1}{8}x^2$$

$$+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\log.(1+x)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log.(1-x)+\frac{1}{8}x^2$$

$$+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\log.(1-x)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1+x)$$

$$-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\frac{1}{2}x.$$ Il che era ecc.

COROLLARIO.

Pongaſi $x=1$, e ſarà la ſomma della ſerie $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{7.8.9}+\frac{1}{9.10.11}+\text{ecc.}=\log.2-\frac{1}{2}$.

PROBLEMA VII.

Sommare la ſerie $S=\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^6}{3.4.5.6}+\frac{x^8}{5.6.7.8}+\frac{x^{10}}{7.8.9.10}+\text{ecc.}$

SOLUZIONE.

Il differenziale dell' equazione ſomminiſtra queſt' altra $dS=dx\left(\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{3.4.5}+\frac{x^7}{5.6.7}+\frac{x^9}{7.8.9}+\text{ecc.}\right)$, cioè pel *Probl. prec.* $dS=dx\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1+x)$ $-dx\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\frac{1}{2}xdx$. Perlochè integrando naſce

$$S = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right)\log.(1+x)$$

$$-\int \frac{\frac{1}{4}xdx + \frac{1}{4}x^2dx + \frac{1}{12}x^3dx}{1+x} - \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right)\times$$

$$\log.(1-x) - \int \frac{\frac{1}{4}xdx - \frac{1}{4}x^2dx + \frac{1}{12}x^3dx}{1-x} - \frac{1}{4}x^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right)\log.(1+x) - \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right)$$

$$\log.(1-x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\log.(1+x) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$- \frac{1}{4}\log.(1+x) - \frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{12}\log.(1+x)$$

$$+ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\log.(1-x) - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\log.(1-x)$$

$$+ \frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{12}\log.(1-x) - \frac{1}{4}x^2$$

$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right)\log.(1+x) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}x\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right)\log.(1-x) - \frac{5}{12}x^2.$$ Il che era ecc.

COROLLARIO.

Da ciò appariſce che la ſomma della ſerie $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{5.6.7.8} + \frac{1}{7.8.9.10} +$ ecc. $= \frac{2}{3}\log. 2 - \frac{5}{12}$.

I precedenti Problemi ſono più che baſtanti per dare un' adequata idea della maniera, che dee tenerſi per determinare la ſomma delle ſerie analoghe alle premeſſe, qualunque ſia nel denominatore d' un dato termine quel fattore, che prendeſi per primo nel termine ſuſſeguente.

ARTICOLO III.

Delle ſerie infinite delle potenze intere de' numeri naturali co' ſegni alternanti.

E' proprietà caratteriſtica di tutte le ſerie infinite *divergenti*, i di cui termini vanno vie maggiormente aumentandoſi di valore quanto più ſi ſcoſtano dal primo, di non ammettere *ſomma* propriamente detta, non potendo aſſegnarſi veruna quantità, a cui la ſerie divergente propoſta ſia preciſamente eguale, o a cui il valor della ſerie tanto più ſi avvicini, e ciò oltre ogni data differenza, quanto più termini ſi prendono della ſerie. Ma in quella vece ſi ricorre in queſti caſi alla *ſomma impropria* della ſerie, vale a dire a quella quantità o funzione, qualunque ella ſia, la quale, comunque ineguale al valore della data ſerie, genera però e produce col ſuo ſvolgimento mediante i conſueti artifizj analitici la ſerie medeſima. Ad una tal claſſe di ſerie ſi riferiſcono quelle, che vengono formate dalle potenze intere de' numeri naturali, preſe co' ſegni alternativi, e generalmente rappreſentate da
$1^n - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - 6^n + 7^n - 8^n + 9^n -$ ecc. in inf., eſſendo n un numero intero affermativo qualunque. L' *Eulero* nel ſuo *Calcolo Differenziale* con un metodo ingegnoſo, ma oltremodo lungo e laborioſo, determina la quantità o *frazione generatrice* di ſiffatte ſerie, e giugne a conſeguire le formole ſeguenti:

I. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{4}$

II. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{ecc} \ldots\ldots\ldots = 0$

III. $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = -\frac{2}{16}$

IV. $1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = 0$

V. $1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = \frac{16}{64}$

VI. $1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = 0$

VII. $1^7 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = -\frac{272}{256}$

VIII. $1^8 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = 0$

IX. $1^9 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \text{ecc} \ldots\ldots\ldots = \frac{7936}{1024}$

ecc. ecc. ecc.

Ma queſto gran Geometra dopo aver ritrovata l' eſpreſſione generale della *ſomma* d' un numero qualunque x di termini della ſerie propoſta, ed aver oſſervato, che del doppio ſegno $\pm$, di cui trovaſi affetta la detta eſpreſſione, dee valere il primo ne' caſi di x diſpari, il ſecondo in quelli di x pari, volendo poi farne l' applicazione al caſo di x infinito diſcorre così: *Quod ſi ergo* (Inſt. Calc. Diff. p. 500) x *fuerit numerus infinitus, quoniam is eſt neque par neque impar, hæc conſideratio ceſſare debet, ac proinde in ſumma termini ambigui ſunt rejiciendi: unde ſequitur, hujuſmodi ſerierum in infinitum continuatarum ſummam exprimi per ſolam quantitatem conſtantem adjiciendam.* Non pare che un tale ragionamento ſia per contentare la corrente de' Geometri, e a più d' uno certamente ſembrerà ſoſpetto e precipitoſo. Ecco pertanto due differenti ſempliciſſime dimoſtrazioni delle formole predette.

Dimoſtrazione I. delle Formole Euleriane.

Eſſendo $1 - x + x^2 - x^3 + \text{ecc.} = \frac{1}{1+x}$, ſi ha differenziando, e dividendo per dx, $-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \text{ecc.} = -\frac{1}{(1+x)^2}$, e moltiplicando per $-x$,

1.° $x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \text{ecc.} = \frac{x}{(1+x)^2} . (A)$.

Si differenzj parimenti queſt' ultima equazione, e ſi divida per x; e naſcerà $1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - \text{ecc.} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3}$; e moltiplicando per x, 2.° $x - 2^2x^2 + 3^2x^3 - 4^2x^4 + 5^2x^5 - 6^2x^6 + \text{ecc.} = \frac{(1-x)x}{(1+x)^3}$. (*B*).

Si prenda nuovamente il differenzial di queſt' ultima equazione, e dividendo per *dx* ſi ha $1 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + 5^3x^4 - 6^3x^5 + \text{ecc.} = \frac{1-2x}{(1+x)^3} - \frac{3x(1-x)}{(1+x)^4} = \frac{1-4x+xx}{(1+x)^4}$; onde moltiplicando per x, naſce

3.° $x - 2^3x^2 + 3^3x^3 - 4^3x^4 + \text{ecc.} = \frac{x(1-4x+xx)}{(1+x)^4}$. (*C*)

Differenzio ora queſta equazione, e divido per *dx*, ed ottengo $1 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + \text{ecc.} = \frac{1-4x+xx-4x+2xx}{(1+x)^4}$

$$- \frac{4x(1-4x+xx)}{(1+x)^5} = \frac{(1-8x+3xx)(1+x)-4x(1-4x+xx)}{(1+x)^5}$$

$= \frac{1-11x+11x^2-x^3}{(1+x)^5}$; e moltiplicando per x,

4.° $x - 2^4x^2 + 3^4x^3 - 4^4x^4 + 5^4x^5 - 6^4x^6 + \text{ecc.} = \frac{x(1-11x+11x^2-x^3)}{(1+x)^5}$. (*D*)

Prendo all' iſteſſo modo il differenziale di queſt' ultima equazione, e divido per *dx*, dal che ricavo

$$1 - 2^5x + 3^5x^2 - 4^5x^3 + \text{ecc.} = \frac{1-11x+11x^2-x^3-11x+22x^2-3x^3}{(1+x)^5}$$

$$- \frac{5x(1-11x+11x^2-x^3)}{(1+x)^6}$$

$$= \frac{(1-22x+33x^2-4x^3)(1+x)-5x+55x^2+55x^3+5x^4}{(1+x)^6}$$

$= \frac{1-26x+66x^2-26x^3+x^4}{(1+x)^6}$. Quindi moltiplicando per x, ſi trae

5.° $x - 2^5x^2 + 3^5x^3 - 4^5x^4 + 5^5x^5 - 6^5x^6 + \text{eccc.}$

$$= \frac{x(1-26x+66x^2-26x^3+x^4)}{(1+x)^6}. \; (E)$$

Proſieguo a differenziare l' equazione ora ottenuta, e divido per *dx*, $1 - 2^6x + 3^6x^2 - 4^6x^3 + 5^6x^4 - \text{ecc.}$

$$= \frac{1 - 26x + 66x^2 - 26x^3 + x^4 - 26x + 132x^2 - 78x^3 + 4x^4}{(1+x)^6}$$

$$- \frac{6x(1 - 26x + 66x^2 - 26x^3 + x^4}{(1+x)^7})$$

$$= \frac{(1-52x+198x^1-104x^3+5x^4)(1+x)-6x(1-26x+66x^2-26x^3+x^4)}{(1+x)^7}$$

$$= \frac{1 - 57x + 302x^2 - 302x^3 + 57x^4 - x^5}{(1+x)^7}$$. Laonde moltiplicando per x, ſi trova

6.° $x - 2^6x^2 + 3^6x^3 - 4^6x^4 +$ ecc.

$$= \frac{x(1 - 57x + 302x^2 - 302x^3 + 57x^4 - x^5)}{(1+x)^7} \quad (F)$$

Così proſeguendo ſempre ſi arriva a ritrovare quante altre ſi vogliono equazioni analoghe alle precedenti. Se pertanto nelle equazioni ritrovate (A), (B), (C), (D), (E), (F), ecc. ſi ſoſtituiſce l' unità in vece di x, eſſe ſi trasformano nelle ſeguenti

I. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ ecc. .... $= \frac{1}{4}$

II. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 +$ ecc. .... $= 0$

III. $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 +$ ecc. .... $= -\frac{2}{16}$

IV. $1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 +$ ecc. .... $= 0$

V. $1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 +$ ecc. .... $= \frac{16}{64}$

VI. $1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 +$ ecc. .... $= 0$

VII. $1^7 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 +$ ecc. .... $= -\frac{272}{256}$

VIII $1^8 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 +$ ecc. .... $= 0$

IX. $1^9 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 +$ ecc. .... $= \frac{7936}{1024}$

ecc. ecc. ecc.

Paſſo ora a dimoſtrar queſto ſteſſo in una maniera forſe più ſoddisfacente col mezzo delle ſerie infinite de' ſeni e coſeni degli angoli creſcenti in progreſſione aritmetica, e a tal oggetto premetto i due Lemmi ſeguenti,

LEMMA I.

Eſſendo x *un arco qualunque di cerchio deſcritto col raggio* 1, *ſi ha* $\text{coſ.}\,x + \text{coſ.}\,2x + \text{coſ.}\,3x + \text{coſ.}\,4x + \text{ecc.}$ *in inf.* $= -\frac{1}{2}$

DIMOSTRAZIONE.

Pongaſi $S = \text{coſ.}\,x + \text{coſ.}\,2x + \text{coſ.}\,3x + \text{coſ.}\,4x + \text{ecc.}$, e ſi moltiplichi per $\text{coſ.}\,x$, ſicchè riſulti $S\,\text{coſ.}\,x = \text{coſ.}\,x^2 + \text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,2x + \text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,3x + \text{coſ.}\,x\,\text{coſ.}\,4x + \text{ecc.}$. Ma ſi ſa dalla Trigonometria, che il prodotto de' coſeni di due angoli è uguale alla metà del coſeno della ſomma di detti angoli più la metà del coſeno della lor differenza. Dunque riſolvendo ciaſcun prodotto della predetta equazione ne' ſuoi due termini equivalenti, naſce $S\,\text{coſ.}\,x = \frac{1}{2}(\text{coſ.}\,2x + 1) + \frac{1}{2}(\text{coſ.}\,3x + \text{coſ.}\,x) + \frac{1}{2}(\text{coſ.}\,4x + \text{coſ.}\,2x) + \text{ecc.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,x + \text{coſ.}\,2x + \text{coſ.}\,3x + \text{coſ.}\,4x + \text{ecc.} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,x + S$. Perlochè ſarà $S(1 - \text{coſ.}\,x) = \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,x - \frac{1}{2}$, cioè $S = -\frac{1}{2}$. Il che era ecc.

LEMMA II.

La ſerie infinita $S = \text{ſen.}\,x + \text{ſen.}\,2x + \text{ſen.}\,3x + \text{ſen.}\,4x + \text{ſen.}\,5x + \text{ecc.}$ *in inf. è uguale all' eſpreſſione* $\frac{\text{ſen.}\,x}{2(1 - \text{coſ.}\,x)}$.

DIMOSTRAZIONE.

Si moltiplichi per $\text{coſ.}\,x$ la ſerie propoſta, e ſi avrà $S\,\text{coſ.}\,x = \text{ſen.}\,x\,\text{coſ.}\,x + \text{ſen.}\,2x\,\text{coſ.}\,x + \text{ſen.}\,3x\,\text{coſ.}\,x + \text{ſen.}\,4x\,\text{coſ.}\,x + \text{ſen.}\,5x\,\text{coſ.}\,x + \text{ecc.}$. Ora dati due angoli

ϕ, θ,

ϕ, θ, per la teoria delle funzioni angolari ſi ſa, eſſere $\text{ſen.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\theta = \frac{1}{2}\,\text{ſen.}\,(\phi+\theta) + \frac{1}{2}\,\text{ſen.}\,(\phi-\theta)$; quindi ſpezzando ciaſcun termine della predetta equazione in due, riſulterà $S\,\text{coſ.}\,x = \frac{1}{2}(\text{ſen.}\,2x + 0) + \frac{1}{2}(\text{ſen.}\,3x + \frac{1}{2}\,\text{ſen.}\,x) + \frac{1}{2}(\text{ſen.}\,4x + \text{ſen.}\,2x) + \frac{1}{2}(\text{ſen.}\,5x + \text{ſen.}\,3x) + \text{ecc.} = \frac{1}{2}\,\text{ſen.}\,x + \text{ſen.}\,2x + \text{ſen.}\,3x + \text{ſen.}\,4x + \text{ſen.}\,5x + \text{ecc.} = S - \frac{1}{2}\,\text{ſen.}\,x$. Laonde traſponendo ſarà $S - S\,\text{coſ.}\,x = \frac{1}{2}\,\text{ſen.}\,x$, e conſeguentemente $S = \frac{\text{ſen.}\,x}{2(1-\text{coſ.}\,x)}$. Il che era ecc.

Ciò premeſſo, ſi dimoſtrano ſpeditamente i ſopraccennati Teoremi nel modo che ſegue.

Dimoſtrazione II. delle formole Euleriane.

N.° I.

Si differenzj la ſerie del Lemma II., e ſi divida per $-dx$; da ciò riſulta $-\text{coſ.}\,x - 2\,\text{coſ.}\,2x - 3\,\text{coſ.}\,3x - 4\,\text{coſ.}\,4x - 5\,\text{coſ.}\,5x - 6\,\text{coſ.}\,6x - \text{ecc.}\ \textit{in inf} = \frac{1}{2(1-\text{coſ.}\,x)} = \frac{1}{4\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}\,x^2}$ (M). Sicchè prendendo per x la ſemicirconferenza, ſarà $\text{coſ.}\,x = -1$, $\text{coſ.}\,2x = 1$, $\text{coſ.}\,3x = -1$, $\text{coſ.}\,4x = 1$, $\text{coſ.}\,5x = -1$, ecc.; e conſeguentemente la ſerie ritrovata ſi converte nella *I.ª*

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{4}$$

N.° II.

Si differenzj due volte la ſerie del Lemma I., e ſi divida il riſultato per dx^2; e ſi ricaverà $-\text{coſ.}\,x - 2^2\,\text{coſ.}\,2x - 3^2\,\text{coſ.}\,3x - 4^2\,\text{coſ.}\,4x - 5^2\,\text{coſ.}\,5x - 6^2\,\text{coſ.}\,6x - \text{ecc.} = 0$ (*N*). Dunque prendendo per l' arco x la ſemicirconferenza ne deriva l' equazione II.ª

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = 0$$

N°. III.

Si prenda dell' equazione (*M*) *n°. I.* il ſecondo differenziale, e queſto ſi divida per $-dx^2$. Ciò fatto naſcerà l'equazione

$$-\text{coſ.}\,x - 2^3\,\text{coſ.}\,2x - 3^3\,\text{coſ.}\,3x - 4^3\,\text{coſ.}\,4x - 5^3\,\text{coſ.}\,5x \ldots\ldots\ldots\ldots - \text{ecc.} = \frac{-1 - 2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}x^2}{8\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}x^4}\ (O);$$

la quale nel ſuppoſto di x eguale alla ſemicirconferenza ſi cangia nel Teorema III.

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{8}$$

N°. IV.

Allo ſteſſo modo, ſi pigli la ſeconda differenza dell' equazione (*N*) *n°. II*; e ſi divida per $-dx^2$; il che ſomminiſtra l' equazione $-\text{coſ.}\,x - 2^4\,\text{coſ.}\,2x - 3^4\,\text{coſ.}\,3x - 4^4\,\text{coſ.}\,4x - 5^4\,\text{coſ.}\,5x - 6^4\,\text{coſ.}\,6x - \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = 0\,(P)$, e queſta, nella ſuppoſizione di $x = 180°$, diventa la formola IV.

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

N.° V.

Differenziata due volte l' equazione (*O*) del *n.° III.* e diviſa per $-dx^2$, ſi giugne al riſultato

$$-\text{coſ.}\,x - 2^5\,\text{coſ.}\,2x - 3^5\,\text{coſ.}\,3x - 4^5\,\text{coſ.}\,4x - 5^5\,\text{coſ.}\,5x$$

$$-6^5 \,\text{coſ.}\, 6x - \text{ecc.}\ldots\ldots = \frac{2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}x^2 + 13\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}x^2 + 2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}x^4}{8\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}x^5}$$

(Q); e ſe in queſta ſi aſſume al ſolito x uguale alla ſemiperiferia, ci ſi preſenta la formola V.

$$1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{4}$$

N.° VI

Prendendo la differenza ſeconda dell' equazione (P) del *n. IV.*, e dividendola per $-dx^2$, ſe ne ricava l' equazione $-\text{coſ.}\,x - 2^6\,\text{coſ.}\,2x - 3^6\,\text{coſ.}\,3x - 4^6\,\text{coſ.}\,4x - 5^6\,\text{coſ.}\,5x - 6^6\,\text{coſ.}\,6x - \text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$ (R). Queſta poi mediante la ſoſtituzione della ſemicirconferenza in luogo di x ſi trasforma nella formola VI.

$$1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

Con tal procedere reſtano prontamente dimoſtrati tutti i Teoremi Euleriani intorno alle ſerie delle potenze affermative intere de' numeri naturali co' ſegni alterni, potendo generalmente ſtabilirſi, che le ſerie delle potenze pari hanno per *quantità generatrice* lo zero, e le ſerie delle potenze diſpari hanno per grandezza *generatrice* un numero dato.

Non mi tratterrò qui a far vedere, come con queſto ſteſſo metodo altri Teoremi analogi agli Euleriani poſſono dimoſtrarſi intorno alle ſerie delle potenze de' numeri diſpari co' ſegni alterni $1^n - 3^n + 5^n - 7^n + 9^n - 11^n + \text{ecc.}$, nelle quali all' oppoſto di quelle de' numeri naturali generalmente ſi troverà *che le impari ſono generate dal zero*, *le pari da un numero determinato*.

ARTICOLO IV.

Della Somma delle Serie de' ſeni e coſeni degli angoli procedenti in progreſſione aritmetica, e delle loro poteſtà intere qualunque.

Le elegantiſſime ſerie de' ſeni e coſeni degli angoli creſcenti in progreſſione aritmetica, come pure delle poteſtà intere omologhe di que' ſeni e coſeni ſono ſtate con molto ſtudio eſaminate ed illuſtrate da' celebri Geometri *Eulero*, *Dan. Bernoulli*, *La Grange*, *D' Alembert*, *Boſſut*, *Lexell*, *Lorgna*, ed altri parecchi; e fra i differenti metodi meſſi in opera per determinarne la loro ſomma, ricavati in buona parte dalla teoria delle ſerie ricorrenti, ſi diſtingue ſopra tutti per la facilità e ſpeditezza quello del Sig. Ab. *Boſſut* pubblicato nelle Memorie *dell' Accad. delle Scienze di Parigi*, per l' anno 1769, il quale può a giuſto titolo chiamarſi un capo d'opera di ſemplicità e d'eleganza. Ma queſto illuſtre Geometra non conſidera la progreſſione aritmetica degli angoli ſotto la forma più generale, nè tampoco (ciò che più importa) applica il ſuo pregevoliſſimo metodo al caſo più univerſale delle potenze de' ſeni e coſeni affette d'un eſponente arbitrario, laſciando deſiderare la parte più intereſſante di queſta ricerca, cioè l' eſpoſizione generale della ſomma pel caſo mentovato: così pure ne' *Supplementi dell' Enciclopedia*, dove queſta materia viene ingegnoſamente trattata in un diſtinto articolo, dopo eſſerſi aſſegnata la ſomma per le due o tre prime poteſtà, ſi tralaſcia il punto più prezioſo e difficile, oſſia il canone per tutte le poteſtà affermative ed intere. Non è mancato per verità chi ſi è ſtudiato di ſupplire a queſta mancanza, ma oltrechè il metodo a tal uopo tenuto ſi appoggia a principj rimoti, e poco familiari, i quali eſigono una lunga eſpoſizione per eſſer ridotti alla comune portata, la forma ſteſſa della generale eſpreſſione della ſomma richieſta non ſi è preſentata ſotto un aſpetto abbaſtanza luminoſo e comodo per non aver nulla a deſiderare di più (*a*). In viſta di ciò non ſembrerà affatto inutile un ulterior tentativo: e il Lettore intelligente giudicherà, ſe io ſia riuſcito a porre tutta queſta materia ſotto un punto di veduta più eſteſo e più generale che finora non ſi è fatto, e ſe la novità de' due ultimi Problemi, e de' quattro Teoremi, che terminano queſt' Articolo, in un ſoggetto da tanti altri maneggiato e diſcuſſo poſſa meritare qualche indulgenza.

(*a*) Si vegga il I. Vol. della *Soc. Italiana* dalla pag. 361 alla pag. 365, ove è ſtato per la prima volta riſoluto in tutta la ſua generalità queſto Problema dal Sig. Cav. *Lorgna*.

PROBLEMA I.

Sommare la ſerie ſen. p + ſen. (p + q) + ſen. (p + 2q) + ſen. (p + 3q) . . . . + ſen. (p + nq) = S

SOLUZIONE.

E' noto, eſſere $S = \frac{e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

$$+ \frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}} - e^{-(p+q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{(p+2q)\sqrt{-1}} - e^{-(p+2q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{e^{(p+3q)\sqrt{-1}} - e^{-(p+3q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{e^{(p+nq)\sqrt{-1}} - e^{-(p+nq)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \Big(1 + e^{q\sqrt{-1}}$$

$$+ e^{2q\sqrt{-1}} + e^{3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + e^{nq\sqrt{-1}} \Big)$$

$$- \frac{e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \left(1 + e^{-q\sqrt{-1}} + e^{-2q\sqrt{-1}} + e^{-3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots + e^{-nq\sqrt{-1}} \right).$$

Ora ſiccome le quantità rinchiuſe tra le parenteſi ſono evidentemente due progreſſioni geometriche, delle quali conſeguentemente ſi ha la ſomma con moltiplicare il ſecondo termine per l' ultimo, ſottrarre il quadrato del primo termine, e dividere il reſiduo pel ſecondo termine meno il primo; perciò ſarà $S = \frac{e^{p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{q\sqrt{-1}} - 1} \right)$

$- \frac{e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{-q\sqrt{-1}} - 1} \right)$; e riducendo allo ſteſſo denominatore naſce $S = \frac{e^{p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{nq\sqrt{-1}} - e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}} \right)$

$$- \frac{e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{-nq\sqrt{-1}} - e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}} \right)$$

$$= \left(\frac{e^{(p+nq)\sqrt{-1}} - e^{-(p+nq)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \frac{e^{(p+(n+1)q)\sqrt{-1}} - e^{-(p+(n+1)q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{(q-p)\sqrt{-1}} - e^{-(q-p)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right) : \left(2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}} \right)$$

$$= \frac{\text{ſen.}\,(p+nq) - \text{ſen.}\,(p+(n+1)q) + \text{ſen.}\,(q-p) + \text{ſen.}\,p}{2 - 2\,\text{coſ.}\,q}$$

. Ricorrendo pertanto ai noti Teoremi degli angoli

I. $\text{ſen.}\,a + \text{ſen.}\,b = 2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(a+b)\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(a-b)$

II. $\text{ſen.}\,a - \text{ſen.}\,b = 2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(a+b)\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(a-b)$

III. $\text{coſ.}\,a + \text{coſ.}\,b = 2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(a+b)\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(a-b)$

IV. $\text{coſ.}\,b - \text{coſ.}\,a = 2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(a+b)\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(a-b)$

V. $1 - \text{coſ.}\,a = 2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}a^2$, ſi otterrà facilmente

$$S = \frac{-2\,\text{coſ.}\,(p+(n+\frac{1}{2})q)\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}q + 2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}q\,\text{coſ.}\,(p-\frac{1}{2}q)}{4\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}q^2}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,(p-\frac{1}{2}q) - \text{coſ.}\,(p+(n+\frac{1}{2})q)}{2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}q}$$

$$= \frac{\text{ſen.}\,(p+\frac{1}{2}nq)\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(1+n)q}{\text{ſen.}\,\frac{1}{2}q}$$

. Il che era ecc.

PROBLEMA II.

Sommare la ſerie coſ. p + coſ. (p + q) + coſ. (p + 2q) + coſ. (p + 3q) .... + coſ. (p + nq) = S.

SOLUZIONE.

La dottrina degli angoli ſomminiſtra $S = \frac{1}{2}e^{p\sqrt{-1}}$

$$+ \frac{1}{2}e^{-p\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}e^{(p+q)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}e^{-(p+q)\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{(p+q)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}e^{-(p+2q)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}e^{(p+3q)\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-(p+3q)\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{2}e^{(p+nq)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}e^{-(p+nq)\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}e^{p\sqrt{-1}}\Big(1 + e^{q\sqrt{-1}}$$

$$+ e^{2q\sqrt{-1}} + e^{3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots + e^{nq\sqrt{-1}}\Big) + \frac{1}{2}e^{-p\sqrt{-1}}$$

$$\Big(1 + e^{-q\sqrt{-1}} + e^{-2q\sqrt{-1}} + e^{-3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots + e^{-nq\sqrt{-1}}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}e^{p\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{q\sqrt{-1}} - 1}\right)$$

$+ \frac{1}{2}e^{-p\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{-q\sqrt{-1}} - 1}\right)$. Fatta pertanto la riduzione allo ſteſſo denominatore ſi ottiene ſpeditamente

$$S = \frac{1}{2}e^{p\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{nq\sqrt{-1}} - e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-p\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{-nq\sqrt{-1}} - e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}}\right)$$

$$= \Big(\frac{1}{2}e^{(p+nq)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}e^{-(p+nq)\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}e^{(p+(n+1)q)\sqrt{-1}}$$

$$- \frac{1}{2}e^{-(p+(n+1)q)\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}e^{(p-q)\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}e^{-(p-q)\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{p\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}e^{-p\sqrt{-1}}\Big) : \Big(2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}\Big)$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,(p + nq) - \text{coſ.}\,(p + (n+1)\,q) - \text{coſ.}\,(p - q) + \text{coſ.}\,p}{2 - 2\,\text{coſ.}\,q}$$

$$= \frac{\text{ſen.}\,(p+(n+\frac{1}{2})q)\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}q - \text{ſen.}\,(p-\frac{1}{2}q)\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}q}{2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}q^2}$$

$$= \frac{\text{ſen.}\,(p+(n+\frac{1}{2})q) - \text{ſen.}\,(p-\frac{1}{2}q)}{2\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}q}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,(p+\frac{1}{2}nq)\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(1+n)q}{\text{ſen.}\,\frac{1}{2}q}$$. Il che era ecc.

COROLL. La ſomma della ſerie $\text{ſen.}\,p + \text{ſen.}\,(p+q) + \text{ſen.}\,(p+2q) \ldots\ldots\ldots + \text{ſen.}\,(p+nq)$ ſta alla ſomma della ſerie $\text{coſ.}\,p + \text{coſ.}\,(p+q) + \text{coſ.}\,(p+2q) \ldots\ldots + \text{coſ.}\,(p+nq)$, come ſta $\text{ſen.}\,(p+\frac{1}{2}nq)$ a $\text{coſ.}\,(p+\frac{1}{2}nq)$, cioè come $\text{tang.}\,(p+\frac{1}{2}nq)$ all' unità. Da ciò appariſce, che la ſomma de' ſeni degli angoli creſcenti in proporzione aritmetica, e continuati per quanti termini ſi vuole, può eſſer uguale in infiniti caſi alla ſomma de' coſeni corriſpondenti, cioè tutte le volte che $p+\frac{1}{2}nq = 45°$, il che può verificarſi in infinite maniere. Anzi quelle due ſomme ſaranno parimenti uguali, allorchè, eſſendo π la ſemicirconferenza del cerchio col raggio 1, l' arco $p+\frac{1}{2}nq$ avrà uno de' ſeguenti valori

$$\frac{\pi}{4},\ +\frac{5\pi}{4},\ +\frac{9\pi}{4},\ +\frac{13\pi}{4},\ \text{ecc. in inf.}$$

$$-\frac{3\pi}{4},\ -\frac{7\pi}{4},\ -\frac{11\pi}{4},\ -\frac{15\pi}{4},\ \text{ecc. in inf.}$$

PROBLEMA III.

Sommare la ſerie $S = \text{ſen.}\,\mathrm{p}^2 + \text{ſen.}\,(\mathrm{p}+\mathrm{q})^2 + \text{ſen.}\,(\mathrm{p}+2\mathrm{q})^2 + \text{ſen.}\,(\mathrm{p}+3\mathrm{q})^2 \ldots\ldots\ldots + \text{ſen.}\,(\mathrm{p}+\mathrm{nq})^2$.

SOLUZIONE.

Pongaſi $e^{p\sqrt{-1}} = a$, $e^{q\sqrt{-1}} = b$; i Teoremi noti degli angoli danno ſen. $p^2 = \left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2}{-4} + \frac{a^{-2}}{-4} + \frac{1}{2}$

$$\text{ſen.}\,(p+q)^2 = \left(\frac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-2}}{-4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{ſen.}\,(p+2q)^2 = \left(\frac{ab^2 - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^4}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-4}}{-4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{ſen.}\,(p+3q)^2 = \left(\frac{ab^3 - a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^6}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-6}}{-4} + \frac{1}{2}$$

. . . .

$$\text{ſen.}\,(p+nq)^2 = \left(\frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{a^2b^{2n}}{-4} + \frac{a^{-2}b^{-2n}}{-4} + \frac{1}{2}.$$

Dunque $S = -\frac{1}{4}a^2(1 + b^2 + b^4 + b^6 \ldots\ldots + b^{2n})$

$$-\frac{1}{4}a^{-2}(1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \ldots\ldots + b^{-2n}) + \frac{1+n}{2},$$

cioè $S = -\frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}\right) - \frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n-2} - 1}{b^{-2} - 1}\right) + \frac{1+n}{2}$.

Perlochè ridotti li due termini binomiali allo ſteſſo denominatore, ſi avrà $S = \frac{1+n}{2} - \frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^{2n} - b^{2n+2} - b^{-2} + 1}{2 - b^2 - b^{-2}}\right)$

$$-\frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n} - b^{-2n-2} - b^2 + 1}{2 - b^2 - b^{-2}}\right)$$

$$= \frac{1+n}{2} + \frac{\frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2(p+(n+1)q) + \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2(p-q) - \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2(p+nq) - \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2p}{2 - 2\,\text{coſ.}\,2q}.$$

Il che era ecc.

PROBLEMA IV.

Sommare la ſerie $S = \text{coſ.}\,p^2 + \text{coſ.}\,(p+q)^2 + \text{coſ.}\,(p+2q)^2 + \text{coſ.}\,(p+3q)^2 \ldots\ldots\ldots + \text{coſ.}\,(p+nq)^2$.

SOLUZIONE

Ritenute le precedenti ſoſtituzioni, ſi fa eſſere

$$\text{coſ.}\,p^2 = \left(\frac{a+a^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^{-2}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{coſ.}\,(p+q)^2 = \left(\frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{4} + \frac{a^{-2}b^{-2}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{coſ.}\,(p+2q)^2 = \left(\frac{ab^2+a^{-1}b^{-2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^4}{4} + \frac{a^{-2}b^{-4}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{coſ.}\,(p+3q)^2 = \left(\frac{ab^3+a^{-1}b^{-3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^6}{4} + \frac{a^{-2}b^{-6}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{coſ.}\,(p+nq)^2 = \left(\frac{ab^n+a^{-1}b^{-n}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^{2n}}{4} + \frac{a^{-2}b^{-2n}}{4} + \frac{1}{2}.$$

Laonde ſcrivendo ordinatamente i termini ſi otterrà

$$S = \frac{n+1}{2}$$

$$+ \frac{1}{4}a^2(1+b^2+b^4+b^6 \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{2n})$$

$$+ \frac{1}{4}a^{-2}(1+b^{-2}+b^{-4}+b^{-6} \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{-2n})$$

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^{2+2n}-1}{b^2-1}\right) + \frac{1}{2}a^{-2}\left(\frac{b^{-2-2n}-1}{b^{-2}-1}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{1}{4}a^2(b^{2n}-b^{2+2n}-b^{-2}+1)+\frac{1}{4}a^{-2}(b^{-2n}-b^{-2-2n}-b^2+1)}{2-b^2-b^{-2}}$$

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2(p+nq)+\frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2p-\frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2(p+(n+1)q)-\frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2(p-q)}{2-2\,\text{coſ.}\,2q}.$$

Il che era ecc.

COROLL. Se la ſomma trovata ſi aggiugne a quella del Problema III. ſi ha il riſultato $= n+1$, come appunto eſſer dee, poichè il quadrato di ciaſcun ſeno aggiunto al quadrato del coſeno corriſpondente forma il quadrato del raggio, cioè l' unità.

PROBLEMA V.

Sommare la ſerie $S = \text{ſen.}\, p^3 + \text{ſen.}\, (p+q)^3 + \text{ſen.}\, (p+2q)^3 + \text{ſen.}\, (p+3q)^3 \ldots\ldots\ldots + \text{ſen.}\, (p+nq)^3$.

SOLUZIONE.

$$\text{ſen.}\, p^3 = \left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right) = \frac{a^3}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3a}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{ſen.}\, (p+q)^3 = \left(\frac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^3}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-1}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-3}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{ſen.}\, (p+2q)^3 = \left(\frac{ab^2 - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^6}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^2}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-2}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-6}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{ſen.}\, (p+3q)^3 = \left(\frac{ab^3 - a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^9}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^3}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-3}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-9}}{-8\sqrt{-1}}$$

. . . .

$$\text{ſen.}\, (p+nq)^3 = \left(\frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^{3n}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^n}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-n}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-3n}}{-8\sqrt{-1}}.$$

Quindi riſulta $S = -\frac{a^3}{8\sqrt{-1}}(1 + b^3 + b^6 + b^9 \ldots\ldots\ldots + b^{3n})$
$+ \frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}}(1 + b^{-3} + b^{-6} + b^{-9} \ldots\ldots\ldots + b^{-3n})$

$$+\frac{3a}{8\sqrt{-1}}(1+b+b^2+b^3\ldots\ldots\ldots\ldots+b^n)$$

$$-\frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}}(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}\ldots\ldots\ldots+b^{-n})=$$

$$-\frac{a^3}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{3+3n}-1}{b^3-1}\right)+\frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-3-3n}-1}{b^{-3}-1}\right)$$

$+\frac{3a}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)-\frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-n-1}-1}{b^{-1}-1}\right)$. Riducendo ora allo ſteſſo denominatore li due primi termini, e così pure i due altri ſeparatamente, ricaveremo $S=$

$$-\frac{a^3}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{3n}-b^{3n+3}-b^{-3}+1}{2-b^3-b^{-3}}\right)+\frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-3n}-b^{-3n-3}-b^3+1}{2-b^3-b^{-3}}\right)$$

$$+\frac{3a}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^n-b^{n+1}-b^{-1}+1}{2-b-b^{-1}}\right)-\frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-n}-b^{-n-1}-b+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\text{ſen. }3(p+(n+1)q)+\frac{1}{4}\text{ſen. }3(p-q)-\frac{1}{4}\text{ſen. }3(p+nq)-\frac{1}{4}\text{ſen. }3p}{2-2\text{ coſ. }3q}$$

$$+\frac{\frac{3}{4}\text{ſen. }(p+nq)+\frac{3}{4}\text{ſen. }p-\frac{3}{4}\text{ſen. }(p+(n+1)q)-\frac{3}{4}\text{ſen. }(p-q)}{2-2\text{ coſ. }q}.$$

Il che era ecc.

PROBLEMA VI.

Sommare la ſerie $S=\text{coſ. }p^3+\text{coſ. }(p+q)^3+\text{coſ. }(p+2q)^3+\text{coſ. }(p+3q)^3\ldots\ldots\ldots\ldots+\text{coſ. }(p+nq)^3$.

SOLUZIONE.

$$\text{coſ. }p^3=\left(\frac{a+a^{-1}}{2}\right)^3=\frac{a^3}{8}+\frac{3a}{8}+\frac{3a^{-1}}{8}+\frac{a^{-3}}{8}$$

$$\text{coſ. }(p+q)^3=\left(\frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{2}\right)^3=\frac{a^3b^3}{8}+\frac{3ab}{8}+\frac{3a^{-1}b^{-1}}{8}+\frac{a^{-3}b^{-3}}{8}$$

$$\text{coſ. }(p+2q)^3=\left(\frac{ab^2+a^{-1}b^{-2}}{2}\right)^3=\frac{a^3b^6}{8}+\frac{3ab^2}{8}+\frac{3a^{-1}b^{-2}}{8}+\frac{a^{-3}b^{-6}}{8}$$

$$\text{coſ.}\,(p+3q)^3 = \left(\frac{ab^3+a^{-1}b^{-3}}{2}\right)^3 = \frac{a^3b^9}{8} + \frac{3ab^3}{8} + \frac{3a^{-1}b^{-3}}{8} + \frac{a^{-3}b^{-9}}{8}$$

. . . .

$$\text{coſ.}\,(p+nq)^3 = \left(\frac{ab^n+a^{-1}b^{-n}}{2}\right)^3 = \frac{a^3b^{3n}}{8} + \frac{3ab^n}{8} + \frac{3a^{-1}b^{-n}}{8} + \frac{a^{-3}b^{-3n}}{8}.$$

Sarà perciò $S = \frac{1}{8}a^3(1+b^3+b^6+b^9 \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{3n})$

$$+\frac{1}{8}a^{-3}(1+b^{-3}+b^{-6}+b^{-9} \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{-3n})$$

$$+\frac{3a}{8}(1+b+b^2+b^3 \ldots\ldots\ldots + b^n)$$

$$+\frac{3a^{-1}}{8}(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3} \ldots\ldots\ldots + b^{-n})$$

$$= \frac{1}{8}a^3\left(\frac{b^{3n+3}-1}{b^3-1}\right) + \frac{1}{8}a^{-3}\left(\frac{b^{-3n-3}-1}{b^{-3}-1}\right)$$

$$+\frac{3a}{8}\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right) + \frac{3a^{-1}}{8}\left(\frac{b^{-n-1}-1}{b^{-1}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{8}a^3\left(\frac{b^{3n}-b^{3n+3}-b^{-3}+1}{2-b^3-b^{-3}}\right) + \frac{1}{8}a^{-3}\left(\frac{b^{-3n}-b^{-3n-3}-b^3+1}{2-b^3-b^{-3}}\right)$$

$$+\frac{3a}{8}\left(\frac{b^n-b^{n+1}-b^{-1}+1}{2-b-b^{-1}}\right) + \frac{3a^{-1}}{8}\left(\frac{b^{-n}-b^{-n-1}-b+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3(p+nq) + \frac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3p - \frac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3\big(p+(n+1)q\big) - \frac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3(p-q)}{2-2\,\text{coſ.}\,3q}$$

$$+\frac{\frac{3}{4}\,\text{coſ.}\,(p+nq) + \frac{3}{4}\,\text{coſ.}\,p - \frac{3}{4}\,\text{coſ.}\,\big(p+(n+1)q\big) - \frac{3}{4}\,\text{coſ.}\,(p-q)}{2-2\,\text{coſ.}\,q}.$$

Il che era ecc.

PROBLEMA VII.

Sommare la ſerie $S = \text{ſen.}\,p^4 + \text{ſen.}\,(p+q)^4 + \text{ſen.}\,(p+2q)^4 + \text{ſen.}\,(p+3q)^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{ſen.}\,(p+nq)^4$.

SOLUZIONE.

$$\text{ſen.}\, p^4 = \left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4}{16} - \frac{4a^2}{16} - \frac{4a^{-2}}{16} + \frac{a^{-4}}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\text{ſen.}\, (p+q)^4 = \left(\frac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^4}{16} - \frac{4a^2b^2}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-2}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-4}}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\text{ſen.}\, (p+nq)^4 = \left(\frac{ab^2 - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^8}{16} - \frac{4a^2b^4}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-4}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-8}}{16} + \frac{6}{16}.$$

$$\text{ſen.}\, (p+3q)^4 = \left(\frac{ab^3 - a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^{12}}{16} - \frac{4a^2b^6}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-6}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-12}}{16} + \frac{6}{16}$$

. . . .

$$\text{ſen.}\, (p+nq)^4 = \left(\frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^{4n}}{16} - \frac{4a^2b^{2n}}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-2n}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-4n}}{16} + \frac{6}{16}.$$

Sarà dunque $S = \frac{1}{16}a^4(1 + b^4 + b^8 + b^{12} \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{4n})$

$$+ \frac{1}{16}a^{-4}(1 + b^{-4} + b^{-8} + b^{-12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b^{-4n})$$

$$- \frac{1}{4}a^2(1 + b^2 + b^4 + b^6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b^{2n})$$

$$- \frac{1}{4}a^{-2}(1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{-2n})$$

$$+ \frac{6(1+n)}{16} = \frac{1}{16}a^4\left(\frac{b^{4n+4} - 1}{b^4 - 1}\right) + \frac{1}{16}a^{-4}\left(\frac{b^{-4n-4} - 1}{b^{-4} - 1}\right)$$

$$- \frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}\right) - \frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n-2} - 1}{b^{-2} - 1}\right) + \frac{6(n+1)}{16}$$

$$= \frac{1}{16}a^4\left(\frac{b^{4n} - b^{4n+4} - b^{-4} + 1}{2 - b^4 - b^{-4}}\right)$$

$$+\frac{1}{16}a^{-4}\left(\frac{b^{-4n}-b^{-4n-4}-b^{4}+1}{2-b^{4}-b^{-4}}\right)-\frac{1}{4}a^{2}\left(\frac{b^{2n}-b^{2n+2}-b^{-2}+1}{2-b^{2}-b^{-2}}\right)$$

$$-\frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n}-b^{-2n-2}-b^{2}+1}{2-b^{2}-b^{-2}}\right)+\frac{3(n+1)}{8}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}\text{coſ.}\,4(p+nq)+\frac{1}{8}\text{coſ.}\,4p-\frac{1}{8}\text{coſ.}\,4\big(p+(n-1)q\big)-\frac{1}{8}\text{coſ.}\,4(p-q)}{2-2\,\text{coſ.}\,4q}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\text{coſ.}\,2(p+(n+1)q)+\frac{1}{2}\text{coſ.}\,2(p-q)-\frac{1}{2}\text{coſ.}\,2(p+nq)-\frac{1}{2}\text{coſ.}\,2p}{2-2\,\text{coſ.}\,2q}$$

$+\frac{3(n+1)}{8}$. Il che era ecc.

PROBLEMA VIII.

Sommare la ſerie S = coſ. p^4 + coſ. (p + q)^4 + coſ. (p + 2q)^4 + coſ. (p + 3q)^4 . . . . + coſ. (p + nq)^4

SOLUZIONE.

Procedendo ſempre come dianzi, ſi ha

$$\text{coſ.}\,p^{4}=\left(\frac{a+a^{-1}}{2}\right)^{4}=\frac{a^{4}}{16}+\frac{4a^{2}}{16}+\frac{4a^{-2}}{16}+\frac{a^{-4}}{16}+\frac{6}{16}$$

$$\text{coſ.}\,(p+q)^{4}=\left(\frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{2}\right)^{4}=\frac{a^{4}b^{4}}{16}+\frac{4a^{2}b^{2}}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-2}}{16}$$
$$+\frac{a^{-4}b^{-4}}{16}+\frac{6}{16}$$

$$\text{coſ.}\,(p+2q)^{4}=\left(\frac{ab^{2}+a^{-1}b^{-2}}{2}\right)^{4}=\frac{a^{4}b^{8}}{16}+\frac{4a^{2}b^{4}}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-4}}{16}$$
$$+\frac{a^{-4}b^{-8}}{16}+\frac{6}{16}$$

$$\text{coſ.}\,(p+3q)^{4}=\left(\frac{ab^{3}+a^{-1}b^{-3}}{2}\right)^{4}=\frac{a^{4}b^{12}}{16}+\frac{4a^{2}b^{6}}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-6}}{16}$$
$$+\frac{a^{-4}b^{-12}}{16}+\frac{6}{16}$$

. . . .

$$\text{coſ.}\,(p+nq)^{4}=\left(\frac{ab^{n}+a^{-1}b^{-n}}{2}\right)^{4}=\frac{a^{4}b^{4n}}{16}+\frac{4a^{2}b^{2n}}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-2n}}{16}$$
$$+\frac{a^{-4}b^{-4n}}{16}+\frac{6}{16}.$$

Perlochè raccolti i termini a dovere, ſe ne ricava

$$S = \frac{6}{16} a^4 (1 + b^4 + b^8 + b^{12} \ldots\ldots + b^{4n})$$

$$+ \frac{1}{16} a^{-4} (1 + b^{-4} + b^{-8} + b^{-12} \ldots\ldots + b^{-4n})$$

$$+ \frac{1}{4} a^2 (1 + b^2 + b^4 + b^6 \ldots\ldots + b^{2n})$$

$$+ \frac{1}{4} a^{-2} (1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \ldots\ldots + b^{-2n})$$

$$+ \frac{3(n+1)}{8} = \frac{1}{16} a^4 \left(\frac{b^{4n+4} - 1}{b^4 - 1} \right) + \frac{1}{16} a^{-4} \left(\frac{b^{-4n-4} - 1}{b^{-4} - 1} \right)$$

$$+ \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1} \right) + \frac{1}{4} a^{-2} \left(\frac{b^{-2n-2} - 1}{b^{-2} - 1} \right) + \frac{3(n+1)}{8}.$$

Dunque riducendo al comune denominatore i due primi termini, non meno che i due ſuſſeguenti, riſulterà

$$S = \frac{1}{16} a^4 \left(\frac{b^{4n} - b^{4n+4} - b^{-4} + 1}{2 - b^4 - b^{-4}} \right) + \frac{1}{16} a^{-4} \left(\frac{b^{-4n} - b^{-4n-4} - b^4 + 1}{2 - b^4 - b^{-4}} \right)$$

$$+ \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{b^{2n} - b^{2n+2} - b^{-2} + 1}{2 - b^2 - b^{-2}} \right) + \frac{1}{4} a^{-2} \left(\frac{b^{-2n} - b^{-2n-2} - b^2 + 1}{2 - b^2 - b^{-2}} \right)$$

$$+ \frac{3(n+1)}{8}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \text{coſ. } 4(p + nq) + \frac{1}{8} \text{coſ. } 4p - \frac{1}{8} \text{coſ. } 4(p + (n+1)q) - \frac{1}{8} \text{coſ. } 4(p-q)}{2 - 2 \text{ coſ. } 4q}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \text{coſ. } 2(p + nq) + \frac{1}{2} \text{coſ. } 2p - \frac{1}{2} \text{coſ. } 2(p + (n+1)q) - \frac{1}{2} \text{coſ. } 2(p - q)}{2 - 2 \text{ coſ. } 2q}$$

$+ \frac{3(n+1)}{8}$. Il che era ecc.

PROBLEMA IX.

Sommare la ſerie $S =$ ſen. p^m + ſen. $(\mathrm{p}+\mathrm{q})^m$ + ſen. $(\mathrm{p}+2\mathrm{q})^m$ + ſen. $(\mathrm{p}+3\mathrm{q})^m \ldots\ldots$ + ſen. $(\mathrm{p}+\mathrm{rq})^m$; *poſto l' eſponente* m *eguale ad un numero qualunque intero affermativo*.

SOLUZIONE.

SOLUZIONE.

Caſo I. di m *diſpari.*

E' noto dalla Trigonometria Analitica, e dalla teoria delle ſunzioni circolari, eſſere

$$1.^\circ\ \text{ſen.}\,p^m = \pm\frac{\text{ſen.}\,mp}{2^{m-1}} \mp \frac{m\,\text{ſen.}\,(m-2)p}{2^{m-1}} \pm \frac{m.m-1\,.\,\text{ſen.}\,(m-4)p}{2^{m-1}.\,1.2}$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2.\,\text{ſen.}\,(m-6)p}{2^{m-1}.\,1.2.3}\,\ldots\ldots + \frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots\,\text{ſen.}\,p}{2^{m-1}.\,1.2.3\ldots\ldots}$$

$$= \pm\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^m - a^{-m}}{2\sqrt{-1}}\right) \mp \frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2} - a^{2-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4} - a^{4-m}}{2\sqrt{-1}}\right) \mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6} - a^{6-m}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots\ldots}\left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right);$$

in queſta formola, come nelle ſuſſeguenti, vagliono i ſegni ſuperiori nell' ipoteſi di $m = 4\lambda + 1$, e gl' inferiori nel ſuppoſto di $m = 4\lambda - 1$, eſſendo λ un numero intero qualunque.

$$2.^\circ\ \text{ſen.}\,(p+q)^m = \pm\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^m b^m - a^{-m} b^{-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\mp\frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2} b^{m-2} - a^{2-m} b^{2-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4} b^{m-4} - a^{4-m} b^{4-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6} b^{m-6} - a^{6-m} b^{6-m}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{ab - a^{-1} b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right).$$

$$3.^\circ\ \text{ſen.}\,(p+2q)^m = \pm\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^m b^{2m} - a^{-m} b^{-2m}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\mp\frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2} b^{2(m-2)} - a^{2-m} b^{2(2-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{2(m-4)} - a^{4-m}b^{2(4-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1\,.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{2(m-6)} - a^{6-m}b^{2(6-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{ab^{2} - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

4.° ſen. $(p+rq)^m = \pm \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m}b^{rm} - a^{-m}b^{-rm}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$$\mp \frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2}b^{r(m-2)} - a^{2-m}b^{r(2-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{r(m-4)} - a^{4-m}b^{r(4-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1\,.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{r(m-6)} - a^{6-m}b^{r(6-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots\ldots$$

$+ \frac{m.m-1\,.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{ab^{r} - a^{-1}b^{-r}}{2\sqrt{-1}}\right)$. Dunque raccogliendo i termini corriſpondenti ſi ha

$$S = \pm \frac{a^{m}}{2^{m}\sqrt{-1}}\left(1 + b^{m} + b^{2m} + b^{3m}\ldots\ldots\ldots\ldots + b^{rm}\right)$$

$$\mp \frac{a^{-m}}{2^{m}\sqrt{-1}}\left(1 + b^{-m} + b^{-2m} + b^{-3m}\ldots\ldots\ldots + b^{-rm}\right)$$

$$\mp \frac{ma^{m-2}}{2^{m}\sqrt{-1}}\left(1 + b^{m-2} + b^{2(m-2)} + b^{3(m-2)}\ldots\ldots + b^{r(m-2)}\right)$$

$$\pm \frac{ma^{2-m}}{2^{m}\sqrt{-1}}\left(1 + b^{2-m} + b^{2(2-m)} + b^{3(2-m)}\ldots\ldots\ldots + b^{r(2-m)}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^{m}\sqrt{-1}\,.\,1.2}\left(1 + b^{m-4} + b^{2(m-4)} + b^{3(m-4)}\ldots\ldots + b^{r(m-4)}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^{m}\sqrt{-1}\,.\,1.2}\left(1 + b^{4-m} + b^{2(4-m)} + b^{3(4-m)}\ldots + b^{r(4-m)}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^{m}\sqrt{-1}.1.2.3}\left(1 + b^{m-6} + b^{2(m-6)} + b^{3(m-6)}\ldots\ldots + b^{r(m-6)}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^{m}\sqrt{-1}.1.2.3}\left(1 + b^{6-m} + b^{2(6-m)} + b^{3(6-m)}\ldots\ldots + b^{r(6-m)}\right)$$

. . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots.a}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\ldots\ldots}(1+b+b^2+b^3\ldots\ldots\ldots+b^r)$$

$$-\frac{m.m-1.m-2\ldots.a^{-1}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\ldots\ldots}(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}\ldots\ldots+b^{-r}).$$

Dunque $S=\pm\frac{a^m}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{m(r+1)}-1}{b^m-1}\right)$

$$\mp\frac{a^{-m}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-m(r+1)}-1}{b^{-m}-1}\right)\mp\frac{ma^{m-2}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{(m-2)(r+1)}-1}{b^{m-2}-1}\right)$$

$$\pm\frac{ma^{2-m}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-(m-2)(r+1)}-1}{b^{2-m}-1}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(m-4)}-1}{b^{m-4}-1}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}\left(\frac{b^{(4-m)(r+1)}-1}{b^{4-m}-1}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}\left(\frac{b^{r+1)(m-6)}-1}{b^{m-6}-1}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}\left(\frac{b^{(6-m)(r+1)}-1}{b^{6-m}-1}\right)\ldots\ldots\ldots$$

. . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots a}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\ldots\ldots\ldots}\left(\frac{b^{r+1}-1}{b-1}\right)$$

$-\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots.a^{-1}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\ldots\ldots\ldots}\left(\frac{b^{-r-1}-1}{b^{-1}-1}\right)$. Riducendo ora ciaſcuna coppia di termini ſeparatamente al comune denominatore ſi conſeguiſce

$$S=\pm\frac{a^m}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{rm}-b^{rm+m}-b^{-m}+1}{2-b^m-b^{-m}}\right)$$

$$\mp\frac{a^{-m}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-rm}-b^{-rm-m}-b^m+1}{2-b^m-b^{-m}}\right)$$

$$\mp\frac{ma^{m-2}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{r(m-2)}-b^{(r+1)(m-2)}-b^{2-m}+1}{2-b^{m-2}-b^{2-m}}\right)$$

$$\pm\frac{ma^{2-m}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-r(m-2)}-b^{-(r+1)(m-2)}-b^{m-2}+1}{2-b^{m-2}-b^{2-m}}\right.$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}\left(\frac{b^{r(m-4)}-b^{(r+1)(m-4)}-b^{4-m}+1}{2-b^{m-4}-b^{4}-b^{4-m}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}\left(\frac{b^{-r(m-4)}-b^{-(r+1)(m-4)}-b^{m-4}+1}{2-b^{m-4}-b^{4-m}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}\left(\frac{b^{r(m-6)}-b^{(r+1)(m-6)}-b^{6-m}+1}{2-b^{m-6}-b^{6-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}\left(\frac{b^{-r(m-6)}-b^{-(r+1)(m-6)}-b^{m-6}+1}{2-b^{m-6}-b^{6-m}}\right)$$

. . . .

$$+ \frac{m.m-1.m-2.........a}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3..........}\left(\frac{b^{r}-b^{r+1}-b^{-1}+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$- \frac{m.m-1.m-2..........a^{-1}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3.......}\left(\frac{b^{-r}-b^{-r-1}-b+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$= \pm \frac{1}{2^m}\left(\frac{\text{ſen.}\, m(p+rq)-\text{ſen.}\, m(p+(r+1)q)-\text{ſen.}\, m(p-q)+\text{ſen.}\, mp}{1-\text{coſ.}\, mq}\right)$$

$$\mp \frac{m}{2^m}\left(\frac{\text{ſen.}\,(m-2)(p+rq)-\text{ſen.}\,(m-2)(p+(r+1)q)-\text{ſen.}\,(m-2)(p-q)+\text{ſen.}\,(m-2)p}{1-\text{coſ.}\,(m-2)q}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(\frac{\text{ſen.}\,(m-4)(p+rq)-\text{ſen.}\,(m-4)(p+(r+1)q)-\text{ſen.}\,(m-4)(p-q)+\text{ſen.}\,(m-4)p}{1-\text{coſ.}\,(m-4)q}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}\left(\frac{\text{ſen.}\,(m-6)(p+rq)-\text{ſen.}\,(m-6)(p+(r+1)q)-\text{ſen.}\,(m-6)(p-q)+\text{ſen.}\,(m-6)p}{1-\text{coſ.}\,(m-6)q}\right)$$

. . . .

$$+ \frac{m.m-1.m-2.....}{2^m.1.2.3......}\left(\frac{\text{ſen.}\,(p+rq)-\text{ſen.}\,(p+(r+1)q)-\text{ſen.}\,(p-q)+\text{ſen.}\,p}{1-\text{coſ.}\,q}\right);$$

qui vale la regola data da principio in ordine ai ſegni. Il che era ecc.

Caſo II. di m *pari*.

La dottrina delle Funzioni circolari ci dà l'equazioni ſeguenti

$$\text{I.° ſen.}\ p^m = \pm \frac{\text{coſ.}\, mp}{2^{m-1}} \mp \frac{m\,\text{coſ.}\,(m-2)p}{2^{m-1}}$$

$$\pm \frac{m.m-1.\,\text{coſ.}\,(m-4)p}{2^{m-1}.1.2} \mp \frac{m.m-1.m-2\,\text{coſ.}\,(m-6)p}{2^{m-1}.1.2.3}\ ....$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\right)\text{coſ.}\,(m-m)p=\pm\left(\frac{a^{m}+a^{-m}}{2^{m}}\right)$$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2}+a^{2-m}}{2^{m}}\right)\pm m.m-1\left(\frac{a^{m-4}+a^{4-m}}{2^{m}.1.2}\right)$$

$$\mp m.m-1.m-2.\left(\frac{a^{m-6}+a^{6-m}}{2^{m}.1.2.3}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\right)$; in queſta formola, come nelle ſuſſeguenti, ſi adoprano i ſegni ſuperiori quando $m=4\lambda$, e gl' inferiori allorchè $m=4\lambda-2$, preſo per λ qualſivoglia numero intero affermativo.

2.° ſen. $(p+q)^{m}=\pm\frac{\text{coſ.}\,m(p+q)}{2^{m-1}}\mp\frac{m\,\text{coſ.}\,(m-2)(p+q)}{2^{m-1}}$

$$\pm\frac{m.m-1.\,\text{coſ.}\,(m-4)(p+q)}{2^{m-1}.1.2}\mp\frac{m.m-1.m-2.\,\text{coſ.}\,(m-6)(p+q)}{2^{m-1}.1.2.3}$$

. . . .

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots\ldots}\right)=\pm\left(\frac{a^{m}b^{m}+a^{-m}b^{-m}}{2^{m}}\right)$$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2}b^{m-2}+a^{2-m}b^{2-m}}{2^{m}}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{m-4}+a^{4-m}b^{4-m}}{2^{m}}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{m-6}+a^{6-m}b^{6-m}}{2^{m}}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3.4\ldots\ldots\ldots\ldots}\right).$$

3.° ſen. $(p+2q)^{m}=\pm\left(\frac{a^{m}b^{2m}+a^{-m}b^{-2m}}{2^{m}}\right)$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2}b^{2(m-2)}+a^{2-m}b^{2(2-m)}}{2^{m}}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{2(m-4)}+a^{4-m}b^{2(4-m)}}{2^{m}}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{2(m-6)}+a^{6-m}b^{2(6-m)}}{2^{m}}\right)\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots\ldots}\right).$$

4.° ſen. $(p+3q)^m = \pm\left(\frac{a^m b^{3m} + a^{-m} b^{-3m}}{2^m}\right)$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2} b^{3(m-2)} + a^{2-m} b^{3(2-m)}}{2^m}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{m-4} b^{3(m-4)} + a^{4-m} b^{3(4-m)}}{2^m}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{m-6} b^{3(m-6)} + a^{6-m} b^{3(6-m)}}{2^m}\right)\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3.4\ldots\ldots}\right).$$

5.° ſen. $(p+rq)^m = \pm\left(\frac{a^m b^{rm} + a^{-m} b^{-rm}}{2^m}\right)$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2} b^{r(m-2)} + a^{2-m} b^{r(2-m)}}{2^m}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{m-4} b^{r(m-4)} + a^{4-m} b^{r(4-m)}}{2^m}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{m-6} b^{r(m-6)} + a^{6-m} b^{r(6-m)}}{2^m}\right)\ldots\ldots$$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots}\right)$. Dunque diſtribuendo, come conviene, i termini delle precedenti equazioni, ſi giugne alla ſomma

$$S = \pm\frac{a^m}{2^m}\left(1 + b^m + b^{2m} + b^{3m} \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{rm}\right)$$

$$\pm\frac{a^{-m}}{2^m}\left(1 + b^{-m} + b^{-2m} + b^{-3m} \ldots\ldots\ldots + b^{-rm}\right)$$

$$\mp\frac{ma^{m-2}}{2^m}\left(1 + b^{m-2} + b^{2(m-2)} + b^{3(m-2)} \ldots\ldots + b^{r(m-2)}\right)$$

$$\mp\frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(1 + b^{2-m} + b^{2(2-m)} + b^{3(2-m)} \ldots\ldots + b^{r(2-m)}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{n-4}}{2^m.1.2}(1+b^{n-4}+b^{2(m-4)}+b^{3(m-4)}\ldots\ldots+b^{r(m-4)})$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}(1+b^{4-m}+b^{2(4-m)}+b^{3(4-m)}\ldots\ldots+b^{r(4-m)})$$

$$\mp \frac{m.m\text{-}1.m\text{-}2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}(1+b^{m-6}+b^{2(m-6)}+b^{3(m-6)}\ldots\ldots+b^{r(m-6)})$$

$$\mp \frac{m.m\text{-}1.m\text{-}2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}(1+b^{6-m}+b^{2(6-m)}+b^{3(6-m)}\ldots\ldots+b^{r(6-m)})$$

. . . .

$$+\left(\frac{1+r}{2}\right)\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)=$$

$$\pm \frac{a^n}{2^m}\left(\frac{b^{m(r+1)}-1}{b^m-1}\right) \pm \frac{a^{-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-m(r+1)}-1}{b^{-m}-1}\right)$$

$$\mp \frac{ma^{n-2}}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)(m-2)}-1}{b^{n-2}-1}\right) \mp \frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)(2-m)}-1}{b^{2-m}-1}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(m-4)}-1}{b^{m-4}-1}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(4-m)}-1}{b^{4-m}-1}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(m-6)}-1}{b^{-m-6}-1}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(6-m)}-1}{b^{6-m}-1}\right)$$

. . . .

$$+\frac{(1+r)}{2}\left(\frac{m.m-1.m-1.m-3\ldots\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3.4\ldots\ldots\ldots}\right)$$. Perlochè riducendo queſti termini di due in due allo ſteſſo denominatore, ſi trova riſultarne

$$S=\pm \frac{a^m}{2^m}\left(\frac{b^{rn}-b^{(r+1)}-b^{-m}+1}{2-b^m-b^{-n}}\right)$$

$$\pm \frac{a^{-m}}{2^n}\left(\frac{b^{-rn}-b^{-n(r+1)}-b^n+1}{2-b^{m}-b^{-m}}\right)$$

$$\mp \frac{ma^{n-2}}{2^m}\left(\frac{b^{r(m-2)}-b^{(r+1)(m-2)}-b^{2-m}+1}{2-b^{n-2}-b^{2-m}}\right)$$

$$\mp \frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-r(m-2)} - b^{(r+1)(2-m)} - b^{m-2} + 1}{2 - b^{m-2} - b^{2-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{r(m-4)} - b^{(r+1)(m-4)} - b^{4-m} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{-r(m-4)} - b^{(r+1)(4-m)} - b^{m-4} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{r(m-6)} - b^{(r+1)(m-6)} - b^{6-m} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{-r(m-6)} - b^{(r+1)(6-m)} - b^{m-6} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}}\right)$$

. . . .

$$+\left(\frac{1+r}{2}\right)\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3.4\ldots\ldots}\right) =$$

$$\pm \frac{1}{2^m}\left(\frac{\text{coſ.}\, m(p+rq) - \text{coſ.}\, m(p+(r+1)q) - \text{coſ.}\, m(p-q) + \text{coſ.}\, mp}{1 - \text{coſ.}\, mq}\right)$$

$$\mp \frac{m}{2^m}\left(\frac{\text{coſ.}\,(m-2)(p+rq) - \text{coſ.}(m-2)(p+(r+1)q) - \text{coſ.}\,(m-2)(p-q) + \text{coſ.}\,(m-2)p}{1 - \text{coſ.}\,(m-2)q}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(\frac{\text{coſ.}\,(m-4)(p+rq) - \text{coſ.}\,(m-4)(p+(r+1)q) - \text{coſ.}\,(m-4)(p-q) + \text{coſ.}\,(m-4)p}{1 - \text{coſ.}\,(m-4)q}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3.}\left(\frac{\text{coſ.}\,(m-6)(p+rq) - \text{coſ.}\,(m-6)(p+(r+1)q) - \text{coſ.}\,(m-6)(p-q) + \text{coſ.}\,(m-6)p}{1 - \text{coſ.}\,(m-6)q}\right)$$

. . . .

$$+\left(\frac{1+r}{2}\right)\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3.4\ldots\ldots}\right).$$ Il che era ecc.

PROBLEMA X.

Sommare la ſerie $S = \text{coſ.}\, p^m + \text{coſ.}\,(p+q)^m + \text{coſ.}\,(p+2q)^m + \text{coſ.}\,(p+3q)^m \ldots\ldots\ldots + \text{coſ.}\,(p+rq)^m$.

SOLUZIONE.

SOLUZIONE.

Caſo I. di m *diſpari*

Dall' Analiſi Trigonometrica ci viene ſomminiſtrato,

1.° $$\text{coſ.}\,p^m = \frac{\text{coſ.}\,mp}{2^{m-1}} + \frac{m\,\text{coſ.}\,(m-2)p}{2^{m-1}} + \frac{m.m-1.\,\text{coſ.}\,(m-4)p}{2^{m-1}\,1.2.}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.\text{coſ.}\,(m-6)p}{2^{m-1}.1.2.3} \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots\ldots\text{coſ.}\,p}{2^{m-1}.1.2.3.\ldots\ldots}$$

$$= \frac{a^m + a^{-m}}{2^m} + m\left(\frac{a^{m-2} + a^{2-m}}{2^m}\right) \div \frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4} \div a^{4-m})$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6} + a^{6-m})\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.\ldots\ldots}{2^m.1.2.3\ldots\ldots}(a + a^{-1}).$$

2.° $$\text{coſ.}\,(p+q)^m = \frac{a^m b^m + a^{-m} b^{-m}}{2}$$

$$+ \frac{m}{2^m}(a^{m-2} b^{m-2} + a^{2-m} b^{2-m})$$

$$+ \frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4} b^{m-4} + a^{4-m} b^{4-m})$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6} b^{m-6} + a^{6-m} b^{6-m})\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\cdot m-3\ldots\ldots}{2^m.2.3.4.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}(ab + a^{-1} b^{-1}).$$

3.° $$\text{coſ.}\,(p+2q)^m = \frac{a^m b^{2m} + a^{-m} b^{-2m}}{2^m}$$

$$+ \frac{m}{2^m}(a^{m-2} b^{2(m-2)} + a^{2-m} b^{2(2-m)})$$

$$+ \frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4}b^{2(m-4)} + a^{4-m}b^{2(4-m)})$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6}b^{2(m-6)} + a^{6-m}b^{2(6-m)}) \ldots.$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots.}{2^m.1.2.3\ldots.}(ab^2 + a^{-1}b^{-2})$$

4.° coſ. $(p+3q)^m = \frac{a^m b^{3m} + a^{-m} b^{-3m}}{2^m}$

$$+ \frac{m}{2^m}(a^{m-2}b^{3(m-2)} + a^{2-m}b^{3(2-m)})$$

$$+ \frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4}b^{3(m-4)} + a^{4-m}b^{3(4-m)})$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6}b^{3(m-6)} + a^{6-m}b^{3(6-m)}) \ldots.$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots}{2^m.1.2.3\ldots}(ab^3 + a^{-1}b^{-3}).$$

5°. coſ. $(p+rq)^m = \frac{a^m b^{rm} + a^{-m} b^{-rm}}{2^m}$

$$+ \frac{m}{2^m}(a^{m-2}b^{r(m-2)} + a^{2-m}b^{r(2-m)})$$

$$+ \frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4}b^{r(m-4)} + a^{4-m}b^{r(4-m)})$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6}b^{r(m-6)} + a^{6-m}b^{r(6-m)}) \ldots.$$

$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots}{2^m.1.2.3.4\ldots}(ab^r + a^{-1}b^{-r})$. Sicchè ordinando per ſerie diſtinte i termini corriſpondenti, naſce

$$S = \frac{a^m}{2^m}(1 + b^m + b^{2m} + b^{3m} \ldots.. + b^{rm})$$

$$+ \frac{a^{-m}}{2^m}(1 + b^{-m} + b^{-2m} + b^{-3m} \ldots. + b^{-rm})$$

$$+ \frac{ma^{m-2}}{2^m}(1 + b^{m-2} + b^{2(m-2)} + b^{3(m-2)} \ldots. + b^{r(m-2)})$$

$$+\frac{ma^{2-m}}{2^{m}}\left(1+b^{2-m}+b^{2(2-m)}+b^{3(2-m)}\ldots\ldots+b^{r(2-m)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^{m}.1.2}\left(1+b^{m-4}+b^{2(m-4)}+b^{3(m-4)}\ldots\ldots+b^{r(m-4)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^{m}.1.2}\left(1+b^{4-m}+b^{2(4-m)}+b^{3(4-m)}\ldots\ldots+b^{r(4-m)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^{m}.1.2.3}\left(1+b^{m-6}+b^{2(m-6)}+b^{3(m-6)}\ldots\ldots+b^{r(m-6)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^{m}.1.2.3}\left(1+b^{6-m}+b^{2(6-m)}+b^{3(6-m)}\ldots\ldots+b^{r(6-m)}\right)$$

. . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a}{2^{m}.1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots}\left(1+b+b^{2}+b^{3}\ldots\ldots\ldots+b^{r}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a^{-1}}{2^{m}.1.2.3\ldots\ldots\ldots}\left(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}\ldots\ldots+b^{-r}\right)$$

$$=\frac{a^{m}}{2^{m}}\left(\frac{b^{(r+1)n}-1}{b^{m}-1}\right)+\frac{a^{-m}}{2^{m}}\left(\frac{b^{-(r+1)m}-1}{b^{-m}-1}\right)$$

$$+\frac{ma^{m-2}}{2^{m}}\left(\frac{b^{(r+1)(m-2)}-1}{b^{m-2}-1}\right)+\frac{ma^{2-m}}{2^{m}}\left(\frac{b^{(r+1)(2-m)}-1}{b^{2-m}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1a^{m-4}}{2^{m}.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(m-4)}-1}{b^{m-4}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^{m}.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(4-m)}-1}{b^{4-m}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^{m}.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(m-6)}-1}{b^{m-6}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^{m}.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(6-m)}-1}{b^{6-m}-1}\right)$$

. . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a}{2^{m}.1.23\ldots\ldots}\left(\frac{b^{(r+1)}-1}{b-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a^{-1}}{2^{m}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{b^{-r-1}-1}{b^{-1}-1}\right).$$

Se ora ciaſcuna coppia di tali termini viene portata ſotto un comune denominatore, ne riſulta

$$S=\frac{a^m}{2^m}\left(\frac{b^{rm}-b^{(r+1)m}-b^{-m}+1}{2-b^m-b^{-m}}\right)$$
$$+\frac{a^{-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-rm}-b^{-(r+1)m}-b^m+1}{2-b^m-b^{-m}}\right)$$
$$+\frac{ma^{m-2}}{2^m}\left(\frac{b^{r(m-2)}-b^{(r+1)(m-2)}-b^{2-m}+1}{2-b^{m-2}-b^{2-m}}\right)$$
$$+\frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-r(m-2)}-b^{(r+1)(2-m)}-b^{m-2}+1}{2-b^{m-2}-b^{2-m}}\right)$$
$$+\frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{r(m-4)}-b^{(r+1)(m-4)}-b^{4-m}+1}{2-b^{m-4}-b^{4-m}}\right)$$
$$+\frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{-r(m-4)}-b^{(r+1)(4-m)}-b^{m-4}+1}{2-b^{m-4}-b^{4-m}}\right)$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{r(m-6)}-b^{(r+1)(m-6)}-b^{6-m}+1}{2-b^{m-6}-b^{6-m}}\right)$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{r(6-m)}-b^{(r+1)(6-m)}-b^{m-6}+1}{2-b^{m-6}-b^{6-m}}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a}{2^m.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{b^r-b^{r+1}-b^{-1}+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$
$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a^{-1}}{2^m.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{b^{-r}-b^{-r-1}-b+1}{2-b-b^{-1}}\right).$$

Sicchè fatte le debite ſoſtituzioni, ne viene finalmente

$$S=\frac{1}{2^m}\left(\frac{\text{coſ.}\,m(p+rq)-\text{coſ.}\,m(p+(r+1)q)-\text{coſ.}\,m(p-q)+\text{coſ.}\,mp}{1-\text{coſ.}\,mq}\right)$$
$$+\frac{m}{2^m}\left(\frac{\text{coſ.}(m-2)(p+rq)-\text{coſ.}(m-2)(p+(r+1)q)-\text{coſ.}\,(m-2)(p-q)+\text{coſ.}\,(m-2)p}{1-\text{coſ.}\,(m-2)q}\right)$$
$$+\frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(\frac{\text{coſ.}(m-4)(p+rq)-\text{coſ.}\,(m-4)(p+(r+1)q)-\text{coſ.}\,(m-4)(p-q)+\text{coſ.}(m-4)p}{1-\text{coſ.}\,(m-4)q}\right)$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}\left(\frac{\text{coſ.}\,(m-6)(p+rq)-\text{coſ.}\,(m-6)(p+(r+1)q)-\text{coſ.}(m-6)(p-q)+\text{coſ.}\,(m-6)p}{1-\text{coſ.}\,(m-6)q}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots}{2^m.1.2.3\ldots}\left(\frac{\text{coſ.}\,(p+rq)-\text{coſ.}\,(p+(r+1)q)-\text{coſ.}\,(p-q)+\text{coſ.}\,p}{1-\text{coſ.}\,q}\right)$$

Il che era ecc.

Caſo II. di m *pari.*

In queſta ſuppoſizione dell' eſponente m pari il valore di coſ. p^m non differiſce dal precedente ſe non nell' ultimo termine, il quale trovaſi libero da coſ. p, e veſte queſta forma $\frac{m.m-1.m-2\ldots\frac{1}{2}m+1}{2^m.1.2.3\ldots.\frac{1}{2}m}$, e queſto termine rimane inalterabile nell' eſpreſſione del valore della potenza m di qualunque altro coſeno. E' dunque baſtantemente chiaro, che il calcolo da farſi in queſto caſo non è punto diverſo dal già fatto nel caſo di m diſpari, avendo ſoltanto riguardo, che nel precedente valore della ſomma S in vece dell' ultimo termine ſi dee prendere $r+1$ volte la frazione $\frac{m.m-1.m-2\ldots\frac{1}{2}m+1}{2^m.1.2.3\ldots\ldots\frac{1}{2}m}$, il che dà la ſteſſa ſomma già trovata S mutilata dell' ultimo termine, ed accreſciuta di $\frac{m.m-1.m-2\ldots\frac{1}{2}m+1.r+1.}{2^m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}m}$. Il che era ecc.

PROBLEMA XI.

Preſo ϕ *per l' arco di cerchio deſcritto col raggio* $=1$, ed m, n *due numeri qualunque o poſitivi o negativi; cercaſi la ſomma* $S = m\,\text{ſen.}\,m\phi + (m+n)\,\text{ſen.}\,(m+n)\phi + (m+2n)\,\text{ſen.}\,(m+2n)\phi + (m+3n)\,\text{ſen.}\,(m+3n)\phi \ldots + (m+rn)\,\text{ſen.}\,(m+rn)\phi$, *eſſendo* r *qualunque intero affermativo.*

SOLUZIONE.

Dal Probl. II. ſi ha $\text{coſ.}\,m\phi + \text{coſ.}\,(m+n)\phi + \text{coſ.}\,(m+2n)\phi + \text{coſ.}\,(m+3n)\phi + \ldots\ldots + \text{coſ.}\,(m+rn)\phi = \frac{\text{coſ.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(r+1)n\phi}{\text{ſen.}\,\frac{1}{2}n\phi}$. Quindi prendendo i differenziali naſce $-md\phi\,\text{ſen.}\,m\phi - (m+n)\,d\phi\,\text{ſen.}\,(m+n)\phi - (m+2n)\,d\phi\,\text{ſen.}\,(m+2n)\phi - (m+3n)\,d\phi\,\text{ſen.}\,(m+3n)\phi \ldots - (m+rn)\,d\phi\,\text{ſen.}\,(m+rn)\phi =$

$$-((m+\frac{1}{2}rn)\,d\phi\,\text{ſen.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}n\phi$$

$$-\frac{1}{2}(r+1)\,nd\phi\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{coſ.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}n\phi$$

$$+\frac{1}{2}nd\phi\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}n\phi\,\text{coſ.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,):\text{ſen.}\,\frac{1}{2}n\phi^2,$$

e dividendo per $-d\phi$, ne proviene $m\,\text{ſen.}\,m\phi$ $+(m+n)\,\text{ſen.}\,(m+n)\,\phi+(m+2n)\,\text{ſen.}\,(m+2n)\,\phi$ $+(m+3n)\,\text{ſen.}\,(m+3n)\,\phi\ldots+(m+rn)\,\text{ſen.}\,(m+rn)\,\phi=$

$$((m+\frac{1}{2}rn)\,\text{ſen.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}n\phi$$

$$-\frac{1}{2}(r+1)\,n\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{coſ.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}n\phi$$

$$+\frac{1}{2}n\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}n\phi\,\text{coſ.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,):\text{ſen.}\,\frac{1}{2}n\phi^2.$$

Il che era ecc.

PROBLEMA XII.

Sommare la ſerie $S=m\,\text{coſ.}\,m\,\phi+(m+n)\,\text{coſ.}\,(m+n)\,\phi$ $+(m+2n)\,\text{coſ.}\,(m+2n)\,\phi+(m+3n)\,\text{coſ.}\,(m+3n)\,\phi\ldots$ $+(m+rn)\,\text{coſ.}\,(m+rn)\,\phi$.

SOLUZIONE

Il Probl. I. ſomminiſtra l'equazione $\text{ſen.}\,m\phi+\text{ſen.}\,(m+n)\phi$ $+\text{ſen.}\,(m+2n)\,\phi+\text{ſen.}\,(m+3n)\,\phi\ldots+\text{ſen.}\,(m+rn)\,\phi=$ $\dfrac{\text{ſen.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(r+1)\,n\,\phi}{\text{ſen.}\,\frac{1}{2}n\,\phi}$, la quale differenziata, e diviſa per $d\phi$, diventa $m\,\text{coſ.}\,m\phi+(m+n)\,\text{coſ.}\,(m+n)\,\phi$ $+(m+2n)\,\text{coſ.}\,(m+2n)\,\phi+(m+3n)\,\text{coſ.}\,(m+3n)\,\phi\ldots\ldots$ $+(m+rn)\,\text{coſ.}\,(m+rn)\,\phi=$

$$((m+\frac{1}{2}rn)\,\text{coſ.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}n\phi$$

$$+\frac{1}{2}(r+1)\,n\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{ſen.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}n\phi$$

$$-\frac{1}{2}\,n\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\,n\phi\,\text{ſen.}\,(m+\frac{1}{2}\,rn)\,\phi\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}\,(r+1)\,n\phi\,)\,:\,\text{ſen.}\,\frac{1}{2}\,n\phi^{2}\,.$$

Il che era ecc.

COROLLARIO.

Applicando il metodo da me eſpoſto in queſti due ultimi Problemi alle ſerie quivi ſommate, cioè differenziando le medeſime, egli è manifeſto, che ſi otterrà la ſomma così de' ſeni come de' coſeni degli angoli aritmeticamente creſcenti, anche quando ciaſcuno di eſſi verrà moltiplicato pel quadrato del numero moltiplice dell' angolo. E così ſempre operando, ſi giungerà ſempre a determinare la ſomma di ſiffatte ſerie quand' anche ciaſcun ſeno e coſeno venga moltiplicato per qualſivoglia poteſtà intera del numero moltiplice dell' angolo reſpettivo. E perciò ſaranno ſempre ſommabili le due ſerie

I°. $m^{\lambda}\,\text{ſen.}\,m\phi+(m+n)^{\lambda}\,\text{ſen.}\,(m+n)\,\phi$
$+(m+2n)^{\lambda}\,\text{ſen.}\,(m+2n)\,\phi+(m+3n)^{\lambda}\,\text{ſen.}\,(m+3n)\,\phi$
$\ldots\ldots+(m+rn)^{\lambda}\,\text{ſen.}\,(m+rn)\,\phi$

II°. $m^{\lambda}\,\text{coſ.}\,m\phi+(m+n)^{\lambda}\,\text{coſ.}\,(m+n)\,\phi$
$+(m+2n)^{\lambda}\,\text{coſ.}\,(m+2n)\,\phi+(m+3n)^{\lambda}\,\text{coſ.}\,(m+3n)\,\phi\ldots\ldots$
$+(m+rn)^{\lambda}\,\text{coſ.}\,(m+rn)\,\phi$, preſo per λ qualunque numero intero affermativo. In fatti chiamata S' la prima di queſte due ſerie, S'' la ſeconda, ſe ſi prende P per indicare la ſomma già trovata di $\text{ſen.}\,m\phi+\text{ſen.}\,(m+n)\,\phi+\text{ſen.}\,(m+2n)\,\phi\ldots\ldots\,\text{ſen.}\,(m+rn)\,\phi$, e $\mathcal{Q}$ per denotare la ſomma nota di $\text{coſ.}\,m\phi+\text{coſ.}\,(m+n)\,\phi+\text{coſ.}\,(m+2n)\,\phi\ldots+\text{coſ.}\,(m+rn)\,\phi$, ſi otterranno i ſeguenti Teoremi.

Caſo I. di λ pari

TEOREMA I°.

$$S'=\pm\frac{d^{\lambda}P}{d\phi^{\lambda}}\,.$$

TEOREMA II°.

$$S''=\pm\frac{d^{\lambda}\mathcal{Q}}{d\phi^{\lambda}}\,.$$

In queſti due Teoremi i ſegni ſuperiori vagliono per tutti i numeri pari diviſibili per 4, gl' inferiori per li non diviſibili.

Caſo II. di λ diſpari

TEOREMA III°.

$$S' = \pm \frac{d^\lambda Q}{d\phi^\lambda}.$$

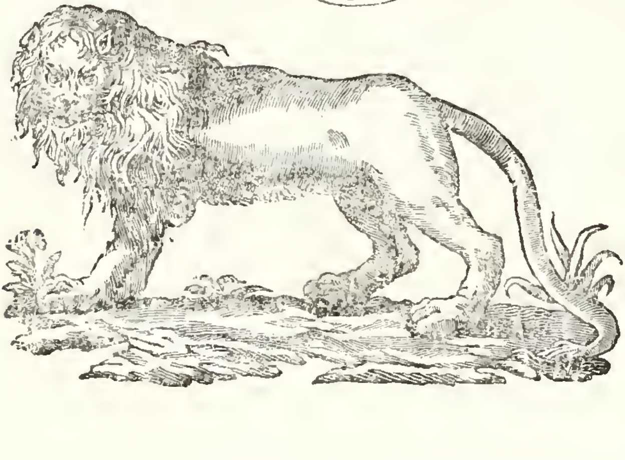
TEOREMA IV°.

$$S'' = \pm \frac{d^\lambda P}{d\phi^\lambda}.$$

Pel Teorema 3°. vale il ſegno ſuperiore quando il numero λ è della forma $4n - 1$, eſſendo n qualunque intero a cominciare dall' unità; vale poi il ſegno inferiore allorchè λ ha la forma $4n + 1$, eſſendo n qualunque intero, ed anche zero.

Nel Teorema 4°. ſi adopra il ſegno ſuperiore tutte le volte che λ è $= 4n + 1$, eſſendo n un intero qualunque, ed anche zero; e ſi uſa il ſegno inferiore qualora λ è $= 4n - 1$, preſo per n qualunque intero, eſcluſo il zero.

BRITISH ... NATURAL HISTORY



NUOVA

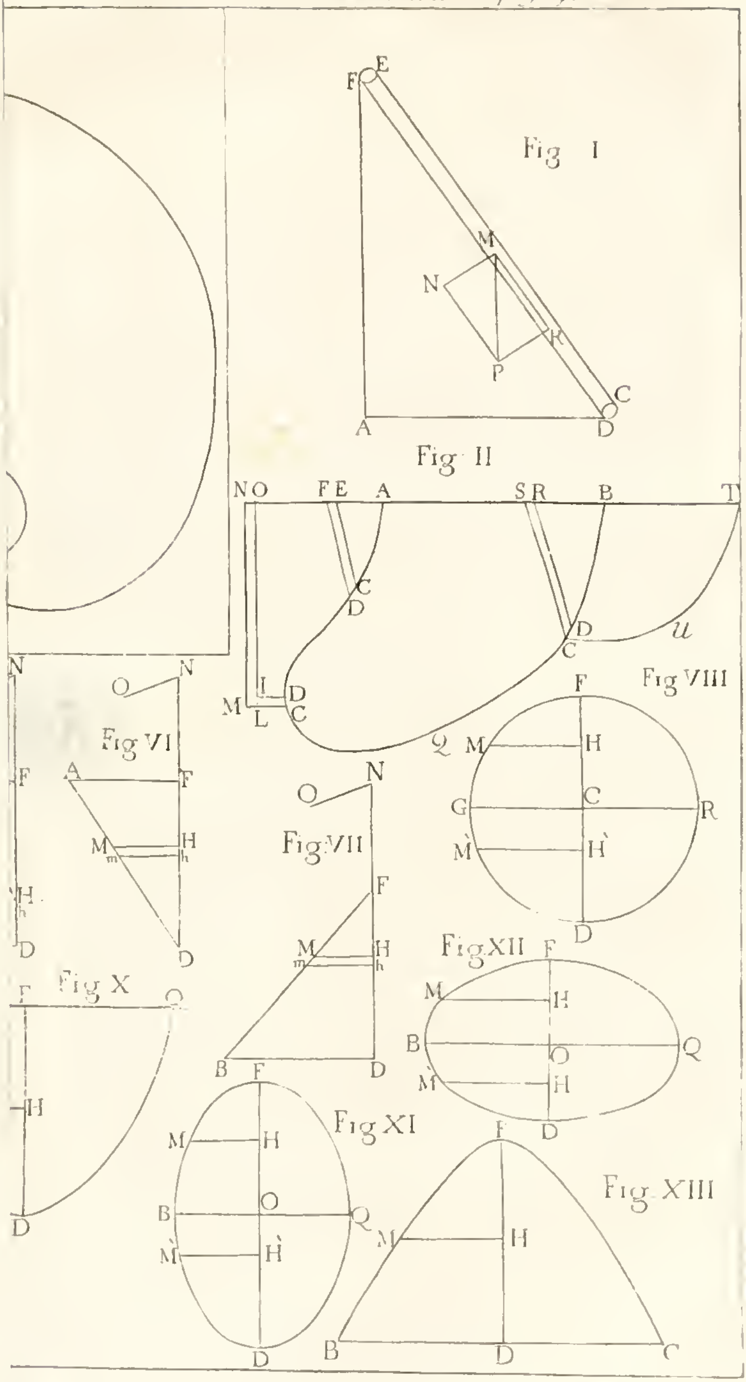


Fig I
E
F
M
N
R
P
C
A
D
Fig II
N O
F E
A
S R
B
T
C
D
D
C
u
I
D
M
L
C
Q
Fig VIII
F
M
H
G
C
R
M
H
D
N
O
N
Fig VI
F
A
F
M
m
H
h
H
h
D
D
O
N
Fig VII
F
M
m
H
h
B
D
Fig XII
F
M
H
B
O
Q
M
H
D
Fig X
F
O
H
D
F
Fig XI
M
H
O
B
Q
M
H
D
F
Fig XIII
M
H
B
D
C

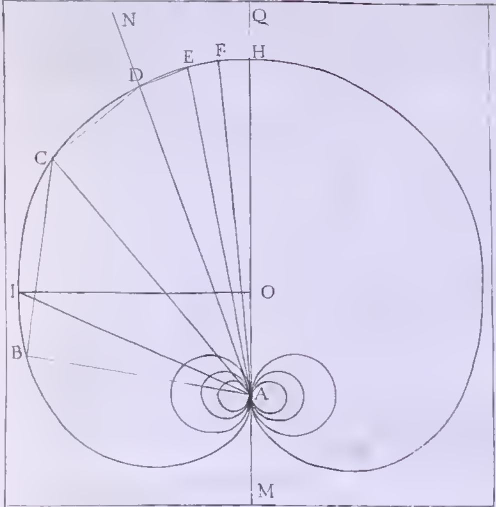

N
Q
D
E
F
H
C
I
O
B
A
M

Fig I

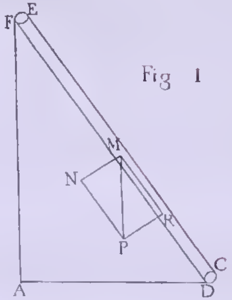


Fig II

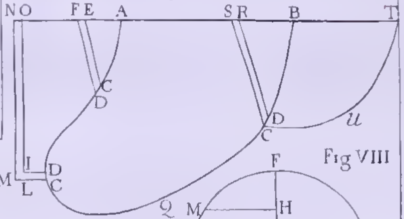

N O
F E
A
S R
B
T
C
D
D
u
C
I
D
M
L
C
Q

Fig III

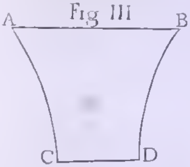


Fig IV

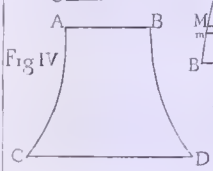


Fig V

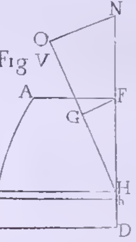

N
O
A
F
G
M
m
H
h
B
D

Fig VI

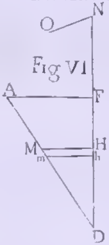


Fig VII

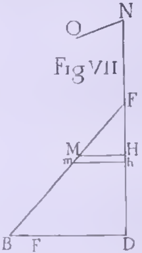


Fig VIII

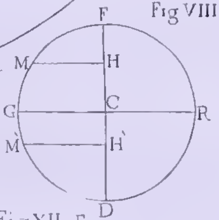


Fig IX

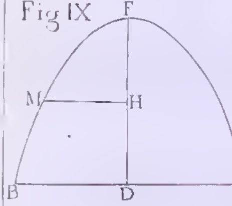


Fig X

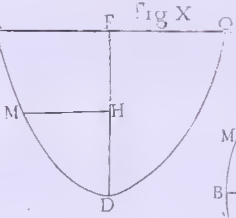


Fig XI

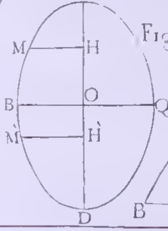


Fig XII

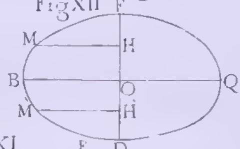
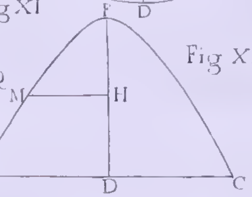
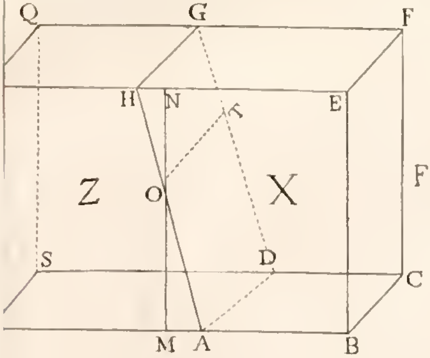


Fig XIII




Q
G
F
H
N
T
E
Z
O
X
S
D
C
M
A
B

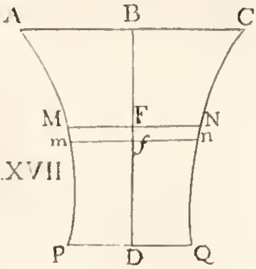


Fig.XVII
A
B
C
M
F
N
m
f
n
P
D
Q

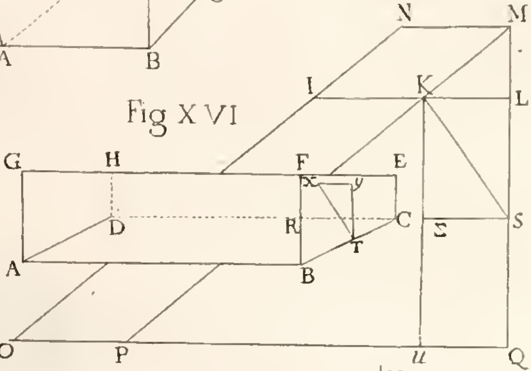
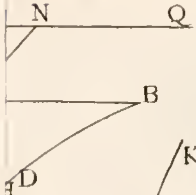
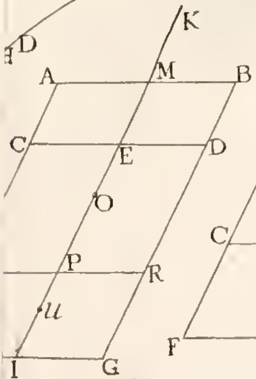


Fig XVI
N
M
I
K
L
G
H
F
E
x
y
D
R
C
Σ
S
A
T
B
O
P
u
Q




K
A
M
B
C
E
D
O
P
R
u
I
G

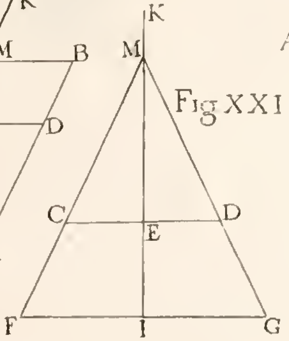


Fig XXI

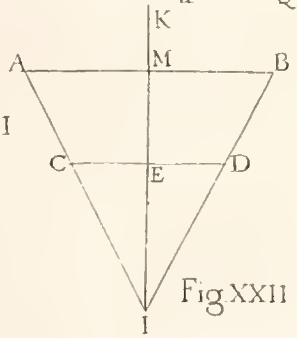
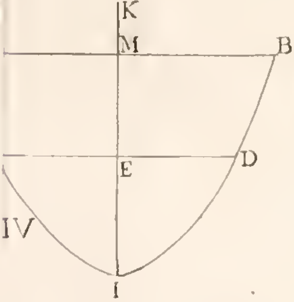


Fig.XXII


IV

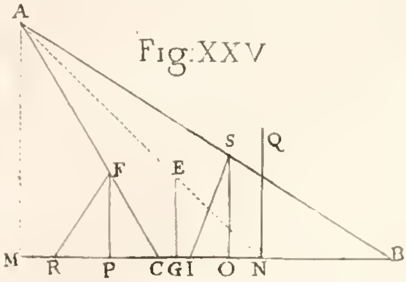
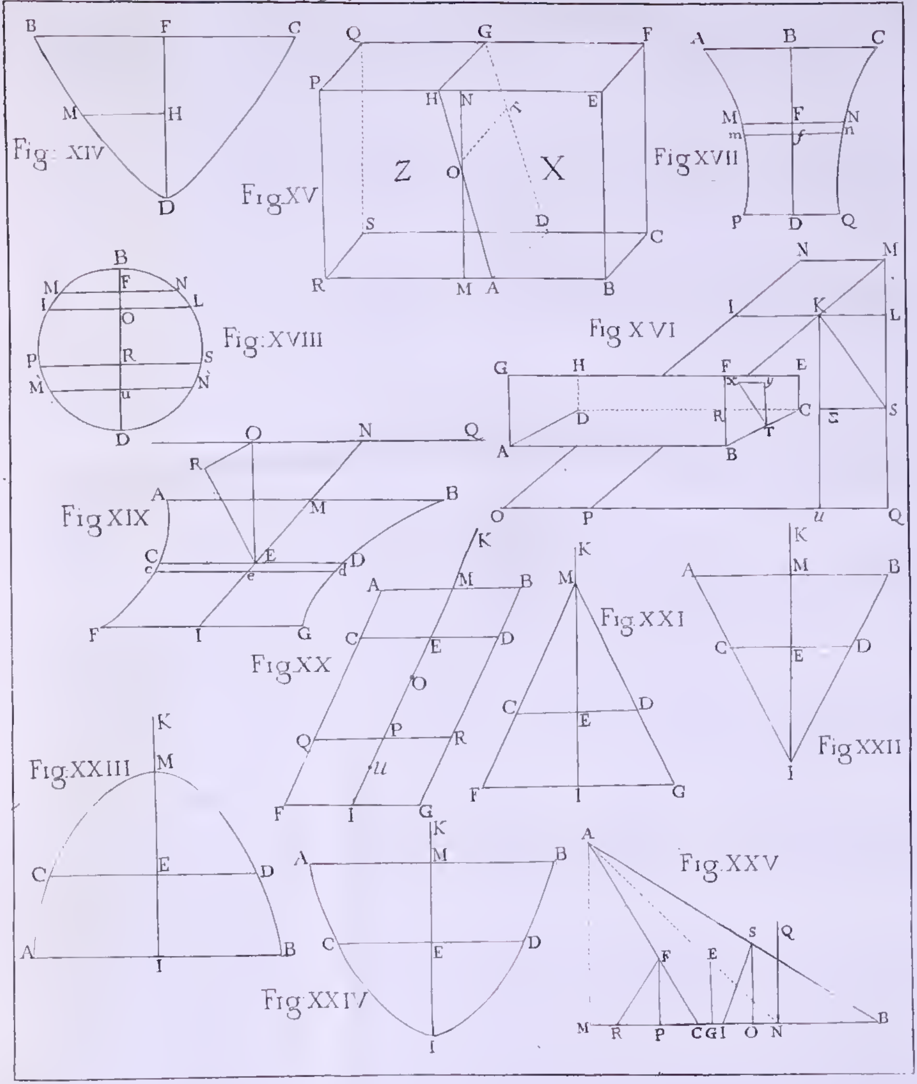


Fig.XXV
A
S
Q
F
E
M
R
P
C
G
I
O
N
B


B
F
C
M
H
Fig: XIV
D
Q
G
F
P
H
N
E
Z
O
X
Fig XV
S
D
C
R
M
A
B
A
B
C
M
F
N
m
f
n
Fig XVII
P
D
Q
B
M
F
N
I
O
L
Fig: XVIII
P
R
S
M
u
N
D
N
M
I
K
L
Fig X VI
G
H
F
E
x
y
D
R
C
S
Σ
A
T
B
O
P
u
Q
O
N
Q
R
A
M
B
Fig XIX
C
c
E
e
D
d
F
I
G
K
A
M
B
C
E
D
Fig XX
O
Q
P
R
u
F
I
G
K
M
Fig XXI
C
E
D
F
I
G
K
A
M
B
C
E
D
Fig XXII
I
K
M
Fig XXIII
C
E
D
A
I
B
K
A
M
B
C
E
D
Fig XXIV
I
A
Fig XXV
F
E
S
Q
B
M
R
P
C
G
I
O
N

III

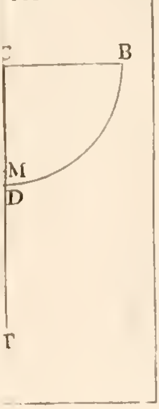


Fig: I

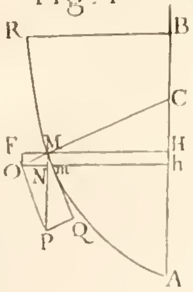

R
B
C
F
M
H
h
O
N
m
P
Q
A

Fig. II

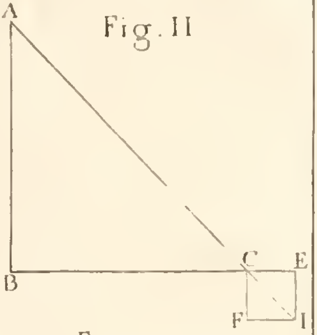
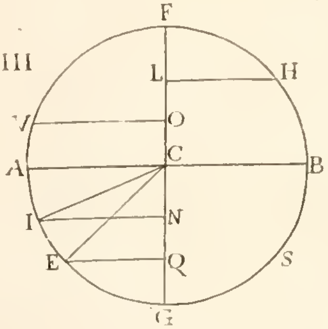


Fig. III


F
L
H
V
O
A
C
B
I
N
E
Q
S
G

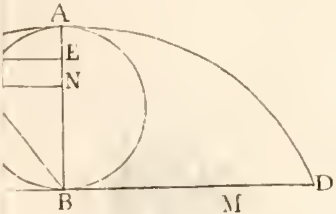


Fig: VI

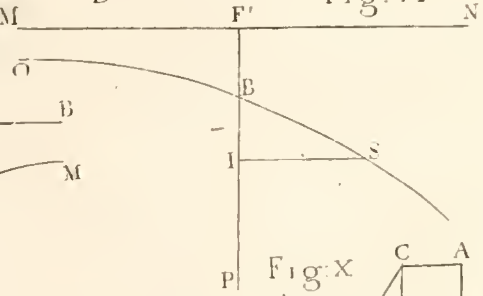


Fig. VIII

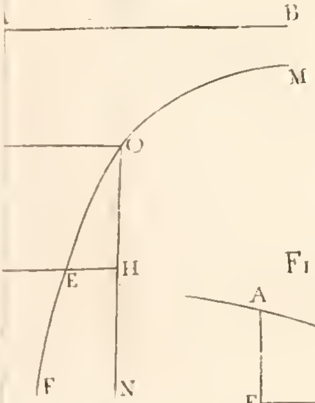


Fig: X

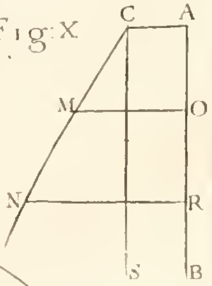
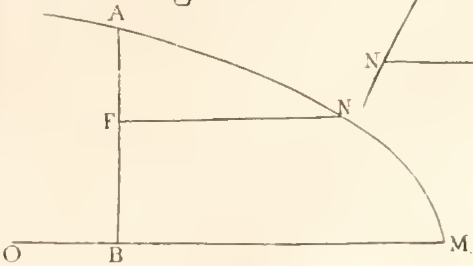


Fig: IX



Mem. della Società Italiana Tom. II pag. 313 DE CESARIS P.te I FONTANA Tom. II pag. 331

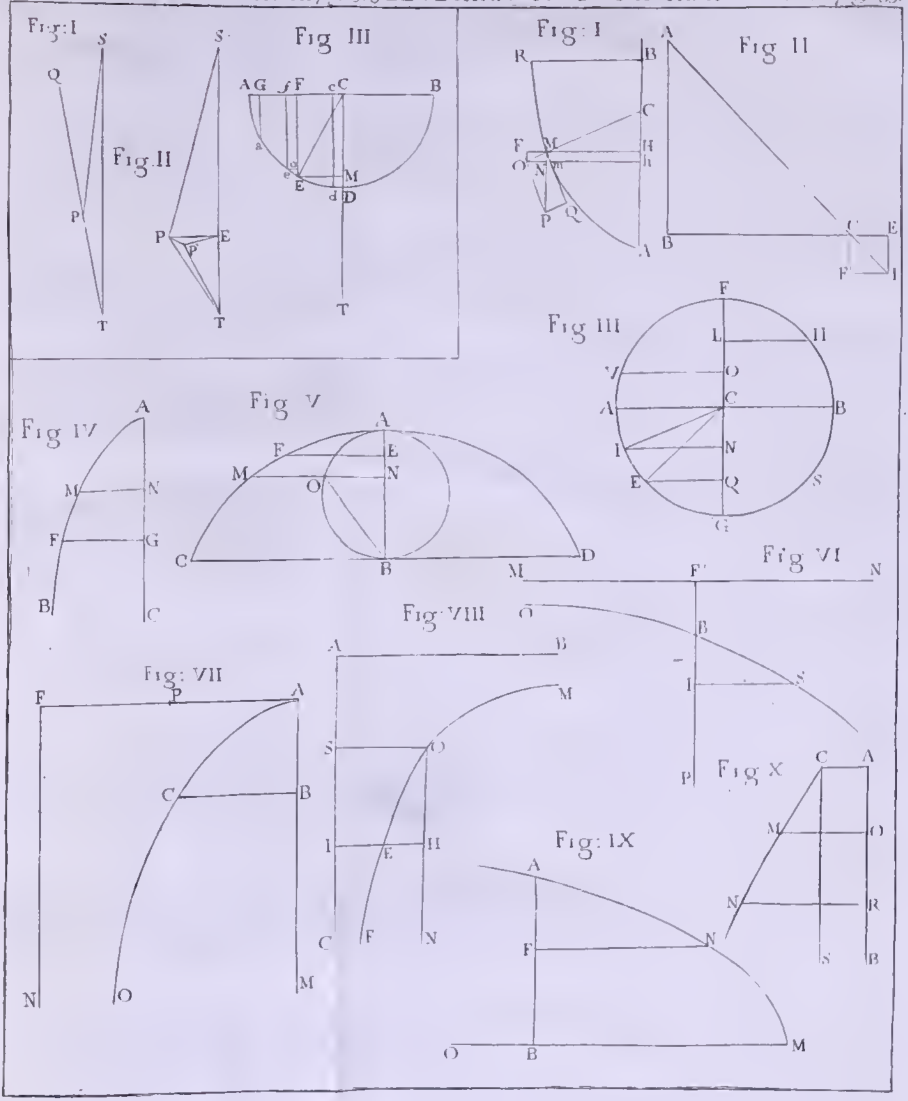
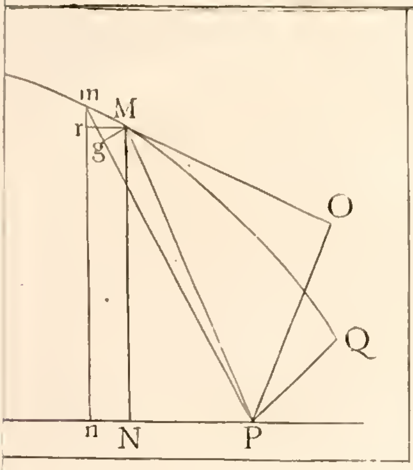


Fig: I
Q
S
P
T
Fig. II
S
P
P'
E
T
Fig III
A G
f F
c C
B
a
e
g
E
M
d D
T
Fig: I
R
B
C
F
M
H
O
N
m
h
P
Q
A
Fig II
A
B
C
E
F
I
Fig III
F
L
H
V
O
C
A
B
I
N
E
Q
S
G
Fig IV
A
M
N
F
G
B
C
Fig V
A
F
E
M
N
O
C
B
M
D
Fig VI
F
N
O
B
I
S
P
Fig VIII
A
B
M
S
O
I
E
H
C
F
N
Fig: VII
F
P
A
C
B
N
O
M
Fig X
C
A
M
O
N
R
S
B
Fig: IX
A
F
N
O
B
M



LORGNA *Tom. II pag. 463*

Fig. II

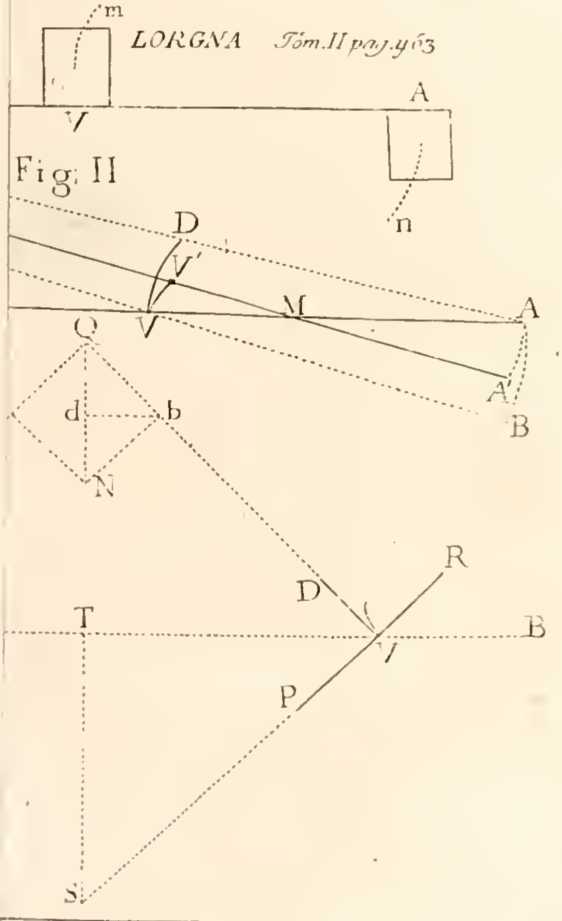
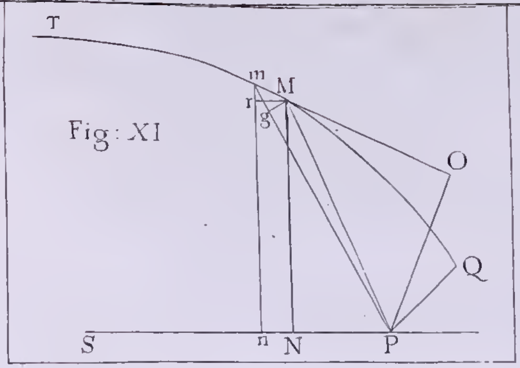

m
V
A
n
D
V'
M
A
Q
V
A'
B
d
b
N
R
D
T
B
V
P
S

Fig: XI

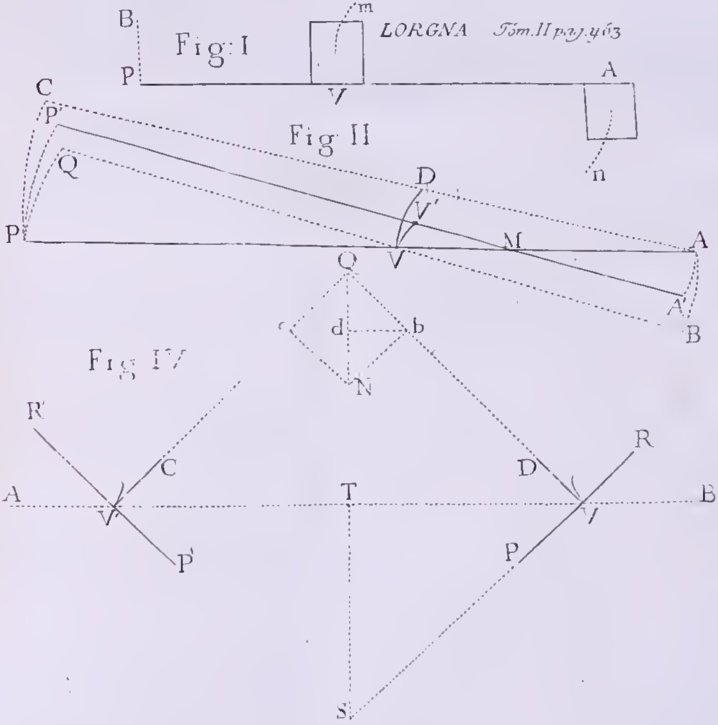

T
m
M
r
g
O
Q
S
n
N
P

LORGNA *Tom. II pag. 463*

Fig: I

Fig: II

Fig: IV


B
P
m
V
A
n
C
P'
Q
P
D
V'
M
A
V
A'
B
Q
c
d
b
N
R'
C
A
V'
P'
T
D
R
B
V
P
S